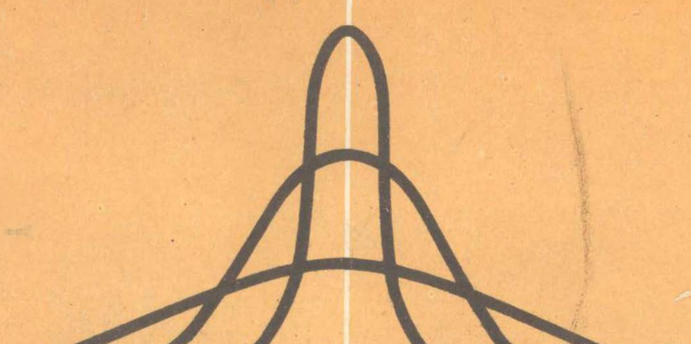
О. С. Ивашев-Мусатов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА



ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Допущено Министерством приборостроения, средств автоматизации и систем управления в качестве учебного пособия для техникумов по специальности «Прикладная математика»

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

22.17
И 24
УДК 519.2

Теория вероятностей и математическая статистика. Ивашев-Мусатов О. С. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, М., 1979.

В книге кратко излагаются начала теории вероятностей. Читатель знакомится со случайными величинами и их основными характеристиками. Рассматриваются основные предельные теоремы и показана их роль для практики. Последнее связано с математической статистикой и обработкой результатов наблюдений.

Все темы снабжены набором упражнений с ответами.

Книга рассчитана на учащихся техникумов по специальности «Прикладная математика»; может быть использована во втузах.

Олег Сергеевич Ивашев-Мусатов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

М., 1979 г., 256 стр. с илл.

Редактор *Е. Ю. Ходан*
Техн. редактор *Л. В. Лихачева*
Корректоры *О. М. Кривенко, Т. С. Плетнева*

ИБ № 11252

Сдано в набор 28.12.78. Подписано к печати 09.04.79. Бумага 84×108 1/32, тип. № 2. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 13,44. Уч.-изд. л. 14,34. Тираж 57 000 экз. Заказ № 3561. Цена книги 50 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28

$И\,\dfrac{20203-072}{053(02)\text{-}79}$ 25-79 1702060000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В школьном курсе математики и физики обычно рассматриваются только такие задачи, в которых результат действия однозначно определен. Например, если выпустить камень из рук, то он начинает падать с постоянным ускорением. Положение камня может быть вычислено в любой момент времени. Однако есть большой круг задач, имеющих большое значение в науке и ее технических и хозяйственных приложениях, в которых результат действия не определен однозначно. Например, если подбросить монету, то нельзя предсказать, какой стороной она ляжет вверх — гербом или цифрой. Здесь результат наших действий не определен однозначно. Может показаться, что в подобных задачах ничего определенного сказать нельзя, но даже обычная игровая практика показывает обратное: при большом числе бросаний монеты примерно в половине случаев выпадет герб, а в половине случаев — цифра. А это уже определенная закономерность. Подобного рода закономерности и изучаются в теории вероятностей. Изменяется в корне сама постановка задачи. Нас уже интересует не результат определенного опыта, а то, что получится после многократного повторения этого опыта. Коротко говорят, что в теории вероятностей изучаются закономерности массовых случайных событий.

Пример с бросанием монеты был приведен только потому, что это самая простая и хорошо знакомая ситуация, в которой результат нашего действия не определен однозначно. Но есть много задач самого разного содержания, для которых опыт с бросанием монеты может служить моделью. Однако в большинстве практических задач возникают и более сложные вопросы.

