応用数学

一橋大学名誉教授
青山学院大学教授　山田欽一著

数学基本講座 III

春秋社

応用数学

山田欽一著

数学基本講座 III

春秋社

応用数学　＜数学基本講座Ⅲ＞　　¥ 650

1966年 9 月30日　第 1 刷発行

やまだきんいち
著者　© 山田欽一　北多摩郡小平市学園西町1611　TEL 0423-41-4171

発行者　野口兵蔵　東京都千代田区外神田 2 の18の 6　TEL 255-9611(代)

印刷所　日月印刷株式会社　東京都千代田区飯田町 1 の18

発行所　株式会社 春秋社　東京都千代田区外神田 2 の18の 6

TEL 255-9611(代)　振替口座東京　24861

NDC 410　(篠崎製本)　落丁・乱丁本はお取替えいたします.

はしがき

この巻は第1巻，第2巻に続いて，数学を社会科学，とくに経済学，経営学に応用することを学ぶ人々のために編んだものである．

はじめに，数学各分野の公式や定理のうち引用，活用されることの多いものを選んで掲げる．いちいち第1巻，第2巻を参照する労を省くためである．続いて，数学のいろいろな概念や思考形式が経済学，経営学でどのように活用されるかを明らかにし，それにもとづいて経済学，経営学の量的問題のなかから，小さくはあるが大切なものを選び，数学応用の初歩を説く．最後に，必要ならば数学的項目を補強した上で，やや体系的な，また組織的な問題の解明処理に数学の技術を応用することを説明する．数学の応用とは，他の学問の問題を数式で表わすことから始めて，計算による解明までを意味すると考えたからである．

Cournotが経済学の立論に数学を活用してから1世紀と4分の 1，Harrisが在庫問題に数学を使ってからおよそ50年になるが，自然科学の刺激と要求のなかで生まれ，育った数学を社会科学に応用するについては，まだいろいろの問題と困難が双方の側にある．だがそれは応用を試みながら解決してゆけばよいことであると考える．経済学，経営学以外の社会科学への応用はほど遠いことであると思うが，行列を使った通信網，有限集合算を使った投票結託などは社会学，政治学への応用の第一歩といえるのではなかろうか．

なお，日本では単行書の少ないブール代数の応用を加えた．この代数は古く“質の代数”と呼ばれたりしたが，今日の数学は量の科学でもないし，質の科学でもない．まったく抽象的な記号を対象とする形式科学である．そこに数学の広い応用性がある．新しい数学の新しい応用に関心ある人々に役立てば幸である．

確率，計量経済学に触れなかったのは，いずれ統計学の巻が書かれるからである．また経営学への応用の不十分さは，OR の巻によって体系的に補われる

ことを願っている．

それにしても著者の不敏と偏好による誤謬と不備の多いことを恐れ，江湖諸兄の批判と叱正を願って止まない．

本書を編むにあたり，造本と校正について，春秋社の水吉，三輪両氏からは多大の助力を頂いた．ここに記して深く感謝の意を表わしたい．

1966年9月

著　　者

目　　次

I　座標幾何

II　代　　数

III　線型計画

Ⅳ 推移行列

Ⅴ 微積分法

Ⅵ 静態模型

Ⅶ 関数方程式と動態模型

Ⅷ　Boole 代数

I　座 標 幾 何

§ 1　座標幾何の公式

平面幾何

1　2点間の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と点 $(x_2,\ y_2)$ との距離

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

2　2点間を定比に分ける点

点 $(x_1,\ y_1)$ と点 $(x_2,\ y_2)$ の間を $m:n$ に分ける点

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

3　座標軸に平行な直線

y 軸に平行　$x=a$

x 軸に平行　$y=b$

4　y 切片が b, 傾き m の直線

$$y=mx+b$$

5　x 切片が a, y 切片が b である直線

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

6　2定点を通る直線

点 (x_1,y_1) と点 (x_2,y_2) を通る直線

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

7　2直線の平行と直交

m, m' を傾きとする2直線が

平行である条件 $m=m'$

直交する条件 $mm'=-1$

8 2直線の交点を通る直線

直線 $ax+by=c$ と直線 $px+qy=r$ の交点を通る直線

$$l(ax+by-c)+m(px+qy-r)=0$$

9 座標の平行移動

原点を (a,b) に平行移動したとき，ある点の旧座標を (x,y)，新座標を (X,Y)とすれば

$$X=x-a, \quad Y=y-b$$

10 円

点 (a,b) を中心とする半径 r の円

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

11 円の接線

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (p,q) で引いた接線

$$px+qy=r^2$$

12 楕円

点 $(\pm\sqrt{a^2-b^2},0)$ を焦点として，長軸の長さ $2a$，短軸の長さ $2b$ である楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

