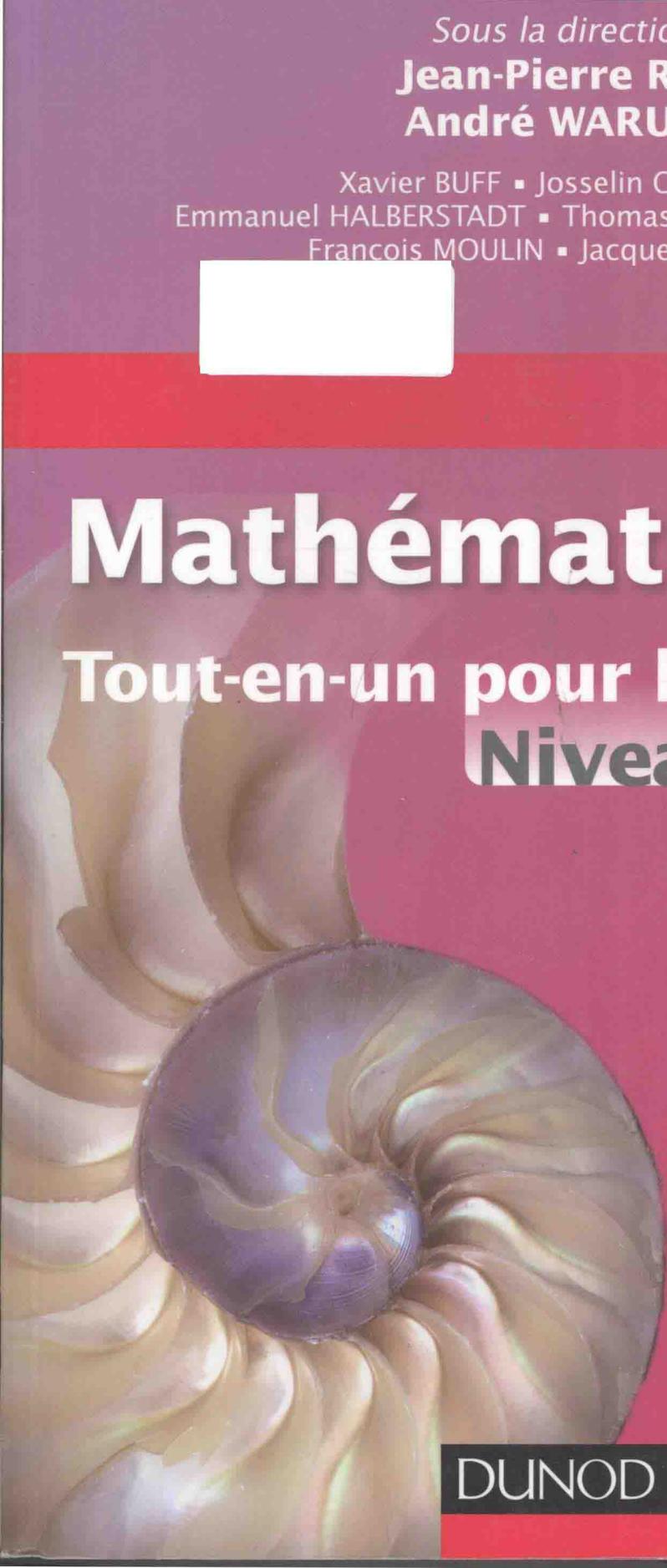


Sous la direction de
Jean-Pierre RAMIS
André WARUSFEL

Xavier BUFF ■ Josselin GARNIER
Emmanuel HALBERSTADT ■ Thomas LACHAND-ROBERT
Francois MOULIN ■ Jacques SAULOY



Mathématiques
Tout-en-un pour la Licence
Niveau 1

2^e édition

- ▶ Cours complet
- ▶ 700 exercices
- ▶ Bonus en ligne

RESSOURCES



NUMÉRIQUES

DUNOD

Sous la direction de
Jean-Pierre RAMIS
André WARUSFEL

Xavier BUFF • Josselin GARNIER
Emmanuel HALBERSTADT • Thomas LACHAND-ROBERT
François MOULIN • Jacques SAULOY

Mathématiques

Tout-en-un pour la Licence

Niveau 1



2^e édition

DUNOD

Jean-Pierre Ramis, ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, membre de l'Institut (Académie des Sciences), membre de l'Institut Universitaire de France, professeur à l'Institut de Mathématiques de Toulouse (Université Paul Sabatier).

