

l'intégrale

MPSI | MP | PSI

FORMULAIRE

D. FREDON, L. PORCHERON,
M. DÉCOMBE VASSET, D. MAGLOIRE

Le Formulaire MPSI–MP–PSI

**CONFORME
AU NOUVEAU
PROGRAMME**

Toutes les formules
du programme

Mathématiques

Physique

Chimie

DUNOD

l'intégrale

MPSI - MP - PSI

FORMULAIRE

DANIEL **FREDON**

LIONEL **PORCHERON**

MAGALI **DÉCOMBE VASSET**

DIDIER **MAGLOIRE**

Le Formulaire MPSI - MP - PSI

DUNOD

Conception et création de couverture : Atelier 3+

Collaboration technique : Thomas Fredon, ingénieur Télécom Bretagne

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation des

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2014

5 rue Laromiguière, 75005 Paris

ISBN 978-2-10-071223-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos	8
Mathématiques	9
1. Analyse	9
1.1 Les nombres réels	9
1.2 Continuité	9
1.3 Dérivation	10
1.4 Suites numériques	12
1.5 Intégration	13
1.6 Développements limités	17
1.7 Équations différentielles	19
1.8 Espaces vectoriels normés	23
1.9 Séries numériques	26
1.10 Suites et séries de fonctions	29
1.11 Calcul différentiel	33
2. Algèbre générale	35
2.1 Ensembles et applications	35
2.2 Relations	36
2.3 Calculs algébriques	37
2.4 Nombres complexes	38
2.5 Structures algébriques	39
2.6 Arithmétique	43
2.7 Polynômes	46
3. Algèbre linéaire et multilinéaire	49
3.1 Espaces vectoriels	49
3.2 Applications linéaires	53
3.3 Matrices, déterminants	55
3.4 Réduction des endomorphismes	58
3.5 Espaces vectoriels euclidiens	60

4. Calcul des probabilités	65
4.1 Événements et probabilités	65
4.2 Variables aléatoires	68
Physique	74
1. Étude du signal	74
1.1 Oscillateur harmonique non amorti (ressort horizontal)	74
1.2 Propagation du signal	75
1.3 Circuits électriques	78
2. Électronique	87
2.1 Stabilité des systèmes linéaires (PSI)	87
2.2 L'amplificateur linéaire intégré et la rétroaction (PSI)	88
2.3 L'A.L.I. et la réaction positive (PSI)	91
2.4 Les oscillateurs (PSI)	94
2.5 L'échantillonnage	96
2.6 Filtrage numérique du signal	97
2.7 Introduction à la transmission des signaux	99
3. Optique	101
3.1 Optique géométrique	101
3.2 Modèle scalaire des ondes lumineuses (MP)	103
3.3 Déphasage et chemin optique (MP)	105
3.4 Les sources lumineuses (MP)	106
3.5 Les détecteurs de lumière (MP)	108
3.6 Superpositions d'ondes lumineuses (MP)	109
3.7 Interférences(MP)	111
4. Mécanique	112
4.1 Cinématique d'un point	112
4.2 Cinématique d'un solide	115
4.3 Dynamique du point - étude énergétique	116
4.4 Dynamique de particules chargées	120
4.5 Dynamique du solide - étude énergétique	121
4.6 Mouvement dans un champ de force centrale conservative	124
4.7 Référentiels non galiléens - cinématique (MP)	127
4.8 Référentiels non galiléens - dynamique (MP)	129
4.9 Lois de Coulomb du frottement solide (MP)	131
5. Mécanique des fluides (PSI)	132

