ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Е. Б. ДЫНКИН

ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

ФИЗМАТГИЗ 1959

Дынкин Евгений Борисович

Основания теории марковских процессов.

Редактор *А. А. Юшкевич.*
Техн. редактор *К. Ф. Брудно.*
Корректор *Л. Е. Андрианова.*

Сдано в набор 15/XII 1958 г. Подписано к печати 27/VI 1959 г. Бумага 84×103/32. Физ. печ л. 7,125. Условн. печ. л. 11,69. Уч. изд. л. 11,31. Тираж 5000 экз. Т-07517. Цена книги 7 р. 65 к. Заказ № 23.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОС
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТ

Е. Б. ДЫНКИН

ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

11-5-4

АННОТАЦИЯ

Быстрое развитие теории марковских процессов в последние годы потребовало критического пересмотра оснований теории. Стала очевидной необходимость рассматривать марковский процесс не как случайную функцию с некоторыми специфическими свойствами, а как целый набор связанных друг с другом случайных функций, соответствующих всевозможным начальным условиям, а также необходимость изучения процессов, обрывающихся в случайный момент времени. Возник ряд новых понятий, в частности, понятие строго марковского процесса, в котором принцип отсутствия последействия понимается шире, чем обычно; понятие подпроцесса данного процесса и т. д.

В книге впервые в мировой математической литературе дается систематическое построение общей теории марковских процессов со включением всего этого комплекса вопросов. Исследуются также свойства ограниченности и (в том или ином смысле) непрерывности траекторий марковского процесса.

Книгу можно рекомендовать студентам старших курсов, аспирантам и научным работникам-математикам, специализирующимся по теории вероятностей и смежным дисциплинам.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава 1. **Введение** 9

§ 1. Измеримые пространства и измеримые отображения 9
§ 2. Меры и интегралы 15
§ 3. Условные вероятности и математические ожидания 18
§ 4. Топологические измеримые пространства 25
§ 5. Построение вероятностных мер 30

Глава 2. **Марковские процессы** 34
§ 1. Определение марковского процесса 34
§ 2. Однородные марковские процессы 44
§ 3. Эквивалентные марковские процессы 51

Глава 3. **Подпроцессы** 63

§ 1. Определение подпроцессов. Связь между подпроцессами и мультипликативными функционалами . . 63
§ 2. Подпроцессы, соответствующие допустимым подмножествам. Образование части процесса 79
§ 3. Подпроцессы, соответствующие допустимым системам подмножеств 84
§ 4. Мультипликативные функционалы интегрального типа и соответствующие им подпроцессы 91
§ 5. Однородные подпроцессы однородных марковских процессов 94

Глава 4. **Построение марковских процессов по переходным функциям** 108

§ 1. Определение и примеры переходных функций . . . 108
§ 2. Построение марковских процессов по переходным функциям 111
§ 3. Однородные переходные функции и соответствующие однородные марковские процессы 113

Глава 5. **Строго марковские процессы** 116

§ 1. Случайные величины, не зависящие от будущего и s-прошлого. Леммы об измеримости 116

§ 2. Определение строго марковского процесса 121
§ 3. Однородные строго марковские процессы 132
§ 4. Ослабление формы условия строгой марковости для марковских процессов, непрерывных справа . . 137
§ 5. Строго марковское свойство подпроцессов 141
§ 6. Критерии строгой марковости 148

Глава 6. **Условия ограниченности и непрерывности марковского процесса** 157

§ 1. Введение 157
§ 2. Условия ограниченности 161
§ 3. Условия непрерывности справа и отсутствия разрывов второго рода 165
§ 4. Скачкообразные и ступенчатые процессы 174
§ 5. Условия непрерывности 176
§ 6. Одна теорема непрерывности для строго марковских процессов 183
§ 7. Примеры 186

Добавление. **Теорема о продолжении емкостей и свойства измеримости моментов первого выхода** . . . 190

§ 1. Теорема о продолжении емкостей 190
§ 2. Теоремы измеримости для моментов первого выхода 200

Приложение 212
Литература 219
Алфавитный указатель 221
Указатель лемм и теорем 224
Указатель обозначений 225

Светлой памяти
моей матери
посвящаю эту книгу.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель этой книги — исследование логических оснований теории марковских случайных процессов.