André Warusfel, ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, a été professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand à Paris et inspecteur général de mathématiques.

Xavier Buff, ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, maître de conférences à l'Institut de Mathématiques de Toulouse.

Josselin Garnier, ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, professeur à l'université Denis Diderot (Paris).

Emmanuel Halberstadt, maître de conférences à l'UPMC (Paris), ancien chargé de cours d'agrégation aux Écoles normales supérieures d'Ulm et de Cachan.

Thomas Lachand-Robert, ancien élève de l'École polytechnique, professeur à l'université de Savoie à Chambéry.

François Moulin, ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, professeur de chaires supérieures (spéciales MP*)

Jacques Sauloy, ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud, maître de conférences à l'Institut de Mathématiques de Toulouse.

Illustration de couverture :

An amazing fibonacci pattern in a nautilus shell © Ana Tramont

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2006, 2013

ISBN 978-2-10-059893-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Mathématiques

Tout-en-un pour la Licence

Niveau 1

1992



Préface

Les mathématiques constituent l'ossature de la science moderne et sont une source intarissable de concepts nouveaux d'une efficacité incroyable pour la compréhension de la réalité matérielle qui nous entoure. Ainsi l'apprentissage des mathématiques est devenu indispensable pour la compréhension du monde par la science. Les nouveaux concepts eux-mêmes sont le résultat d'un long processus de distillation dans l'alambic de la pensée. Essayer de justifier les mathématiques par leurs applications pratiques n'a guère de sens, tant ce processus de création est sous-tendu par la soif de connaître et non l'intérêt immédiat.

Les mathématiques restent l'un des domaines dans lequel la France excelle et ceci malgré la mutilation des programmes dans le secondaire et l'influence néfaste d'un pédagogisme dont l'effet principal est de compliquer les choses simples.

Vues de loin les mathématiques apparaissent comme la réunion de sujets distincts comme la géométrie, qui a pour objet la compréhension du concept d'espace, l'algèbre, art de manipuler les symboles, l'analyse, science de l'infini et du continu, la théorie des nombres etc. Cette division ne rend pas justice à l'un des traits essentiels des mathématiques qui est leur unité profonde de sorte qu'il est impossible d'en isoler une partie sans la priver de son essence. En ce sens les mathématiques ressemblent à un être biologique qui ne peut survivre que comme un tout et serait condamné à périr si on le découpait en morceaux en oubliant son unité fondamentale.

