А. Н. ПУЧКО
О. Д. ЖУКОВ-ЕМЕЛЬЯНОВ
И. С. КСЕНОФОНТОВ

Электронные цифровые вычислительные машины

А. Н. ПУЧКО,
О. Д. ЖУКОВ-ЕМЕЛЬЯНОВ,
И. С. КСЕНОФОНТОВ

Электронные цифровые вычислительные машины

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для учащихся средних специальных учебных заведений

МОСКВА «МАШИНОСТРОЕНИЕ» 1979

ББК 32.972
П88
УДК 681.3

Рецензенты
канд. техн. наук **Э. Ш. Гайфуллин, К. А. Нешумова**

Пучко А. Н. и др.

П88 Электронные цифровые вычислительные машины: Учебник для средних специальных учебных заведений/А. Н. Пучко, О. Д. Жуков-Емельянов, И. С. Ксенофонтов. — М.: Машиностроение, 1979. — 328 с., ил.

В пер.: 1 р. 10 к.

П $\frac{30502\text{-}043}{038(01)\text{-}79}$ 43-79 2405000000

ББК 32.972
6Ф7.3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является учебником по курсу «Электронные цифровые вычислительные машины» для учащихся средних специальных учебных заведений по специальности № 0612 «Электронные вычислительные машины, приборы и устройства».

Материал изложен в предположении, что учащийся знаком с основами электротехники, радиотехники, электроники и импульсной техники.

В последние годы в вычислительной технике произошли существенные изменения. Появившаяся Единая система электронных вычислительных машин (ЕС ЭВМ) определила новый этап решения технических и экономических задач в условиях научно-технической революции. Созданная благодаря совместным усилиям специалистов Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, СССР и Чехословакии ЕС ЭВМ спроектирована как ряд совместимых вычислительных машин, построенных по агрегатному методу. Агрегатные устройства в свою очередь выполнены из стандартных блоков, узлов, элементов, что обеспечивает однородность и преемственность технических решений в ряде ЭВМ. Основой агрегатного построения моделей и технических средств ЕС ЭВМ является стандартизация системы интерфейсов. Такой метод создания ЭЦВМ позволяет проводить усовершенствование любых устройств с последующим вводом их в действующие ЭЦВМ, что способствует предотвращению их морального устаревания. Изложение материала начинается с арифметических и логических основ ЭЦВМ. Затем рассматриваются типовые элементы и узлы, применяющиеся в вычислительной технике.

Показаны общие принципы построения электронных цифровых вычислительных машин, а также отдельных устройств, входящих в состав ЭЦВМ. Материал подобран с учетом достижений в ЕС ЭВМ.

Предисловие, введение и гл. 3, 5, 9, 10, 11 написаны А. Н. Пучко; § 5, 6, гл. 2, гл. 6, 7 и § 6, 7 гл. 8 — И. С. Ксенофонтовым; гл. 1, 4, § 1—4 гл. 2 и § 1—5 гл. 8 — О. Д. Жуковым-Емельяновым.

ВВЕДЕНИЕ

Вычислительная техника — это совокупность технических и математических средств, методов и приемов, используемых для облегчения и ускорения решения трудоемких задач, связанных с обработкой информации, в частности числовой, путем частичной или полной автоматизации вычислительного процесса. Устройство или совокупность устройств, предназначенных для механизации и автоматизации процесса обработки информации (вычислений), называется вычислительной машиной. Первые примитивные устройства для механизации вычислений появились за сотни лет до н. э. и использовались для исчисления времени, производства торговых расчетов, определения площадей земельных участков и т. д. Такие вычислительные устройства, как, например, логарифмическая линейка, были известны еще в XVII в. В настоящее время вычислительные машин подразделяются на три класса:

1) аналоговые вычислительные машины, в которых информация представлена в виде непрерывно изменяющихся переменных, выраженных физическими величинами (угол поворота вала, сила электрического тока, напряжение и т. д.);

2) цифровые вычислительные машины, в которых информация представлена в виде дискретных значений переменных (чисел), выраженных комбинацией дискретных значений какой-либо физической величины;

3) гибридные вычислительные системы, в различных узлах которых информация представлена тем или иным способом.