Теория марковских процессов за последние годы быстро развивалась. Были изучены свойства траекторий таких процессов и их инфинитезимальные операторы, были обнаружены глубокие связи между поведением траекторий и свойствами соответствующих процессу дифференциальных уравнений, связи, полезные не только для изучения марковских процессов, но и для изучения дифференциальных уравнений. Накопленный при этом материал потребовал критического пересмотра оснований теории. В частности, была обнаружена недостаточность обычной формулировки марковского принципа «отсутствия последействия» и разными авторами были предложены различные формы более сильного принципа «строгой марковости». Стало очевидным, что естественным объектом изучения должны служить марковские процессы, обрывающиеся в случайный момент времени. Все эти и другие понятия вводились разными авторами в различной форме, приспособленной к конкретным целям каждой специальной работы. При этом рассматривались почти исключительно одни только однородные (по времени) марковские процессы.

В предлагаемой книге строится общая теория, охватывающая и неоднородные процессы. Однородные процессы рассматриваются как важный специальный случай. Известно, что с помощью искусственного приема, требующего перехода к более сложному фазовому пространству, можно сводить неоднородные марковские процессы к однородным *). Однако получающиеся при этом однородные процессы являются в некотором смысле вырожденными, и поэтому такое сведение далеко не всегда целесообразно. К тому же по существу общее понятие марковского процесса является более первоначальным, чем понятие однородного марковского процесса. Для однородных марковских процессов имеется каноническая временна́я шкала. Для общих процессов такой шкалы нет и все определения должны быть инвариантны относительно любого монотонного непрерывного преобразования времени.

Распространенная точка зрения на марковский процесс как на случайную функцию специального вида является недостаточной для развитой теории.

Действительно, при изучении марковских процессов обычно имеют дело не с одной вероятностной мерой, а с целым набором таких мер, соответствующих всевозможным начальным моментам времени и всевозможным начальным состояниям; стало быть, имеют дело не с одной случайной функцией, а с целым набором таких функций, определенным образом связанных друг с другом. Это одна из причин, по которым теория марковских процессов должна обладать известной автономией по отношению к общей теории вероятностных процессов. В настоящей книге теория марковских процессов строится без каких бы то ни было ссылок на общую теорию вероятностных процессов.

Книга не может служить учебником для первоначального знакомства с теорией марковских процессов. Хотя формально мы и не опираемся ни на какие предварительные знания из теории вероятностей, но по существу чтение книги может

---

*) См. § 3 главы 4.

принести пользу лишь читателю, который уже знаком с элементарным изложением теории марковских процессов, например, по учебнику В. Феллера «Введение в теорию вероятностей и ее приложения», т. 1, или по «Курсу теории вероятностей» Б. В. Гнеденко.

Краткий обзор необходимых понятий и теорем из теории меры содержится в первой вводной главе. Доказательства, которые можно найти в учебниках, при этом опускаются. Во второй главе дается общее определение марковского процесса и исследуются операции, позволяющие обозреть класс марковских процессов, соответствующих данной переходной функции. Более сложная операция образования подпроцесса исследуется в главе 3. Обнаруживается связь между подпроцессами марковского процесса и мультипликативными функционалами от его траектории. Исследуются важнейшие классы мультипликативных функционалов и подпроцессов. Глава 4 посвящена построению марковских процессов по переходным функциям. В главе 5 исследуется понятие строго марковского процесса. Наконец, глава 6 посвящена исследованию условий на переходную функцию, при которых среди марковских процессов, соответствующих этой функции, найдется процесс, все траектории которого обладают тем или иным свойством непрерывности или ограниченности. В добавлении излагаются некоторые результаты Шоке по общей теории емкостей, и из этих результатов выводятся теоремы измеримости для моментов первого выхода. Исторические и библиографические указания выделены в специальное приложение, помещенное в конце книги.