Возьмем одну из важных задач народного хозяйства — организацию телефонной связи в районе (области). Сколько надо протянуть телефонных линий к районному (областному) центру? Это тоже чисто вероятностная задача. Заранее нельзя предсказать, сколько вызовов и в какой час поступит в районный центр. Если телефонных линий провести слишком мало, то до центра дозвониться будет очень трудно. Если же их провести много, то дозвониться будет просто, но большая часть телефонной сети будет простаивать, т. е. затраты на организацию связи получатся завышенными. С аналогичными проблемами мы сталкиваемся и в ряде транспортных задач. Например, как организовать работу в порту? Сколько надо погрузочно-разгрузочного оборудования? Суда, совершающие дальние рейсы, не могут выдерживать точного расписания (из-за погоды, поломок и т. п.). Поэтому приход судов в порт тоже относится к категории случайных событий. И планирование оборудования порта должно строиться в соответствии с выводами из теории вероятностей. Если оборудования мало, то суда будут долго стоять под разгрузкой (погрузкой); если же оборудования очень много, то очереди на погрузку (разгрузку) не будет, но при этом большая часть портового оборудования будет простаивать.

Большое число вероятностных задач возникает при постановке экспериментов и в планировании. Например, сколько опытов надо поставить, чтобы выводы из них были достоверны? Если опытов слишком мало, то, естественно, возникает сомнение, что результаты опытов случайны. Конечно, чем больше опытов, тем надежнее сделанные из них выводы. Но сколько надо сделать опытов для получения надежных выводов? Ведь каждый опыт — это затраченные деньги, и здесь тоже не должно быть неоправданного перерасхода средств. Теория вероятностей и здесь приходит на помощь. Имеется целый ряд рекомендаций, обосновывающих необходимое количество опытов для получения достаточно надежных результатов.

И еще пример вероятностной задачи. Пусть речь идет о распределении мест между классами по результатам контрольной работы. Для этого в каждом классе выводится средняя оценка (среднее арифметическое из всех оценок, полученных в классе за контрольную работу). Спрашивается, сколько знаков после запятой корректно учитывать при таком сравнении? Оказывается, что для классов в 30—40 человек корректно вычислять оценки с точностью до 0,1. Ну, а если аналогичное сравнение захотят сделать, например, по техникумам? Сколько знаков при вычислении среднего балла по техникуму тогда корректно брать? Оказывается, что для того, чтобы можно было учитывать и сотые, необходимо, чтобы число принимаемых во внимание контрольных работ было порядка 2500.

Приведенные примеры уже дают некоторое представление о круге задач, которые решаются при помощи теории вероятностей. Однако решение этих задач требует уже большой теоретической подготовки. Поэтому вначале будут решаться более простые задачи (имеющие игровой характер), поскольку в них гораздо проще обнаружить вероятностные закономерности. Но и на них уже можно будет проследить основные вероятностные закономерности и специфику постановки и решения вероятностных задач.

Выше были приведены примеры, поясняющие характер задач, рассматриваемых в теории вероятностей. Но что же такое сама теория вероятностей? Для ответа на этот вопрос откроем энциклопедию. Читаем: «Теория вероятностей — математическая наука, позволяющая по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных каким-либо образом с первыми».

В этом определении есть целый ряд понятий: случайное событие, вероятность случайного события, связь между случайными событиями. Все эти понятия нуждаются в определении и разъяснении. В усвоении этого круга вопросов и состоит первое знакомство с теорией вероятностей.

Теория вероятностей возникла и развивалась в процессе решения ряда отдельных задач игрового и прикладного характера. Первые дошедшие до нас сведения относятся к XVI—XVII векам и связаны с решением задач, возникающих в азартных играх (Д. Кардано, Х. Гюйгенс, Б. Паскаль, П. Ферма и др.). Затем стали возникать и развиваться прикладные задачи (в первую очередь вопросы страховки от несчастных случаев и стихийных бедствий). Постепенно выделился круг задач со специфической (как мы теперь говорим — вероятностной) постановкой вопроса и методикой их решения, оформились первые определения и теоремы. Первая теорема, установившая связь между теорией и практикой и давшая начало целой серии так называемых «предельных теорем» теории вероятностей, была доказана в конце XVII века Я. Бернулли (1654—1705). Затем развитие теории вероятностей продолжалось в работах А. Муавра (1667—1754), П. Лапласа (1749—1827), К. Гаусса (1777—1855), С. Пуассона (1781—1840) и особенно в работах русского математика П. Л. Чебышева (1821—1894) и его учеников А. А. Маркова (1856—1922) и А. М. Ляпунова (1857—1918). В XX веке наибольшее развитие и окончательное оформление как математической науки теория вероятностей получила в работах советских математиков.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Алгебра событий