5.1 Fluides en écoulement	132
5.2 Écoulement incompressible et homogène	133
5.3 Bilans macroscopiques	136
6. Thermodynamique	137
6.1 Description d'un système à l'équilibre	137
6.2 Changement d'état d'un corps pur	138
6.3 Travail, transfert thermique et transformations	140
6.4 Premier et second principes	141
6.5 Machines thermiques	143
6.6 Systèmes ouverts	145
7. Statique des fluides	147
8. Électromagnétisme	150
8.1 Action d'un champ magnétique	150
8.2 Induction, auto-induction et couplage	151
8.3 Conversion de puissance électromécanique	153
8.4 Conservation de la charge électrique	154
8.5 Distributions de charge et champ électrostatique	157
8.6 Équations de Maxwell dans le vide	160
8.7 Propriétés du champ électrostatique	160
8.8 Champs électrostatiques de distributions particulières	163
8.9 Analogie pour le champ de gravitation	165
8.10 Dipôles électriques (MP)	167
8.11 Champs magnétostatiques	169
8.12 Dipôles magnétiques	173
8.13 L'approximation des régimes quasi-stationnaires	175
9. Milieux ferro-magnétiques (PSI)	177
9.1 Description	177
9.2 Circuits magnétiques	179
10. Ondes électromagnétiques	181
10.1 Les équations de propagation des champs	181
10.2 Énergie du champ électromagnétique	182
10.3 Le champ électromagnétique dans le vide sans charges ni courants électriques	183
10.4 Propagation du champ électromagnétique dans un plasma	184
10.5 Champ électromagnétique dans le plasma	186
10.6 Propagation du champ électromagnétique en présence d'un milieu conducteur ohmique	188

6 Table des matières

11. Ondes mécaniques (PSI)	191
11.1 Ondes sur les cordes	191
11.2 Ondes acoustiques	192
12. Mécanique quantique (MP)	195
13. Éléments de physique statistique (MP)	200
13.1 Le facteur de Boltzmann	200
13.2 Statistique sur le système	202
13.3 Équipartition de l'énergie	203
14. Conversions de puissances (PSI)	205
14.1 Conversion statique	205
14.2 Conversion électro-mécanique	208
Chimie	213
1. Thermodynamique	213
1.1 États de la matière	213
1.2 Description d'un système physico-chimique	215
1.3 Étude thermodynamique d'une transformation	217
1.4 Diagrammes binaires solide-liquide (PSI)	219
1.5 Application du premier principe à la transformation chimique	221
1.6 Application du second principe à la transformation chimique	222
2. Cinétique	226
2.1 Cinétique formelle	226
2.2 Mécanismes réactionnels	229
3. Architecture de la matière	230
3.1 Classification périodique des éléments	230
3.2 Édifices chimiques	233
4. État solide	236
4.1 Modèle du cristal parfait	236
4.2 Types de cristaux	238
5. Solutions aqueuses	239
5.1 Réaction d'oxydo-réduction	239
5.2 Réaction acido-basique	242

5.3 Réaction de complexion	243
5.4 Réaction de précipitation	245
5.5 Diagrammes potentiel-pH	246
6. Électrochimie	246
6.1 Courbes intensité - potentiel	246
6.2 Corrosion	247
6.3 Conversion et stockage d'énergie	249
Annexe A : Unités et constantes fondamentales	250
1. Unités du système international	250
2. Constantes fondamentales	251
3. Ordres de grandeur	252
Annexe B : Classification périodique	253
Annexe C : Constantes chimiques	256
1. Potentiels standards redox	256
2. Constantes acido-basiques	257
3. Zone de virage des principaux indicateurs colorés	258
Annexe D : Champs scalaires - champs vectoriels	259
1. Coordonnées cartésiennes	259
2. Propriétés	259
3. Coordonnées cylindriques	260
4. Coordonnées sphériques	260
Index des mathématiques	262
Index de la physique	265
Index de la chimie	270

Avant-propos

Ce nouveau formulaire reprend la présentation et les objectifs des anciens formulaires conçus par Lionel Porcheron. Mais il a été entièrement réécrit pour s'adapter aux nouveaux programmes, avec des auteurs nouveaux, et donc des choix nouveaux.

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de MPSI, puis de MP ou PSI. Pour chaque item, vous trouverez :

- la mention ❶ ou ❷ qui indique si c'est une notion de première année ou de deuxième année ;
- parfois la mention **MP** ou **PSI** pour indiquer une notion réservée à une seule section.