13 楕円の接線

楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 (p,q) で引いた接線

$$\frac{p}{a^2}x+\frac{q}{b^2}y=1$$

14 双曲線

点 $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ を焦点として，交軸の長さ $2a$，共役軸の長さ $2b$ である双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

15 双曲線の接線

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 (p,q) で引いた接線

$$\frac{p}{a^2}x-\frac{q}{b^2}y=1$$

16 放物線

点 $(a,0)$ を焦点とし，$x+a=0$ を準線とする放物線

$$y^2=4ax$$

17 放物線の接線

放物線 $y^2=4ax$ 上の点 (p,q) で引いた接線

$$qy=2a(x+p)$$

立体幾何を紙面で活用することは事実上無理であるから，立体座標幾何の応用は例示しないが，高次元空間へのよい緒口となるので基本公式のいくつかを掲げておく，

立体幾何

18 2点間の距離

点 (x_1,y_1,z_1) と点 (x_2,y_2,z_2) との距離

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

19 2点間を定比に分ける点

点 (x_1,y_1,z_1) と点 (x_2,y_2,z_2) の間を $m:n$ に分ける点

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n},\ \frac{nz_1+mz_2}{m+n}\right)$$

20 点 (a,b,c) を通り，方向余弦が l,m,n である直線

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

21 2直線の平行と直交

(l,m,n)，(l',m',n') を方向余弦とする2直線が

平行である条件 $\dfrac{l}{l'}=\dfrac{m}{m'}=\dfrac{n}{n'}$

垂直である条件 $ll'+mm'+nn'=0$

22 原点から下した垂線の方向余弦が l,m,n，その長さが p である平面

$$lx+my+nz=p$$

23 直線と平面の平行，垂直

方向余弦 (l,m,n) の直線と方向余弦 (l',m',n') の平面が

平行である条件 $ll'+mm'+nn'=0$

垂直である条件 $\dfrac{l}{l'}=\dfrac{m}{m'}=\dfrac{n}{n'}$

24　2次曲面

楕円面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
一葉双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
二葉双曲面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
楕円放物面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$
双曲放物面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$
錐　　面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
柱　　面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
	$y^2=4ax$

§2　座標幾何の応用

未知数または変数が2つある問題は平面座標幾何の問題に直すことができるので，その説明や解決に平面図形を使うことができる．

たとえば，予算 M（円）で価格 p（円）の財を x，価格 q（円）の財を y だけ購入するとすれば

$$px+qy=M \tag{1}$$

が成り立つ．

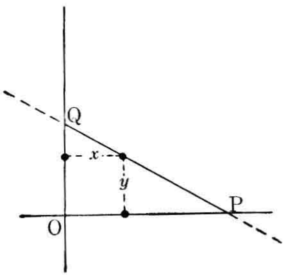

図　1

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ であるから，いろいろの予算配分は，直線（1）の第1象限にある部分 PQ 上の点の座標 (x,y) で表わされる．

この線分を**予算線**といい，**消費均衡**（予算の最適配分）の理論で大切である．

未知数または変数が3つある問題は立体座標幾何の問題として処理することができる．

たとえば，予算 M(円)で，価格それぞれ p(円)，

q (円)，r (円) の財を x, y, z だけ購入するとすれば

$$px+qy+rz=M \tag{2}$$

が成り立つ.

$x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $z\geqq 0$ であるから，いろいろの予算配分は平面 (2) の正象限にある部分 PQR 上の点の座標 (x, y, z) で表わされる.

この三角形 PQR (周と内部) は 3 財消費均衡の理論で大切な**予算平面**である.

与件 (価格，予算など) の一つが変わるとき，均衡量 (最適配分など) がどう変わるかは大切な問題である. この種の問題を考察するには，定数記号として使った文字をあらためて変数とみる. このような変数を**助変数 (パラメーター)** という.

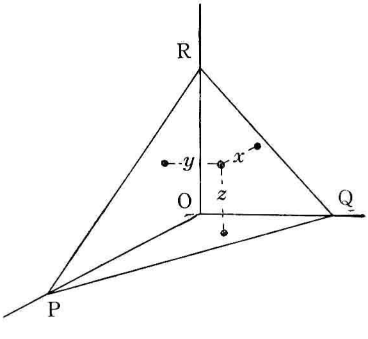

図 2

たとえば 2 財消費で予算Mが増せば，(1) で

$$\mathrm{OP}=\frac{M}{p} \qquad \mathrm{OQ}=\frac{M}{q}$$

によって，OP と OQ が増す. しかし，(1) の傾きは $-\dfrac{p}{q}$ であって変わらない. したがって，予算の増加は予算線が平行移動してOから遠ざかることにあたる.