Исторически первыми появились цифровые вычислительные устройства. Идею создания универсальной цифровой вычислительной машины, представлявшей собой гигантский арифмометр с программным управлением, арифметическим и запоминающими устройствами, разработал английский ученый Чарльз Беббидж в 1883 г. Однако полностью осуществить свой проект ему не удалось.

Первая цифровая вычислительная машина с программным управлением на электромагнитных реле «Марк-1» была построена в США в 1944 г., а первая электронная вычислительная машина «ЭНИАК» была построена также в США в 1946 г. Применение электронных вычислительных машин, производивших вычисления с большой скоростью, расширило круг решаемых задач за счет выполнения, например, таких вычислений, которые ранее были невыполнимы, так как требуемое для этого время превышало продолжительность человеческой жизни. В СССР электронная вычислительная машина (ЭЦВМ) была разработана в 1950 г. под руководством академика С. А. Лебедева. В последующие годы созданы различные по производительности и техническому решению ЭЦВМ (БЭСМ, «Стрела», М-20, «Минск», «Урал», «Мир» и другие, в том числе ЕС ЭВМ).

Развитие ЭВМ тесно связано с развитием электронной техники. Первые ЭЦВМ были ламповыми. Эти вычислительные машины принято называть машинами первого поколения. Однако уже через несколько лет развитие полупроводниковой техники позволило перейти к конструированию вычислительных машин второго поколения (1955—1965 гг.). Высокая надежность полупроводниковых приборов (средняя наработка на отказ 10^6 ч) позволила резко увеличить количество оборудования в машине. В результате этого возрастают операционные возможности и увеличивается предельная производительность ЭЦВМ.

В начале 60-х годов была разработана технология производства интегральных схем, позволяющая получить в едином технологическом процессе схемы, состоящие из десятков и сотен компонентов. С момента освоения интегральных микросхем, содержащих в одном модуле большое количество транзисторов, резисторов и диодов, начинается третье поколение ЭЦВМ. Переход к производству ЭЦВМ на интегральных схемах потребовал почти полного пересмотра технологии производства ЭЦВМ. Средствами интегральной технологии комплексно решались задачи увеличения надежности, уменьшения стоимости и габаритных размеров схем, благодаря чему были созданы предпосылки для создания сложных цифровых систем, количество оборудования в которых может в десятки раз превосходить оборудование, используемое в машинах второго поколения. В нашей стране первыми ЭЦВМ третьего поколения являются машины Единой Системы (ЕС ЭВМ).

На смену обычным интегральным схемам приходят большие интегральные схемы (БИС). В одном корпусе БИС предполагается реализовать уже не отдельные функциональные схемы, а целые узлы, блоки и даже устройства ЭЦВМ.

Внедрение БИС может не только существенно улучшить характеристики ЭЦВМ, но и полностью изменить процесс проектирования машин.

Глава 1

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ И ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЦВМ

§ 1. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ЭЦВМ

Общие сведения о системах счисления. Совокупность приемов и правил изображения чисел с помощью цифровых знаков называется системой счисления. Системы счисления делятся на два типа: позиционные и непозиционные.

В позиционных системах счисления значение каждой цифры зависит от ее места (позиции) в ряду цифр, изображающих число. Общепринятая десятичная система счисления является позиционной. Например, в числе 1936 первая цифра слева означает количество тысяч, вторая — количество сотен, третья — количество десятков, четвертая — количество единиц.

Непозиционные системы счисления возникли раньше систем счисления позиционного типа. Так, непозиционными системами еще в древности пользовались римляне, египтяне, славяне и другие народы. Это объясняется чрезвычайной простотой принципов построения таких систем.

Разновидностью непозиционной системы счисления, дошедшей и до наших дней, является римская система счисления. Цифры в римской системе обозначаются различными знаками:

1 — I; 5 — V;

10 — X; 50 — L.

100 — C; 500 — D.

1000 — M.

Для записи промежуточных чисел существует правило: каждый меньший знак, поставленный справа от большего, прибавляется к его значению, а слева — вычитается из него. Так, IV обозначает 4, VII — 7, LX — 60, XC — 90 и т. д.

В римской системе счисления приходится предварительно подумать, каким образом целесообразнее составить число из цифр, так как приходится осуществлять сложение и вычитание их значений. Например, число 967 записывают CMLXII.

Основной недостаток непозиционных систем — большое число различных знаков и сложность выполнения арифметических операций.