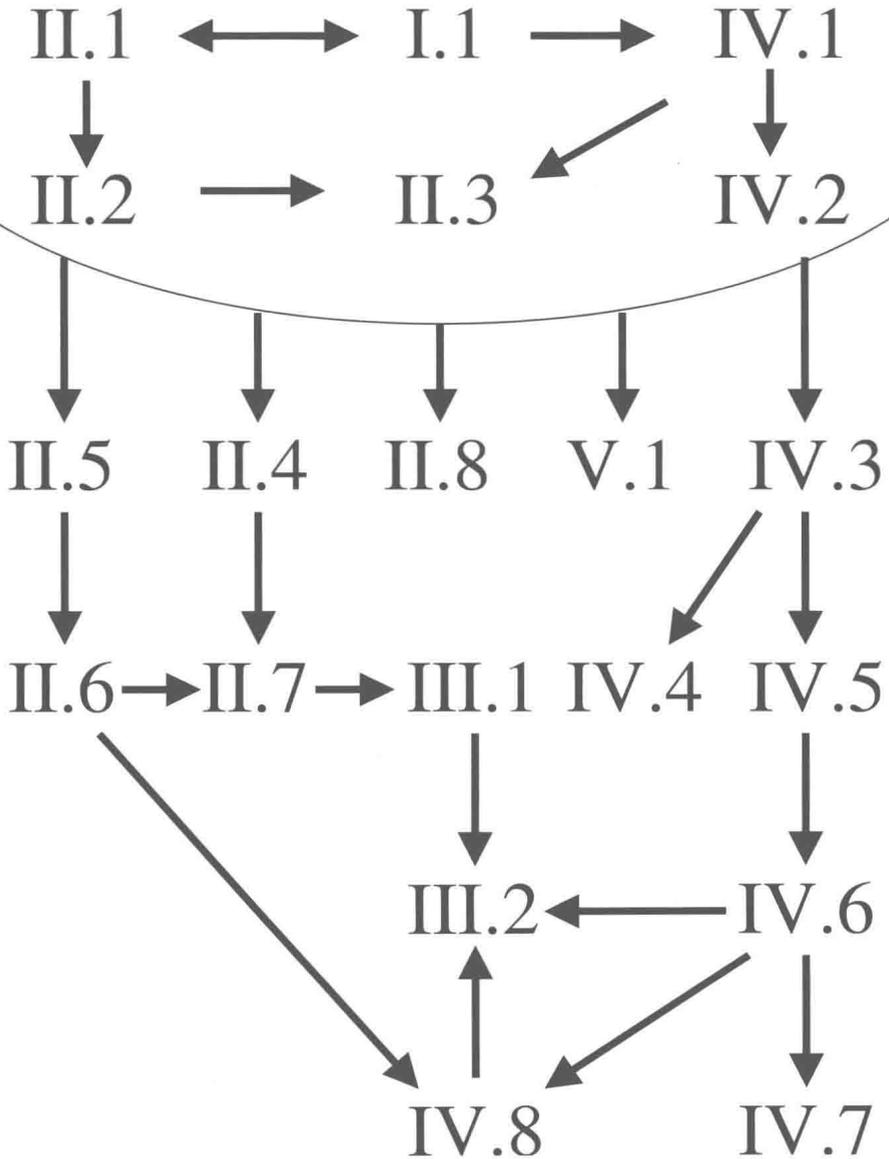
L'une des caractéristiques de l'apprentissage des mathématiques, c'est la possibilité donnée à tout étudiant de devenir son propre maître et en ce sens il n'y a pas d'autorité en mathématiques. Seules la preuve et la rigueur y font la loi. L'étudiant peut atteindre par le travail une maîtrise suffisante pour pouvoir s'il le faut tenir tête au maître. La rigueur, c'est être sûr de soi, et à l'âge où l'on construit sa personnalité, se confronter au monde mathématique est le moyen le plus sûr de construire sur un terrain solide. Il faut, si l'on veut avancer, respecter un équilibre entre les connaissances qui sont indispensables et le « savoir-faire » qui l'est autant. On apprend les maths en faisant des exercices, en apprenant à calculer sans l'aide de l'ordinateur, en se posant des questions et en ne lâchant pas prise facilement devant la difficulté. Seule la confrontation réelle à la difficulté a une valeur formatrice, en rupture avec ce pédagogisme qui complique les choses simples et mélange l'abstraction mathématique avec le jeu qui n'a vraiment rien à voir. Non, les mathématiques ne sont pas un jeu et l'on n'apprend pas les mathématiques en s'amusant.

L'ouvrage qui suit est un cours soigné et complet idéal pour apprendre toutes les Mathématiques qui sont indispensables au niveau de la Licence. Il regorge d'exercices (700) qui

incitent le lecteur à réfléchir et ne sont pas de simples applications de recettes, et respecte parfaitement l'équilibre nécessaire entre connaissances et savoir-faire, permettant à l'étudiant de construire des images mentales allant bien au-delà de simples connaissances mémorisées. Il s'agit d'un ouvrage de référence pour la Licence, non seulement pour les étudiants en mathématiques mais aussi pour tous ceux qui s'orientent vers d'autres disciplines scientifiques. Il insiste sur la rigueur et la précision et va au fond des notions fondamentales les plus importantes sans mollir devant la difficulté et en respectant constamment l'unité des mathématiques qui interdit tout cloisonnement artificiel. Il répond à une demande de tant de nos collègues d'un ouvrage qui les aide à « redresser la barre », mais sera aussi un atout merveilleux pour l'étudiant travaillant seul par la cohérence et la richesse de son contenu. Il est l'œuvre d'une équipe qui rassemble des mathématiciens de tout premier plan ayant une véritable passion pour l'enseignement. Il était grand temps !