1. Случайные события. В теории вероятностей окружающая нас жизнь изучается не во всей ее сложности, а только с одной определенной стороны. При этом строится некоторая схема (или модель), которая более или менее полно отражает интересующую нас сторону жизни. Например, в геометрии изучаются свойства фигур: точек, прямых, плоскостей и т. п. Но в реальной жизни мы не наблюдаем таких объектов — это результаты моделирования (схематизирования, абстрагирования) определенной стороны реальной жизни. В физике рассматриваются материальная точка, идеальный газ, абсолютно твердое тело и т. п. Это тоже модели определенной стороны реальной жизни — в природе мы не наблюдаем материальных точек, идеального газа, абсолютно твердого тела и т. п.

В теории вероятностей рассматривается следующая модель изучаемых явлений реальной жизни: проводится опыт (испытание), в результате происходят случайные события (обычно говорят короче — события). Например, бросают монету и смотрят, что выпало. В результате этого опыта может выпасть герб — это одно событие, а может выпасть цифра — это другое событие. Поскольку выпадение герба зависит от случая, то это случайное событие. Данная схема содержит как частный случай уже знакомые задачи, имеющие однозначно определенный результат действия.

События принято обозначать буквами $A, B, C, \ldots$ Например, в опыте с бросанием монеты событие «выпал герб» будем обозначать буквой Γ. При этом пишут $\Gamma =$ «выпал герб». Аналогично записывают $Ц =$ «выпала цифра».

Как правило, одна и та же буква может обозначать разные события — надо только каждый раз точно указать, какое именно (подобно тому как при решении геометрических задач буква A в одной задаче обозначает одну точку, а в другой задаче — другую). Но есть два события, выделяющиеся из массы остальных, за которыми закреплены определенные буквы.

Определение. Событие называется *достоверным* и обозначается буквой E, если оно обязательно происходит в результате опыта.

Например, в результате бросания монеты обязательно произойдет событие «выпал герб или цифра» — это достоверное событие.

Определение. Событие называется *невозможным* и обозначается буквой U, если оно не может произойти в результате рассматриваемого опыта.

Например, при бросании монеты событие «не выпало ни герба, ни цифры» произойти не может — это невозможное событие.

Рассмотрим еще один опыт, более богатый событиями, чем опыт с бросанием монеты, — бросание игральной кости. Он состоит в том, что бросают игральную кость (кубик, на сторонах которого точками указаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6) и смотрят, сколько выпало очков (т. е. какое число указано на грани, оказавшейся сверху). При этом могут произойти следующие события:

$Q_1 =$ «выпало 1 очко», $Q_4 =$ «выпало 4 очка»,
$Q_2 =$ «выпало 2 очка», $Q_5 =$ «выпало 5 очков»,
$Q_3 =$ «выпало 3 очка», $Q_6 =$ «выпало 6 очков».

Но в этом опыте можно рассматривать и другие события, например:

$Q_{пр} =$ «выпало простое число очков»,
$Q_{3к} =$ «число выпавших очков делится на три»,
$Q_ч =$ «число выпавших очков четно»,
$Q_н =$ «число выпавших очков нечетно».

Уже в этом простом опыте мы можем заметить некоторые типы связей между событиями. Например, события $Q_ч$ и $Q_н$ не могут произойти одновременно. Действительно, число выпавших очков или четно (т. е. произошло событие $Q_ч$), или нечетно (когда произошло событие $Q_н$). Этот вид связи между событиями можно наблюдать и в других опытах — он носит определенное название.

Определение. Два события называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно в рассматриваемом опыте. События, которые в рассматриваемом опыте могут произойти одновременно, называются *совместными*.