Позиционные системы счисления оказались значительно удобнее для вычислительных операций. В каждой позиционной системе счисления для записи чисел используют ограниченное количество знаков — цифр, определяющее наименование системы и называемое ее основанием.

В ЭЦВМ каждому из этих знаков соответствует одно определенное состояние некоторого физического элемента. В целом же все число, представляющее собой совокупность этих знаков, изображается либо в виде совокупности одновременно существующих различных состояний нескольких элементов (параллельный способ представления чисел в ЭЦВМ), либо в виде последовательно сменяющих друг друга во времени состояний одного и того же элемента (последовательный способ представления чисел в ЭЦВМ).

В десятичной системе счисления для записи любого числа используют десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Число десять, являющееся основанием системы счисления, изображают двумя цифрами 10.

Всякое другое число в десятичной системе счисления изображается последовательностью цифр, разделенной запятой на две части: целую и дробную. Цифры целой части справа налево обозначают соответственно количество единиц, десятков, сотен, тысяч и т. д., т. е. неотрицательных целых степеней десяти, содержащихся в этом числе. Цифры дробной части слева направо обозначают соответственно количество десятых, сотых и т. д. долей единицы (т. е. отрицательных целых степеней десяти), содержащихся в числе. Так, например, последовательность цифр 3639,65 представляет собой сокращенную запись выражения

$$3\cdot 1000+6\cdot 100+3\cdot 10+9\cdot 1+6\cdot 0{,}1+5\cdot 0{,}01$$

или, что одно и то же,

$$3\cdot 10^3+6\cdot 10^2+3\cdot 10^1+9\cdot 10^0+6\cdot 10^{-1}+5\cdot 10^{-2}.$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$\sum_{i=2}^{3} a_i\cdot 10^i,$$

где $a_{-2}=5$; $a_{-1}=6$; $a_0=9$; $a_1=3$; $a_2=6$; $a_3=3$.

Позиции, в которые записывают цифры целой и дробной части числа, называют разрядами этого числа. Номер (местоположение) каждого разряда числа определяется показателем степени основания, стоящей при цифре данного разряда.

В приведенном выше примере представления десятичного числа 3639,65 номер разряда тысяч (10^3) определяется показателем 3, номер разряда сотен (10^2) — показателем 2 и т. д.

В общем случае любая позиционная система счисления представляет числа в виде последовательности цифр при степенях основания q^i, т. е.

$$\sum_{i=-m}^{n} a_n q^n + a_{n-1}q^{n-1} + \cdots + a_1 q^1 + a_0 q^0 + a_{-1}q^{-1} + \cdots a_{-m}q^{-m},$$

где q — основание системы (q — целое положительное); a_i — количество единиц i-го разряда числа, причем $a_i < q$.

Десятичная система счисления не является единственной позиционной системой записи чисел.

Название системы счисления происходит от того числа, которое принято за основание системы. Самой простой позиционной системой является двоичная система счисления, так как она использует для записи чисел всего две цифры 0 и 1. Основание системы — 2 записывается как $10 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$. Все числа в двоичной системе записываются последовательностями цифр 0 и 1.

Например, число 324 в двоичной системе счисления имеет вид

$$101\,000\,100 = 1 \cdot 10^{1000} + 0 \cdot 10^{111} + 1 \cdot 10^{110} + 0 \cdot 10^{101} + 0 \cdot 10^{100} +$$
$$+ 0 \cdot 10^{11} + 1 \cdot 10^{10} + 0 \cdot 10^{01} + 0 \cdot 10^{0}.$$

Здесь основание и степени записаны также в двоичной системе. Если заменим их запись привычными десятичными цифрами, то убедимся, что приведенная запись соответствует десятичному числу 324

$$1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 +$$
$$+ 0 \cdot 2^0 = 256 + 64 + 4 = 324.$$

Число в двоичной системе записывают последовательностью двоичных цифр (0 или 1), каждая из которых равна множителю при степенях основания 2.

В троичной системе счисления используют три цифры, например 0, 1 и 2, для представления чисел; основание системы — 3 записывается как $10 = 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0$.

Например, число 159 в троичной системе счисления * имеет вид

$$12\,220_3 = 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = 159_{10}.$$

В вычислительной технике получили распространение такие позиционные системы счисления, как четверичная, восьмеричная и шестнадцатиричная соответственно с основаниями 4, 8 и 16.