Alain Connes,
Médaille Fields 1982,
Professeur au Collège de France.

TRONC COMMUN



Avant-propos

Ce livre est le premier d'une série d'ouvrages de mathématiques pour la Licence. Il couvre la totalité des programmes de mathématiques des filières scientifiques de première année. Il contient un cours complet, illustré d'exemples et d'applications, des exercices corrigés, des énoncés d'exercices supplémentaires et un index très complet.

Il est prioritairement conçu comme aide à l'enseignement oral dispensé par nos collègues dans les cours et travaux dirigés, en particulier par une construction modulaire, avec des schémas clairs de relations entre les différents thèmes. Les différents sujets apparaissent groupés dans un seul volume, avec leurs relations, mais l'ordre de lecture n'est pas imposé, et chaque étudiant peut se concentrer sur tel ou tel aspect en fonction de son programme et de son travail personnel.

Ce livre peut aussi être utilisé par un enseignant comme ouvrage de base pour son cours, dans l'esprit d'une pédagogie encore peu utilisée en France, mais qui a largement fait ses preuves ailleurs. Nous avons enfin aussi pensé à l'étudiant travaillant seul, sans appui d'un corps professoral.

Dans les mathématiques d'aujourd'hui, un certain nombre de théories puissantes sont au premier plan. Leur maniement, au moins à un certain niveau, devra évidemment être acquis par l'étudiant à la fin de ses années de Licence. Mais celui-ci devra aussi avoir appris à calculer, sans s'appuyer exagérément sur les ordinateurs et les logiciels, à « se débrouiller » devant un problème abstrait ou issu des applications. Nous avons donc, à cette fin, mis en place une approche adaptée. Nous insistons, dès la première année, sur les exigences de rigueur (définitions précises, démonstrations rigoureuses), mais les choses sont mises en place de façon progressive et pragmatique, et nous proposons des exemples riches, dont l'étude met souvent en œuvre des approches multiples. Nous aidons progressivement le lecteur à acquérir le maniement d'un outillage abstrait puissant, sans jamais nous complaire dans l'abstraction pour elle-même et un formalisme sec et gratuit : le cœur des mathématiques n'est sans doute pas un corpus de théories, si profondes et efficaces soient-elles, mais un certain nombre de problèmes dans toute leur complexité, souvent issus d'une réflexion sur le monde qui nous entoure.

Historiquement les mathématiques se sont développées pendant des siècles en relation avec les autres sciences. Après une phase de « repliement sur elles-mêmes », leurs interactions se développent à nouveau vigoureusement (avec la physique, l'informatique, la mécanique, la chimie, la biologie...). Nous souhaitons, au niveau de l'enseignement des premières

années d'université, accompagner ce mouvement et, en pratique, la mise en place ici ou là de filières scientifiques pluridisciplinaires avec une composante mathématique pure ou appliquée. Nous avons ainsi, par exemple, introduit de solides initiations aux probabilités et statistiques et à l'algorithmique dès ce volume de première année.

Une correction détaillée des 430 énoncés supplémentaires est accessible sur le site <http://www.dunod.com> de l'éditeur : cliquer successivement sur « sciences et techniques », « mathématiques », « licence » puis l'icône de ce livre. Les corrigés sont au format pdf d'Adobe et repérables par une recherche classique de mot clef ; toute partie sélectionnée peut être lue, enregistrée ou imprimée séparément.

Edmond Ramis à enseigné de longues années en classes préparatoires et écrit une série de livres pour ces classes. Ces livres ont fortement contribué à la formation de plusieurs générations d'étudiants, finissant par acquérir un nom commun : « le Ramis ». Plusieurs de ces étudiants sont main tenant enseignants-chercheurs ou chercheurs dans les universités. Nous avons souhaité marquer une certaine continuité avec cette œuvre en publiant nos ouvrages dans le cadre de la « Série Ramis ».