Например, в опыте с бросанием игральной кости события $Q_ч$ и $Q_{пр}$ совместны. Действительно, пусть выпало 2 очка. Число 2 четное; следовательно, произошло событие $Q_ч$. С другой стороны, число 2 простое; следовательно, произошло событие $Q_{пр}$. Таким образом, события $Q_ч$ и $Q_{пр}$ совместны. Аналогично, совместны и события Q_3 и $Q_{пр}$. Однако между совместностью пары событий Q_3 и $Q_{пр}$, с одной стороны, и пары событий $Q_ч$ и $Q_{пр}$, с другой стороны, наблюдается существенная разница. Для первой пары из того, что произошло событие Q_3, следует, что произошло событие $Q_{пр}$. Для второй же пары это не так. В самом деле, предположим, что выпало 4 очка, т. е. произошло событие $Q_ч$. Событие $Q_{пр}$ при этом не произошло, так как 4 не является простым числом, т. е. для второй пары из того, что произошло одно из совместных событий, еще не следует, что произошло другое. Таким образом, мы подошли к следующему определению.

Определение. Событие A *благоприятствует* событию B, если из того, что произошло событие A, следует, что произошло событие B (пишут: $A \subset B$).

Так, в опыте с бросанием игральной кости $Q_3 \subset Q_{пр}$.

Для дальнейшего важно отметить следующий факт. В опыте с бросанием игральной кости события Q_1, Q_2, ..., Q_6 выделяются: они попарно несовместны, и в результате опыта одно из них обязательно происходит. Обнаружение подобного множества событий для рассматриваемого опыта весьма существенно при решении вероятностных задач (в этом мы убедимся далее).

Определение. Множество событий рассматриваемого опыта, одно из которых в результате опыта обязательно происходит, а любые два из которых несовместны, называется *множеством исходов* (или элементарных событий, или полной группой событий) этого опыта. Каждое событие из этого множества называется *исходом* (или элементарным событием) рассматриваемого опыта.

Так, в опыте с бросанием игральной кости события Q_1, Q_2, ..., Q_6 суть исходы этого опыта. Надо подчеркнуть, что для одного и того же опыта можно рассматривать разные множества исходов. Например, для опыта с бросанием игральной кости можно рассматривать множество из двух исходов $Q_ч$ и $Q_н$. В самом деле, эти события несовместны и в результате опыта одно из них обязательно происходит. От того, насколько удачно выбрано множество исходов опыта, зависит бо́льшая или меньшая сложность решения поставленной вероятностной задачи: при удачном выборе решение сильно упрощается, а при неудачном или усложняется, или вообще не может быть найдено.

Понятие исходов опыта позволяет установить связь между теорией вероятностей и теорией множеств и придать многим утверждениям большую наглядность (подобно тому как при помощи графика функции просто и наглядно разъясняются многие факты). Начнем с примеров. В опыте с игральной костью любое событие может быть описано множеством исходов этого опыта, благоприятствующих рассматриваемому событию. Например, событие $Q_ч$ описывается подмножеством исходов $\{Q_2;\ Q_4;\ Q_6\}$, а событие $Q_{пр}$ — подмножеством исходов $\{Q_2;\ Q_3;\ Q_5\}$ и т. п. Вместо того, чтобы говорить: событие A = «выпало 3 очка или 5 очков», достаточно указать множество исходов опыта, благоприятствующих событию A, — в нашем случае это $\{Q_3;\ Q_5\}$.

Аналогичное положение и в общем случае. Каждое событие в рассматриваемом опыте однозначно определяет некоторое подмножество исходов этого опыта. И обратно, каждое подмножество исходов опыта определяет некоторое событие в этом опыте (этому событию благоприятствуют те и только те исходы опыта, которые принадлежат взятому подмножеству). И событие и подмножество исходов опыта, благоприятствующих этому событию, мы будем обозначать одной и той же буквой.

События будем изображать так же, как в школьном курсе принято изображать множества (рис. 1).