В системе с основанием 4 используют цифры 0, 1, 2, 3; в восьмеричной системе — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, а в шестнадцатиричной системе обычно применяют следующие цифры и буквы: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, где A, B, C, D, E, F, 5 означают соответственно цифры 10, 11, 12, 13, 14, 15.

---

* В случае необходимости основание системы счисления пишут справа, внизу от числа, записанного в этой системе счисления.

Число 159 в этих системах счисления соответственно будет иметь вид

$$2\,133_4 = 2\cdot4^3 + 1\cdot4^2 + 3\cdot4^1 + 3\cdot4^0 = 159_{10};$$

$$237_8 = 2\cdot8^2 + 3\cdot8^1 + 7\cdot8^0 = 159_{10};$$

$$9_{16} = 9\cdot16^1 + 15\cdot16^0 = 159_{10}.$$

Из приведенного примера записи числа 159 в различных системах счисления видно, что с ростом основания системы необходимо меньшее количество цифр для обозначения одного и того же числа, т. е. запись числа укорачивается.

Системы счисления для ЭЦВМ. В подавляющем большинстве в ЭЦВМ используют двоичные или двоично-кодированные системы счисления. Широкое распространение этих систем обусловлено тем, что элементы цифровых машин могут находиться лишь в одном из двух состояний: электронная лампа и полупроводниковый прибор (транзистор) могут проводить или не проводить ток, ферритовый сердечник может быть намагниченным или размагниченным и т. п. Такие элементы принято называть двухпозиционными.

Если одно из устойчивых положений элемента принять за 0, а другое за 1, то достаточно просто получить разряды двоичного числа. Арифметические операции над двоичными числами отличаются простотой и легкостью технического выполнения.

В двоично-кодированных системах счисления, имеющих основания q, отличные от 2 ($q > 2$), каждая цифра числа представляется в двоичной системе счисления.

В ЭЦВМ получили распространение такие системы данного типа, как двоично-кодированные восьмеричная, шестнадцатиричная и десятичная системы счисления.

Восьмеричная система счисления применяется как вспомогательная система при подготовке задачи к решению (при программировании). Удобство ее состоит в том, что восьмеричная запись числа в 3 раза короче двоичной, а перевод из восьмеричной системы в двоичную и наоборот несложен и выполняется чисто механическим путем. Это легко проверить на следующих примерах. Пусть дано восьмеричное число 137, 45. После замены каждой восьмеричной цифры равным ей трехзначным двоичным числом (триадой)

1	3	7	,	4	5
001	011	111	,	100	101

получим представление восьмеричного числа в двоичной системе: $137{,}45_8 = 001011111{,}100101_2$. И, наоборот, заменив в двоичном числе каждую тройку двоичных цифр слева и справа от запятой равной восьмеричной цифрой, получим восьмеричное число.

Если в крайней слева или справа тройке окажется меньше трех двоичных цифр, то эти тройки дополняют до полных нулями.

В вычислительной технике нашла применение так называемая двоично-десятичная система счисления. В ней используются для ввода и вывода привычные для нас десятичные числа.

Числа в двоично-десятичной системе записывают очень просто. Каждую цифру десятичного числа (от 0 до 9) заменяют четырехразрядным двоичным числом (тетрадой).

Например, десятичное число 2373,95 может быть записано в двоично-десятичной системе счисления следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 3 & 7 & 3 & , & 9 & 5 \\ 0010 & 0011 & 0111 & 0011 & , & 1001 & 0101 \end{array}$$

Следовательно, $2373{,}95_{10} = 0010\ 0011\ 0111\ 0011,\ 1001\ 0101_{2\text{-}10}$ *.

Двоично-десятичную запись используют как промежуточную форму записи между обычной десятичной и машинной двоичной.

Сама машина по специальной программе переводит двоично-десятичные числа в двоичные и обратно. При этом десятичное (или двоично-десятичное) число сначала переводят в восьмеричное, а затем уже восьмеричное в двоичное. Это объясняется более быстрым преобразованием десятичных чисел в восьмеричные, чем сразу в двоичные, и последующим простым переходом от восьмеричных чисел к двоичным.