Table des matières

Préface	v
Avant-propos	xvii

I Notations et vocabulaire

I.1 Fondements	3
1 Ensembles	4
1.1 Appartenance, éléments	4
1.2 Définition en compréhension	7
1.3 Constructeurs	8
2 Applications	12
2.1 Applications et graphes	12
2.2 Images et antécédents	14
2.3 L'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F	19
3 Suites et familles	20
3.1 Suites d'éléments d'un ensemble	20
3.2 Familles d'éléments d'un ensemble	21
3.3 Familles d'ensembles	22
3.4 Familles de parties d'un ensemble	23
4 Lois de composition	25
4.1 Vocabulaire général	25
4.2 Application au calcul ensembliste	28
5 Relations	29
5.1 Relations binaires sur un ensemble	29
5.2 Relations d'équivalence	32
5.3 Relations d'ordre	34
6 Cardinaux	38
6.1 Induction	38
6.2 Équipotence	40
6.3 Cardinaux finis et infinis	43
7 Rudiments de logique	45
7.1 Logique propositionnelle	45
7.2 Prédicats et quantificateurs	48
7.3 Théorèmes et démonstrations	51
EXERCICES	54

II Algèbre

II.1 Arithmétique	61
1 Ensemble des entiers naturels	62
1.1 Relations d'ordre et entiers naturels	63
1.2 Récurrence	63
1.3 Addition et multiplication des entiers naturels	67
2 Dénombrement	71
2.1 Ensembles finis, ensembles dénombrables	71
2.2 Analyse combinatoire.	76
3 Divisibilité	81
3.1 Division euclidienne. Numération	81
3.2 Nombres premiers. Factorisation des entiers	84
3.3 Plus grand commun diviseur, algorithme d'Euclide	88
4 Entiers relatifs	92
4.1 Opérations sur les entiers relatifs	92
4.2 Sous-groupes de \mathbb{Z} , divisibilité dans \mathbb{Z}	96
5 Nombres rationnels	100
EXERCICES	106
II.2 Groupes, anneaux, corps	113
1 Lois de composition internes.	114
2 Groupes	120
2.1 Définitions, règles de calcul	120
2.2 Sous-groupes, morphismes de groupes	122
2.3 Groupe symétrique	128
2.4 Groupe additif des entiers modulo n	132
3 Anneaux	134
3.1 Définitions, règles de calcul	134
3.2 Sous-anneaux, idéaux, morphismes	140
3.3 Divisibilité dans un anneau intègre	145
3.4 Anneau des entiers modulo n	147
4 Corps	152
EXERCICES	156
II.3 Espaces vectoriels et applications linéaires	163
1 Vocabulaire et propriétés élémentaires	164
1.1 La structure d'espace vectoriel	164
1.2 Combinaisons linéaires	167
1.3 Sous-espaces vectoriels	170
2 Applications linéaires.	174
2.1 Vocabulaire et exemples	174
2.2 Noyau et image	179
2.3 Quelques applications linéaires particulières	182
2.4 Espaces d'applications linéaires	185
3 Familles de vecteurs	187
3.1 Familles génératrices	188
3.2 Familles libres	190

3.3 Bases	194
3.4 Dimension finie	198
4 Sommes directes et projections.	198
4.1 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels	198
4.2 Projections	201
EXERCICES	204
II.4 Calcul matriciel élémentaire	211
1 Algèbre matricielle.	212
1.1 Définitions et généralités	212
1.2 Matrices carrées	220
1.3 Matrices et applications linéaires	226
2 Opérations élémentaires et algorithmes de Gauß.	230
2.1 Opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes d'une matrice	230
2.2 Algorithmes de Gauß : lignes seules	234
2.3 Algorithmes de Gauß : lignes et colonnes	237
EXERCICES	240
II.5 Le corps des nombres complexes	245
1 Construction et axiomes	246
1.1 Approche axiomatique	246
1.2 Construction effective de \mathbb{C}	247
2 Règles élémentaires de calcul	249
2.1 Représentation cartésienne.	249
2.2 Le plan d'Argand-Cauchy	251
2.3 Conjugaison	253
2.4 Module	254
2.5 Racines carrées	258
3 Représentation trigonométrique	261
3.1 Le groupe des nombres complexes de module 1	262
3.2 Racines de l'unité	263
3.3 Arguments d'un nombre complexe	266
3.4 Racines $n^{\text{èmes}}$ des nombres complexes	269
3.5 Applications à la trigonométrie	270
4 Quelques applications géométriques	272
4.1 Similitudes planes	272
4.2 Angles de vecteurs et angles de droites	273
4.3 Constructions à la règle et au compas	275
5 Topologie de \mathbb{C}	275
5.1 Rappels sur la convergence dans \mathbb{C}	275
5.2 L'exponentielle complexe	276
5.3 Le théorème de d'Alembert-Gauß	278
EXERCICES	280
II.6 Polynômes et fractions rationnelles	285
1 Polynômes sur un corps quelconque.	286
1.1 Construction et axiomes	286
1.2 Règles élémentaires de calcul	288
1.3 Propriétés arithmétiques des polynômes	295