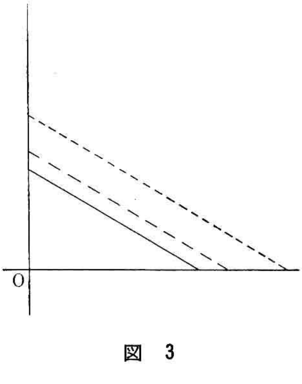

図 3

また，たとえば 3 財消費で，第 1 財の価格 p が増せば，(2) で

$$\mathrm{OP}=\frac{M}{p} \qquad \mathrm{OQ}=\frac{M}{q} \qquad \mathrm{OR}=\frac{M}{r}$$

によって，OQ と OR は変わらず，OP だけが減る. したがって，第 1 財の価格上昇は予算平面が QR を固定してOに近づくことにあたる.

一般に，問題となる諸量についての方程式を曲線，曲面またはその一部で表わし，助変数の変化がこれらをどう動かすかを考えて，もとの問題を解明することになる.

その方法を次の**模型 (モデル)** について，例示する.

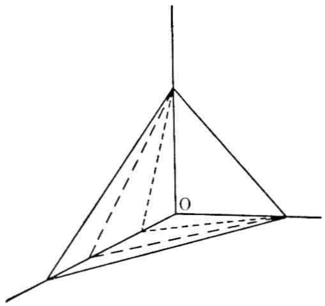

図　4

1　需要者分布　同種の商品を2つの企業が2つの都市で生産供給する．販売価格の決定原則にもとづいて需要者の分布領域を定める．

2　操業計画　2つの炭坑からとれる石炭の品質構成，各質石炭の需要量，各坑の操業費にもとづいて最適操業計画を立てる．

1次連立不等式を満たす非負未知数の値で1次式の値を最小にする，**線型計画**の問題である．

3　時間配分　広告放送依頼者の注文と引承け放送局の提示する条件とにもとづいて，放送時間の最適配分を決定する．

1次連立不等式を満たす非負未知数の値で1次分数式の値を最小にする，**分数計画**の問題である．

4　生産計画　生産条件，手持要因，需要法則にもとづいて，2財生産の最適計画を立てる．

1次連立不等式を満たす非負未知数の値で2次式の値を最大にする，**2次計画**の問題である．

5　出店計画　競争関係にある2つの店が季節即売店を同時期に出してきた．最近数年の顧客調査にもとづいて，最適出店計画を立てる．

相手はこちらの得点（顧客吸収率）がなるべく小さくなるように計画を立てるだろう．そこで，こちらはその得点がなるべく大きくなるような計画を立てよう．この考え方で処理する**競争計画**の問題である．

立体座標幾何を使うことは，紙面では無理があるので例示しなかったが，原理的には立体模型になるだけで，まったく同じである．

変数が4つ以上の場合については，ベクトル，行列，多元関数の微積分などを使うことになるので，後の章で解説する．しかし，平面座標幾何による処理はそのときへのよい示唆となる．

§3　需 要 者 分 布

同種の商品を甲はAで，乙はBで製造し，2人とも製造原価に輸送費を加えて販売

価格を定めている．甲では製造原価 p 円であり，輸送費は直線距離 1 km あたり r 円である．乙ではそれぞれ q 円，s 円である．

A, B を通る直線を x 軸にとり，線分 AB の垂直二等分線を y 軸にとる．A の座標を $(a,\ 0)$ とすれば，B の座標は $(-a,\ 0)$ である．

地点 $(x,\ y)$ の人が甲から買えば，価格は

$$p+r\sqrt{(x-a)^2+y^2} \quad \text{円}$$

であり，乙から買えば，価格は

$$q+s\sqrt{(x+a)^2+y^2} \quad \text{円}$$

である．

したがって，どちらから買っても相違のない地点が描く曲線の方程式は

$$p+r\sqrt{(x-a)^2+y^2}=q+s\sqrt{(x+a)^2+y^2} \tag{1}$$

であり，これが甲の需要者と乙の需要者とを分ける境界線ともなる．

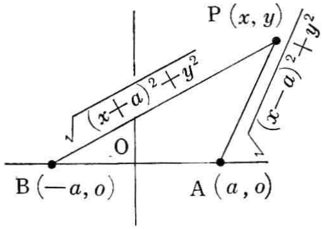

図　5

簡単な 2 つの場合について，境界線の形状を明らかにしておく．

i　$p=q,\ \ r=s$ のとき

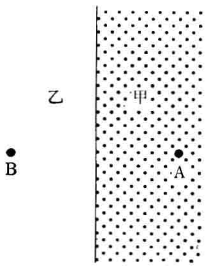

図　6

このとき，(1) は

$$x=0$$

となって，境界線は y 軸であって，甲の需要者は $x>0$ の側に分布し，乙の需要者は $x<0$ の側に分布する．

ii　$p>q,\ \ r=s$ のとき

$$2u=\frac{p-q}{r}(>0)$$

とおいて，(1) は

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}-\sqrt{(x-a)^2+y^2}=2u \tag{2}$$