Для перевода десятичного числа в восьмеричное необходимо целую часть числа разделить на новое основание 8. Полученный от деления первый остаток является младшей цифрой целой части восьмеричного числа. Целую часть снова делим на 8. В результате получим второй остаток, равный следующей, после младшей, цифре восьмеричного числа, и так до тех пор, пока не получим частное меньше делителя. Последнее частное дает старшую цифру.

Для перевода дробной части десятичного числа в восьмеричную систему дробь умножают на новое основание 8. Целая часть полученного произведения является старшим разрядом дробной части восьмеричного числа. Затем снова умножаем дробную часть произведения на 8 для нахождения следующей цифры дробной части восьмеричного числа, и так до тех пор, пока не определим все цифры знаков после запятой в восьмеричной системе.

П р и м е р. Число 191,644 перевести в восьмеричную систему.

Сначала преобразуем целую часть (191) числа в восьмеричную систему

$$\begin{array}{r|l} 191 & 2 \\ -\ 16 & \overline{23} \\ \hline 31 & \begin{array}{r|l} -16 & 8 \\ \hline \boxed{7} & \boxed{2} \end{array} \\ -24 & \\ \hline \boxed{7} & \end{array}$$

* Индекс 2—10 означает двоично-десятичное число.

Следовательно, $191_{10} = 277_8$.

Затем преобразуем дробную часть (0,644)

$$\begin{array}{c|r} 0, & \times\begin{array}{r}644\\8\end{array} \\ \hline 5 & \times\begin{array}{r}152\\8\end{array} \\ \hline \downarrow 1 & 216 \end{array}$$

Следовательно, $0{,}644_{10} = 0{,}51_8$.

Тогда в целом

$$191{,}644_{10} = 277{,}51_8.$$

Восьмеричное число, как было показано выше, очень просто перевести в двоичное

2	7	7,	5	1
001	111	111,	101	001

или $191{,}644_{10} = 277{,}51_8 = 001\ 111\ 111\ ,\ 101\ 001_2$.

Для перевода числа из двоичной системы в десятичную можно сложить все степени двойки, соответствующие позициям разрядов исходного двоичного числа, в которых цифры равны 1.

Пример. Перевести двоичное число 1101001 в десятичное. Для этого представим исходное число в виде

$$\begin{array}{lccccccc} 1\,101\,001_2 = & 1\cdot 2^6 + & 1\cdot 2^5 + & 0\cdot 2^4 + & 1\cdot 2^3 + & 0\cdot 2^2 + & 0\cdot 2^1 + & 1\cdot 2^0. \\ & 64 & 32 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

В правой части равенства записана сумма произведений каждой цифры числа на соответствующую разряду (позиции) этой цифры степень двойки. Подсчитанная в десятичной системе сумма и определит десятичное число, т. е. $64 + 32 + 8 + 1 = 105_{10}$.

Кодирование алфавитно-цифровой информации. Наряду со способностью ЭЦВМ выполнять арифметические операции над числами, во многих случаях необходимо, чтобы машина умела хранить и обрабатывать информацию смешанного, т. е. текстового типа, включающую не только цифровую, но также и буквенную информацию. Полную совокупность символов, выбранную для представления информации, называют набором символов или алфавитом. Поэтому наряду с термином буквенно-цифровая используют термин алфавитно-цифровая информация, который относится и к цифрам, и к буквам, и к специальным символам.

Каждый символ алфавита кодируется определенной совокупностью двоичных разрядов, или, как их часто называют, битов. Для наиболее распространенных алфавитов количество двоичных разрядов, необходимое для представления символов, равно 6, 7 и 8. Такая совокупность двоичных разрядов является минимальной единицей информации. В отечественных ЕС ЭЦВМ используют в качестве единицы информации байт, состоящей из восьми двоичных информационных разрядов и одного контрольного разряда.

ЭЦВМ *обрабатывает буквенно-цифровую информацию* специальными командами последовательно по одному байту либо по группам байтов.

§ 2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ В ЭЦВМ

Типы чисел. В ЭЦВМ для представления чисел используют двоичные элементы, каждый из которых соответствует одному двоичному разряду. В соответствии с этим вся информация, которая поступает в машину и обрабатывается в ней в процессе вычислений, кодируется двоичными символами — цифровым двоичным кодом. Количество разрядов чисел, с которыми оперирует машина, определяет разрядную сетку машины. Чем больше число разрядов, тем сложнее машина, но тем выше диапазон и точность представления чисел. Разрядная сетка универсальных ЭЦВМ содержит обычно 32 и больше двоичных разрядов.