Совместность и несовместность событий легко распознать по графическому изображению (рис. 2 и 3 соответственно). Действительно, на рис. 2 указано, что есть исход опыта, благоприятствующий и событию A и событию B (этот исход принадлежит пересечению множеств $A \cap B$ — на рис. 2 оно дважды заштриховано).

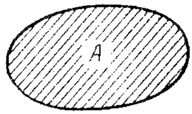


Рис. 1.

Если в результате опыта этот исход произошел, то это значит, что произошло и событие A и событие B, т. е. эти события совместны. На рис. 3 изображен случай, когда нет исходов опыта, благоприятствующих и событию A и событию B, т. е. когда эти события

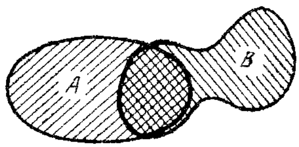


Рис. 2.

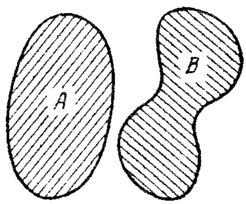


Рис. 3.

несовместны. В самом деле, предположим противное: события A и B, изображенные на рис. 3, совместны. Это значит, что в результате опыта может произойти событие, состоящее в том, что произошло и событие A и событие B. Этому новому событию благоприятствует некоторый исход опыта (в результате опыта один из исходов обязательно происходит). Этот исход тогда принадлежит пересечению множеств, что противоречит ситуации, изображенной на рис. 3. Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение (события A и B совместны) неверно. Следовательно, события A и B несовместны.

А какое событие определяется всем множеством исходов опыта? Поскольку в результате опыта один из его исходов обязательно происходит (по определению множества исходов опыта), то множество всех исходов опыта определяет достоверное событие E. Обычно исходы опыта обозначаются $E_1, E_2, \ldots, E_n$, поэтому $E=\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$.

А какое событие определяется пустым подмножеством множества исходов опыта? Поскольку в результате опыта один из исходов обязательно происходит, то пустое подмножество исходов опыта, очевидно, определяет невозможное событие U.

Упражнения. В приведенных ниже опытах укажите совместные и несовместные события, а также какое событие какому благоприятствует.

1. Опыт — бросание одной монеты; события: $Ц$ = «выпала цифра» и $Г$ = «выпал герб».

2. Опыт — бросание двух монет; события: A = «хотя бы на одной из монет выпала цифра», B = «хотя бы на одной из монет выпал герб», C = «на обеих монетах выпала цифра», D = «на обеих монетах выпал герб».

3. Опыт — два выстрела по мишени; события: A = «ни одного попадания», B = «одно попадание», C = «два попадания», D = = «нет промаха», H = «есть хотя бы одно попадание».

4. Опыт — вынимание косточки домино; события: A = «вынуто 6 очков», B = «вынуто 3 очка», C = «на вынутой косточке три и пусто».

5. Будут ли в упр. 2 события A и B множеством исходов опыта?

6. Будут ли в упр. 2 события C и D множеством исходов опыта?

7. Какое третье событие H надо добавить к событиям C и D из упр. 2, чтобы получить множество исходов опыта?

8. Укажите множество исходов опыта в упр. 3.

9. В опыте с бросанием игральной кости изобразите множество исходов этого опыта и события $Q_ч$, $Q_{пр}$, $Q=\{Q_1; Q_5; Q_6\}$.

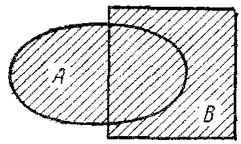
10. В упр. 2 изобразите указанные события на одном и том же рисунке.

11. В упр. 3 изобразите указанные события на одном и том же рисунке.

12. В упр. 4 изобразите указанные события на одном и том же рисунке.