となる．これは

$$\mathrm{PB}-\mathrm{PA}=2u$$

であり

$$\mathrm{AB}=2a$$

と比べて　$a>u$　(3)

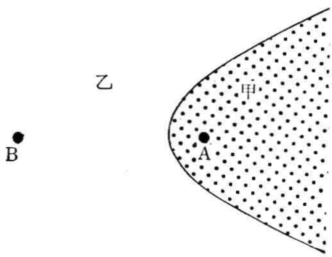

図　7

を得る．

(2) から

$$ax=u\sqrt{(x-a)^2+y^2}+u^2 \tag{4}$$

$a>0$, $u>0$ によって

$$x>0 \tag{5}$$

(4) から

$$\frac{x^2}{u^2}-\frac{y^2}{a^2-u^2}=1$$

これは (3) によって，双曲線であり，

$$u^2+(a^2-u^2)=a^2$$

によって，AとBがその焦点となる．(5) によって，双曲線の一分枝が境界線となる．

§4 操 業 計 画

ある炭坑で甲坑1操業から上炭5トン，中炭2トン，下炭3トンがとれる．乙坑ではそれぞれ2トン，6トン，5トンである．需要量は上炭が190トン，中炭が228トン，下炭が285トンである．操業費が，1操業あたり甲坑では5万円，乙坑では4万円であるとして，最適操業計画を立てよ．

甲坑を x 操業，乙坑を y 操業すれば，上炭が $5x+2y$ トンとれる．これが190トン以上でなくてはならない．すなわち x, y は

$$5x+2y\geqq 190 \tag{1}$$

を満たさなくてはならない．

中炭，下炭の需要量から x, y は

$$2x+6y\geqq 228 \tag{2}$$

$$3x+5y\geqq 285 \tag{3}$$

を満たさなくてはならない．もちろん

$$x\geqq 0,\quad y\geqq 0 \tag{4}$$

である．

(1) と (4) を満たす点 (x, y) は図8の図形 YABX 上になくてはならない．(2) と (4) を満たす点 (x, y) は図形 YCDX 上に，(3) と (4) を満たす点 (x, y) は図

形 YEFX 上になくてはならない.

したがって，上の需要を満たす操業を示す点 $(x,\ y)$ は図 9 の図形 YAPQDX 上にある.

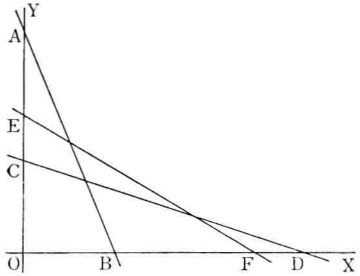

図 8

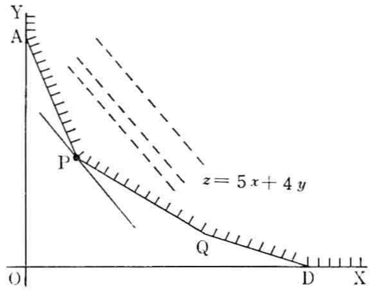

図 9

また，甲坑を x 操業，乙坑を y 操業するときの費用は

$$z=5x+4y \quad (\text{単位}10,000\text{円}) \tag{5}$$

である.

したがって図形 YAPQDX 上で z が最小となる点を求めれば，それが最適操業計画を示すことになる.

それには (5) に平行で，図形 YAPQDX を切り，最もOに近いものを定めて，この図形を切る点の座標を求めればよい. それは図 9 によって点Pである. PはABとEFの交点であるから

$$\begin{cases} 5x+2y=190 \\ 3x+5y=285 \end{cases}$$

を解いて

$$x=20, \qquad y=45$$

を得，甲坑20操業，乙45操業が最適計画となる.

§5 時 間 配 分

甲社は放送会社とアトラクション映画を含む20分間の広告放送を契約する. 放送会社はコマーシャルが10分以下であることを望み，映画フィルムはどれも上映時間 8 分以上である. 甲社としては映画がコマーシャルより 5 分以上長くては困るし，コマー