В специализированных машинах узкого назначения число разрядов может быть всего 16—20. Обычно такие машины решают узкий класс задач (или одну задачу).

Различают две формы представления чисел, т. е. их цифровых кодов:

естественную, или с фиксированной запятой;

нормальную, или с плавающей запятой (полулогарифмическая).

По этой причине ЭЦВМ делят на машины с фиксированной или плавающей запятой.

Кодирование чисел с фиксированной запятой. В машинах, оперирующих числами с фиксированной запятой, положение запятой, отделяющей целую часть числа от дробной, фиксируется между определенными разрядами числа и сохраняется неизменным при всех вычислениях для всех чисел.

Количество разрядов, отводимое для целой и дробной части, устанавливают при конструировании машины. Обычно запятая фиксируется перед старшим (первым) разрядом двоичного цифрового кода числа. При таком представлении числа, которыми оперирует машина, по абсолютной величине будут меньше единицы

$$|A| < 1, \qquad (1)$$

где A — машинное изображение числа (машинное число), например, 0,1101.

Такое дробное представление чисел было принято для того, чтобы в результате умножения двух и более чисел в машине их произведение не вышло за диапазон чисел, меньших единицы.

Однако реальные исходные числа, промежуточные и конечные результаты вычислений обычно изменяются в широком диапазоне, выходящем за пределы единицы. Поэтому при подготовке задачи для решения на машине с фиксированной запятой приходится вводить масштабный коэффициент, который выбирается таким образом, чтобы для вводимых и получаемых в процессе вычислений чисел соблюдалось неравенство (1).

Масштабный коэффициент M связывает реальное (истинное) число B и его машинное изображение (код) A следующим соотношением:

$$|A| = M|B| < 1.$$

При очень малых масштабных коэффициентах реальное число явно сдвигается в сторону младших разрядов, где велика вероят-

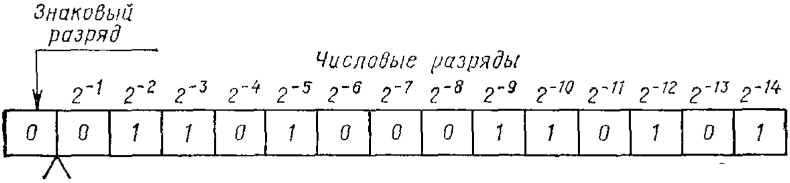

Рис. 1. Форма записи в разрядной сетке машины чисел с фиксированной после знакового разряда запятой

ность ошибок от округления, т. е. потеря точности. Поэтому масштабный коэффициент следует брать допустимо максимальным.

На рис. 1 приведена пятнадцатиразрядная сетка машины, оперирующей числами с фиксированной запятой. Разряд, стоящий слева от запятой, определяет знак числа и называется знаковым разрядом. Знаку плюс соответствует нуль в этом разряде, а знаку минус — единица. Например, 0,0101 является машинным изображением положительного числа, а 1,10101 — отрицательного числа.

Количество разрядов в разрядной сетке ЭЦВМ полностью определяет диапазон и точность представления чисел. Очевидно, максимальное машинное число по абсолютной величине (т. е. без учета знака) равно

$$|A|_{\max} = ,\overbrace{0111\ldots1}^{n} = 1 - 2^{-n},$$

где n — количество числовых разрядов.

Минимальное отличное от нуля машинное число равно

$$|A|_{\min} = \overbrace{0,00\ldots0,1}^{n} = 2^{-n}.$$

Следовательно, диапазон чисел всех возможных величин в данном случае определяется неравенством

$$2^{-n} \leqslant |A| \leqslant 1 - 2^{-n}. \qquad (2)$$

Числа, большие чем $1-2^{-n}$, не могут быть представлены в ЭЦВМ с фиксированной запятой, так как требуют дополнительных разрядов слева от запятой. Если число выходит за верхний предел неравенства (2), то все разряды, принадлежащие его целой части, не могут быть фиксированы в машине (теряются), что приводит к полному искажению величины числа. Происходит так называемое переполнение разрядной сетки слева. Масштабирование чисел, о котором говорилось выше, вводится для того, чтобы не допустить подобных случаев.