Le livre est scindé en trois parties : mathématiques, physique, chimie. Dans chaque partie, vous trouverez l'essentiel du cours, les principaux résultats étant mis en valeur par un support tramé.

À la fin un index très détaillé vous permettra d'accéder très vite à la notion que vous voulez réviser.

Des annexes font le bilan d'informations essentielles et parfois dispersées dans votre cours.

Ne vous trompez pas dans l'offre Dunod. Vous trouverez des livres de cours et d'exercices pour renforcer votre travail de classe.

Pour des révisions structurées, les Tout-en-fiches par classes (MPSI, MP, PSI) comportent l'essentiel du cours et quelques exercices d'entraînement.

Ce livre est un outil pédagogique adapté aux révisions rapides avant un devoir. C'est aussi un puissant remède contre l'anxiété du trou de mémoire. C'est en quelque sorte un anxiolytique sans risque sanitaire. Mais vous risquez l'accoutumance : quand vous aurez commencé à vous servir de ce livre, vous ne pourrez plus vous en passer, surtout à l'approche des concours (qui portent sur les deux années de prépa n'oubliez pas).

Un grand merci à Thomas Fredon, soutien technique indispensable à l'existence de ce livre et à Matthieu Daniel pour la réalisation finale.

Daniel FREDON

daniel.fredon@laposte.net

Mathématiques

1. Analyse

1.1 Les nombres réels

① Parties denses dans \mathbb{R}

Une partie A est dense dans \mathbb{R} si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Une partie A est dense dans \mathbb{R} si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A .

① Borne supérieure

La borne supérieure de A est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A .

$M = \sup A$ si :

$$\forall x \in A \quad x \leq M,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x.$$

1.2 Continuité

① Continuité : définition

f est continue en a si elle est définie en a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

① Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue, pour tout y tel que $f(a) < y < f(b)$, il existe c tel que $y = f(c)$.

En particulier, si une fonction f est continue sur $[a, b]$, et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

① Continuité sur un segment

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

1.3 Dérivation

① Dérivée en un point

Soit f une fonction définie sur D et x_0 un élément de D tel que f soit définie au voisinage de x_0 . On appelle dérivée de f au point x_0 le nombre (lorsqu'il existe) :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

① Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n ($n \neq 0$)	nx^{n-1}	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	e^x	e^x	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

① Dérivée d'une fonction réciproque

La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

f est strictement monotone sur I , dérivable en $f(x_0)$ et $f'(x_0) \neq 0$.

① Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

1 Égalité des accroissements finis

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Ce théorème ne se prolonge pas aux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

1 Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Si $m \leq f' \leq M$, alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

En particulier, si $|f'| \leq K$, alors, pour tous x et x' de $]a, b[$,

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|.$$

1 Limite de la dérivée

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et si f' a une limite finie l en a , alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = l$.

Attention, il s'agit d'une condition suffisante de dérivabilité, mais elle n'est pas nécessaire. Il peut arriver que $f'_d(a)$ existe sans que f' ait une limite en a .

2 MP Fonction convexe

f est convexe sur I :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

$$x_1, \dots, x_n \in I$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Le graphique de toute fonction convexe est au-dessous de chacune de ses cordes.

2 MP Fonction convexe dérivable

Si f est deux fois dérivable sur I :

$$f \text{ convexe} \iff f'' \geq 0$$

Le graphique de toute fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes.

2 MP Inégalités dues à la convexité

$$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \quad p > 0, q > 0 \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Si $p = q = 2$, il s'agit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Inégalité de Minkowski

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^n b_i^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

1.4 Suites numériques

1 Suite convergente

La suite (u_n) est convergente vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0$$

$$|u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.

1 Théorème d'encadrement

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq x_n \leq v_n$ et si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l , alors la suite (x_n) est convergente vers l .

1 Suite extraite

La suite (v_n) est extraite de la suite (u_n) s'il existe une application φ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , strictement croissante, telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$.

On dit aussi que (v_n) est une sous-suite de (u_n) .

Si une suite possède une limite (finie ou infinie), toute sous-suite possède la même limite.