1.4	Fonctions polynomiales et racines d'un polynôme	300
1.5	Polynômes dérivés	305
2	Polynômes sur les corps \mathbb{R} et \mathbb{C}	309
2.1	Applications du théorème de d'Alembert-Gauß	310
2.2	Cyclotomie	311
2.3	Polynômes de Tchebychef	314
2.4	Nombres algébriques	315
3	Fractions et fonctions rationnelles	318
3.1	Le corps des fractions rationnelles	318
3.2	Propriétés arithmétiques de $K(X)$	321
3.3	Fonctions rationnelles	325
3.4	Développements limités	326
	EXERCICES	327
II.7 Espaces vectoriels de dimension finie		333
1	Espaces vectoriels de dimension finie	334
1.1	Définition de la dimension	334
1.2	Applications linéaires en dimension finie	340
2	Applications linéaires et matrices	344
2.1	Écriture matricielle d'une application linéaire	344
2.2	Changements de bases	350
3	Déterminants	353
3.1	Déterminant d'une matrice carrée	354
3.2	Mineurs d'une matrice	360
3.3	Déterminant d'un endomorphisme	366
3.4	Valeurs propres et vecteurs propres	371
4	Systèmes linéaires	377
4.1	Équations linéaires	377
4.2	Systèmes linéaires	379
	EXERCICES	385
II.8 Initiation à l'algorithmique et au calcul formel		395
1	Exemple introductif : l'addition en base b	396
1.1	L'algorithme d'addition	397
1.2	Analyse de l'algorithme d'addition	402
2	Vocabulaire	405
2.1	Langage algorithmique simplifié	405
2.2	Des mathématiques aux algorithmes	408
2.3	Un exemple détaillé : l'algorithme d'Euclide	412
3	Quelques exemples fondamentaux	415
3.1	L'exponentiation dichotomique	415
3.2	Tris et permutations	417
3.3	Polynômes	422
	EXERCICES	425

III Géométrie

III.1 Géométrie dans les espaces affines	431
1 Espaces affines	432
1.1 Structure d'espace affine	432
1.2 Barycentres	434
1.3 Sous-espaces affines	435
1.4 Applications affines	438
2 Représentation des sous-espaces affines	442
2.1 Hyperplans	442
2.2 Repère	445
2.3 Systèmes d'équations	446
3 Géométrie affine dans \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{R}^3	447
3.1 Droites de \mathbb{R}^2	448
3.2 Plans de \mathbb{R}^3	451
3.3 Droites de \mathbb{R}^3	455
3.4 Géométrie euclidienne dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3	458
4 Les coniques	463
4.1 Cercles	463
4.2 Coniques	465
4.3 Équations de degré 2	469
EXERCICES	472
III.2 Courbes paramétrées	477
1 Courbes planes	478
1.1 Notion de courbe paramétrée	478
1.2 Étude locale	479
1.3 Deux exemples	488
2 Courbes en coordonnées polaires	492
2.1 Définition	492
2.2 Tangente	493
2.3 Branches infinies	495
3 Étude métrique d'une courbe plane	495
3.1 Longueur d'une courbe	495
3.2 Paramétrage normal	497
3.3 Courbure	500
3.4 Théorème fondamental	505
4 Courbes de l'espace	507
4.1 Tangente et plan osculateur	508
4.2 Courbure, torsion	510
4.3 Théorème fondamental	512
EXERCICES	512