2. Алгебра событий. Из школьного курса математики вы знаете, что с множествами можно производить действия — объединения и пересечения. Аналогичные действия мы будем производить и над событиями — это будут те связи между событиями, о которых говорилось в определении теории вероятностей. При этом свойства этих действий будут во многом походить на свойства действий сложения и умножения в алгебре. Это позволит производить вычисления с событиями почти так же, как это делается в алгебре с числами и выражениями, отсюда и название данного раздела — алгебра событий.

Приведем сначала некоторые разъяснения, подводящие к понятию объединения событий. Рассмотрим два события A и B. Это два множества A и B исходов опыта. Объединение этих множеств $A \cup B$ — это некоторое множество исходов опыта, т. е. некоторое событие. Это событие называется объединением событий A и B и обозначается $A \cup B$ (см. рис. 4).



$A \cup B$

Рис. 4.

А как охарактеризовать объединение событий, пользуясь только терминологией теории вероятностей (т. е. терминами «событие произошло» и «событие не произошло»)?

Событию $A \cup B$ благоприятствуют исходы опыта, которые благоприятствуют хотя бы одному из этих событий (или событию A, или событию B, или одновременно и событию A и событию B). Следовательно, событие $A \cup B$ состоит в том, что произошло хотя бы одно из двух событий (или A, или B, или A и B одновременно).

Аналогично можно рассматривать объединение любого числа событий. Итак, мы приходим к следующему определению.

Определение. *Объединением событий* $A, B, C, \ldots$ *называется событие, состоящее в том, что в результате опыта произошло хотя бы одно из указанных событий. Объединение этих событий обозначается* $A \cup B \cup C \cup \ldots$

Пример 1. *Бросается игральная кость.* Событие $Q_1 \cup Q_3 \cup Q_5$ состоит в том, что произошло хотя бы одно из событий Q_1, Q_3, Q_5 (выпадение нечетного *числа очков*). *Поэтому можно записать равенство*

$$Q_н = Q_1 \cup Q_3 \cup Q_5.$$

Пример 2. В электрическую цепь параллельно включены два выключателя. Каждый из них может быть как включен, так и выключен. Рассмотрим события: A = «выключен выключатель № 1», B = «включен выключатель № 2», $C=$«по цепи идет ток». Тогда при замыкании цепи $C=A\cup B$.

Пример 3. В воскресенье друзья могли пойти или на футбол, или на баскетбол, или на волейбол. Рассмотрим события: $A=$«друзья пошли на футбол», $B=$«друзья пошли на баскетбол», $C=$«друзья пошли на волейбол» и $H=$«друзья пошли на соревнование». Тогда $H=A\cup B\cup C$.

Пример 4. Пусть событию A благоприятствуют исходы опыта E_1, E_2, ..., E_m. Тогда $A=E_1\cup E_2\cup\ldots$ $\ldots\cup E_m$, поскольку событие A происходит, если произошел хотя бы один из указанных исходов опыта. Это объединение часто записывают короче так:

$$A=\bigcup_{k=1}^{m} E_k.$$

Пример 5. Пусть событию A благоприятствуют исходы опыта (номера которых могут идти не подряд) E_{i_1}, E_{i_2}, ..., E_{i_m}. Тогда

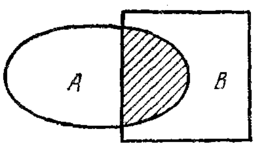
$$A=\bigcup_{s=1}^{m} E_{i_s},$$

как и в предыдущем примере.

Из определения объединения событий следует, что

$$A\cup B=B\cup A,$$
$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C.$$

Теперь введем вторую операцию — пересечение событий. В школьном курсе математики кроме объединения множеств рассматривалось еще и их пересечение. Перенесем это понятие и на события. Рассмотрим сначала два события A и B. Это два множества исходов опыта. Рассмотрим пересечение $A\cap B$ этих множеств. Это тоже некоторое множество исходов опыта, т. е. некоторое событие в рассматриваемом опыте. Оно называется пересечением событий A и B и обозначается $A\cap B$. На рис. 5 изображено пересечение событий A и B — оно заштриховано.



$A\cap B$

Рис. 5.