1 Théorème de la limite monotone

Toute suite de réels croissante et majorée est convergente.

Toute suite de réels décroissante et minorée est convergente.

Si une suite est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.

Si une suite est décroissante et non minorée, elle diverge vers $-\infty$.

1 Suites adjacentes

(u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

(u_n) est croissante ;

(v_n) est décroissante ;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

Variante

Si (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $u_n \leq v_n$ pour tout n , alors elles convergent vers l_1 et l_2 . Il reste à montrer que $l_1 = l_2$ pour qu'elles soient adjacentes.

1.5 Intégration**1 Valeur absolue**

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

1 Intégrales et ordre

• Si $a < b$, et si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors : $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

• Si f est continue et positive sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \iff \forall x \in [a, b] \quad f(x) = 0.$$

1 Inégalité de la moyenne

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \times \int_a^b |g(x)| dx.$$

1 Sommes de Riemann

Si f est continue sur $[a; b]$, à valeurs dans \mathbb{R} , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Les sommes de Riemann, dont on considère la limite, sont des sommes d'aires de rectangles.

1 Intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_a^b u'(t) v(t) dt \\ = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt. \end{aligned}$$

u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I , et a et b des réels de I .

1 Intégration par changement de variable

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x) dx.$$

u de classe C^1 de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$, et f continue sur $[a, b]$.

1 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I , x_0 et x des points de I . On a :

$$f(x) = P_n(x) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt,$$

$$\text{où } P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

est l'approximation de Taylor à l'ordre n ;

$$\text{et } R_n(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \text{ est le reste intégral d'ordre } n.$$

2 Fonction intégrable

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt \text{ existe}$$

$$\left| \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ converge} \right.$$

$$\int_a^{+\infty} |f(t)| dt \text{ converge}$$

 f intégrable sur $[a, +\infty[$

$$\int_a^b |f(t)| dt \text{ converge}$$

 f intégrable sur $[a, b]$

② Règles d'intégrabilité (fonctions positives)

• Comparaison

Supposons $0 \leq f \leq g$ sur $[a, +\infty[$.

- Si g est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.
- Si f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

• Domination

Si $f(x) = O(g(x))$, l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f .

• équivalence

Si $f(x) \sim g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ équivaut à celle de f .

② Situations de référence

- Pour $a > 0$, $\frac{1}{x^\alpha}$ intégrable sur $[a, +\infty[\iff \alpha > 1$.
- Pour $\alpha > 0$, $e^{-\alpha x}$ intégrable sur $[0, +\infty[$.
- $\frac{1}{x^\alpha}$ intégrable sur $]0, a] \iff \alpha < 1$.
- $\ln x$ intégrable sur $]0, 1]$.

② Théorème de convergence dominée

(f_n) fonctions à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , continues par morceaux sur I .

(f_n) converge simplement sur I vers f continue par morceaux sur I ,

il existe une fonction g continue par morceaux sur I , positive et intégrable sur I , telle que pour tout entier n , on ait $|f_n| \leq g$ (hypothèse de domination),

\implies les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n.$$

② Théorème de sommation L^1

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur I , telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

$\Rightarrow f$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n.$$

② Intégrales à paramètre (existence et continuité)

On considère A une partie d'un espace normé de dimension finie,

I un intervalle de \mathbb{R} ,

f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans \mathbb{K} .

On suppose que f est continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde.

On suppose également qu'il existe une fonction φ , intégrable sur I , à valeurs dans \mathbb{R}^+ , telle que, pour tout x de A , on ait $|f(x, \cdot)| \leq \varphi$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in A \quad \forall t \in I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction $x \mapsto g(x) = \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur A .

② Intégrales à paramètre (dérivabilité)

Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur $J \times I$. On suppose :

– f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable,

– pour tout x de J , $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I ,

– $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $J \times I$, continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde,

– il existe une fonction φ intégrable sur I , à valeurs dans \mathbb{R}^+ telle que, pour

tout x de J , $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) \right| \leq \varphi$.