IV Analyse

IV.1 Nombres réels, suites numériques	519
1 Corps des nombres réels	520
1.1 Bornes inférieures et supérieures	520
1.2 Le corps des nombres réels	522
1.3 Intervalles de \mathbb{R}	527
2 Suites numériques	528
2.1 Généralités sur les suites	528
2.2 Convergence d'une suite	536
2.3 Cas des suites réelles	546
2.4 Suites bornées	550
2.5 Limites infinies	551
3 Un exemple de construction de \mathbb{R}	554
3.1 Nombres décimaux	554
3.2 Définition des nombres réels ; relation d'ordre	556
3.3 Théorème de la borne supérieure	558
3.4 Opérations sur les réels	560
EXERCICES	562
IV.2 Fonctions réelles	567
1 Continuité	568
1.1 Limite d'une fonction	568
1.2 Théorème de la limite monotone	570
1.3 Continuité	571
1.4 Opérations sur les fonctions continues	574
1.5 Théorème des valeurs intermédiaires	574
1.6 Image continue d'un segment	577
2 Dérivabilité	578
2.1 Définition, exemples	578
2.2 Opérations sur les dérivées	580
2.3 Dérivées d'ordre n	582
2.4 Sens de variation et extrema	584
2.5 Théorème de Rolle, accroissements finis	585
2.6 Dérivée de la réciproque	588
3 Étude d'une fonction	589
3.1 Définition et variations	589
3.2 Branches infinies	590
EXERCICES	592
IV.3 Fonctions transcendentes	597
1 Fonctions logarithme et exponentielle	598
1.1 Logarithme népérien	598
1.2 Exponentielle	600
1.3 Représentation graphique des fonctions logarithme népérien et exponentielle	601
1.4 Logarithmes et exponentielles de base quelconque	601
2 Fonctions racines et puissances	602
2.1 Fonctions racines	602

2.2	Fonctions puissances	603
2.3	Croissances comparées des fonctions puissances, logarithme et exponentielle	605
3	Fonctions trigonométriques	606
3.1	Fonctions sinus et cosinus	606
3.2	Fonctions tangente et arc-tangente	607
3.3	Arc-sinus et arc-cosinus	609
4	Trigonométrie hyperbolique	611
4.1	Sinus et cosinus hyperboliques	611
4.2	Réciproques des fonctions hyperboliques	613
5	Dérivées des fonctions usuelles	616
	EXERCICES	616
IV.4	Séries numériques	621
1	Convergence d'une série	621
1.1	Définitions	621
1.2	Premiers résultats	626
2	Séries à termes réels positifs	629
2.1	Convergence par comparaison	629
2.2	Utilisation d'une intégrale	632
2.3	Application : développement d'un réel positif	636
3	Séries à termes réels ou complexes	638
3.1	Convergence absolue	638
3.2	Séries alternées	640
	EXERCICES	644
IV.5	Introduction à l'intégration	649
1	Intégrale des fonctions en escalier	650
1.1	Subdivision d'un segment	650
1.2	Fonctions en escalier	651
1.3	Intégrale d'une fonction en escalier	652
1.4	Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier	653
2	Fonctions continues par morceaux	654
2.1	Définition, exemples	654
2.2	Approximation des fonctions continues par morceaux	656
2.3	Intégrale d'une fonction continue par morceaux	657
3	Propriétés de l'intégrale	659
3.1	Linéarité, relation de Chasles	659
3.2	Inégalités	660
3.3	Cas des fonctions continues	662
3.4	Sommes de Riemann	664
4	Intégration et dérivation, calcul des intégrales	666
4.1	Fonctions continues par morceaux sur un intervalle	666
4.2	Le théorème fondamental de l'analyse	668
5	Calcul effectif d'intégrales	670
5.1	Intégration par parties	671
5.2	Changement de variable	673
5.3	Quel changement de variable choisir?	675
5.4	Intégration des fractions rationnelles	679
	EXERCICES	682