Числа, меньшие чем 2^{-n}, также не могут быть представлены в машине, так как они требуют дополнительных разрядов справа от самого младшего машинного разряда. Это так называемые машинные нули, т. е. числа, не равные нулю, но изображаемые в машине нулем из-за нехватки количества разрядов для представления дробной части числа.

Потеря младших разрядов справа снижает точность записи числа. При потере разрядов справа необходимо для повышения точности вычислений производить округление числа.

Кодирование чисел с плавающей запятой. Нормализованные числа. В цифровых вычислительных машинах с плавающей запятой числа изображаются в виде

$$A = q^p M, \qquad (3)$$

где q — основание системы счисления; p — целое число (порядок); M — дробное число, т. е. $|M| < 1$.

Число p называется порядком машинного числа A, а M — мантиссой числа A. Поскольку в большинстве машин используется двоичная система счисления, то для этих машин выражение (3) примет вид

$$A = 2^p M.$$

Порядок p — вместе со знаком порядка указывает истинное положение запятой в числе A.

Например, для четырех различных чисел с одинаковыми мантиссами получим следующие четыре представления их в форме с плавающей запятой:

$$+101\,001,111 = 2^6 \cdot 0{,}101\,001\,111,$$

$$+101,001\,111 = 2^3 \cdot 0{,}101\,001\,111,$$

$$+0,101\,001\,111 = 2^0 \cdot 0{,}101\,001\,111,$$

$$+0{,}00\,101\,001\,111 = 2^{-2} \cdot 0{,}101\,001\,111.$$

В левых частях приведенных равенств стоят истинные числа в двоичном коде, а в правых частях — их представления в форме с плавающей запятой. Из правых частей равенств видно, что все четыре числа имеют одинаковые мантиссы. Однако вследствие различных порядков для этих чисел положение запятой в них различно. Таким образом, с помощью задания порядка можно изменять истинное положение запятой в числе. Отсюда и название «плавающая запятая».

Обычно ЭЦВМ с плавающей запятой оперируют с так называемыми нормализованными числами.

Число называется нормализованным, если в старшем (первом после запятой) разряде его мантиссы цифра отлична от нуля. При двоичном кодировании чисел эта цифра может быть равна только единице. Поскольку первому разряду после запятой соответствует степень двойки $2^{-1} = \frac{1}{2}$, то для мантиссы нормализованного числа справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \leqslant |M| < 1. \qquad (4)$$

1	0	1	0	0	1	1	1
2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}

а)

0	0	1	0	1	0	0	1

б)

Рис. 2. Потеря младших разрядов при записи ненормализованного числа в восьмиразрядной сетке:

а — нормализованное число; *б* — ненормализованное число

Верхний предел неравенства (4) означает, что мантисса должна быть правильной дробью, т. е. меньше единицы. Это связано с удобством выполнения операции умножения (произведение двух дробных мантисс также будет меньше единицы, т. е. оно автоматически не выйдет за верхний предел неравенства (4). Ограничение мантиссы по величине снизу связано с тем, что при этом уменьшаются потери точности представления чисел и вычислений. Например, рассмотрим две записи числа 41, 75 в двоичной системе в форме с плавающей запятой:

$$101001{,}11 = 2^6 \cdot 0{,}10100111,$$

$$101001{,}11 = 2^8 \cdot 0{,}0010100111.$$

Сравнивая, заметим, что их порядки и мантиссы различные. Допустим теперь, что для мантиссы в машине отведено восемь разрядов. Тогда мантисса первой записи полностью разместится в этих разрядах, в то время как в мантиссе второй записи будут потеряны две цифры самых младших разрядов из-за отсутствия двух соответствующих им машинных разрядов (рис. 2).

Первая запись относится к нормализованному числу (первая цифра после запятой равна 1), вторая запись — к ненормализованному числу. Из сравнения двух записей одного числа видно, что при изображении в машине нормализованных чисел разряды, отведенные для мантиссы, используются полностью, а при изображении ненормализованных чисел — не полностью. Таким образом, при операциях над нормализованными числами наиболее полно используется разрядная сетка и исключается потеря младших разрядов из-за недостаточности машинных разрядов и ошибок от округления.

Операция приведения числа к нормализованному виду называется нормализацией. Нормализация осуществляется сдвигом