К настоящей книге тесно примыкает подготовляемая к печати монография «Инфинитезимальные операторы марковских процессов», которая посвящена задаче классификации марковских процессов. Обе книги следует рассматривать как две части единой монографии по теории марковских процессов.

Материал, составивший содержание книги, излагался автором в ряде докладов и специальных курсов в Московском и Пекинском университетах. Автор признателен слушателям за ряд замечаний, которые были им учтены при окончательном редактировании рукописи.

Рукопись была внимательно прочтена А. А. Юшкевичем. Его критика способствовала устранению ряда неточностей и неясностей. Считаю своим приятным долгом поблагодарить его за проделанную им большую работу.

4 июля 1958 г. *Е. Б. Дынкин*

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Измеримые пространства и измеримые отображения

1.1. Пусть $\mathcal{M}$ — система подмножеств некоторого множества Ω, удовлетворяющая следующим условиям:

1.1. A_1. Если $A \in \mathcal{M}$, то $\bar{A} \in \mathcal{M}$ *).

1.1. A_2. Если $A_i \in \mathcal{M}$ $(i=1, 2, \ldots)$, то $\bigcup_1^\infty A_i \in \mathcal{M}$ и $\bigcap_1^\infty A_i \in \mathcal{M}$.

Тогда мы говорим, что система подмножеств $\mathcal{M}$ является *σ-алгеброй в пространстве* Ω. Пусть $\mathcal{C}$ — какая-нибудь система подмножеств Ω. Пересечение всех σ-алгебр в пространстве Ω, содержащих $\mathcal{C}$, также является σ-алгеброй. Мы называем ее *σ-алгеброй, порожденной* $\mathcal{C}$, и обозначаем $\sigma(\mathcal{C})$.

Если $\mathcal{M}$ является σ-алгеброй в пространстве Ω и $\tilde{\Omega} \in \mathcal{M}$, то совокупность всех множеств $A \in \mathcal{M}$, содержащихся в $\tilde{\Omega}$, образует σ-алгебру в пространстве $\tilde{\Omega}$. Мы будем обозначать эту σ-алгебру через $\mathcal{M}[\tilde{\Omega}]$.

Систему подмножеств $\mathcal{C}$ пространства Ω мы будем называть *π-системой*, если:

1.1. $Б_1$. Из $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ следует, что $A_1A_2 \in \mathcal{C}$ **).

---

*) Через $\bar{A}$ обозначается дополнение A в Ω, т. е. $\Omega \setminus A$.

**) Пересечение множеств A и B мы будем обозначать чаще всего через AB. Иногда будут употребляться также обозначения $A \cap B$ и $\{A, B\}$.

Систему $\mathscr{F}$ мы будем называть λ-*системой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1.1. B_1. $\Omega \in \mathscr{F}$.

1.1. B_2. Если $A_1, A_2 \in \mathscr{F}$ и $A_1A_2 = \emptyset$ *), то $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{F}$.

1.1. B_3. Если $A_1, A_2 \in \mathscr{F}$ и $A_1 \supseteq A_2$, то $A_1 \setminus A_2 \in \mathscr{F}$.

1.1. B_4. Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{F}$ и $A_n \uparrow A$ **), то $A \in \mathscr{F}$.

Заметим, что если некоторая система множеств $\mathscr{M}$ является одновременно π-системой и λ-системой, то она является σ-алгеброй. В самом деле, из 1.1. B_1 и 1.1. B_3 следует 1.1. A_1. Далее, из соотношения $A \cup B = A \cup (B \setminus AB)$ и свойств 1.1. $Б_1$, 1.1. B_3 и 1.1. B_2 вытекает, что если $A, B \in \mathscr{M}$, то $A \cup B = A \cup (B \setminus AB) \in \mathscr{M}$, и следовательно, если $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{M}$, то $\bigcup\limits_1^n A_i \in \mathscr{M}$. Пусть теперь $A_n \in \mathscr{M}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $A_n' = \bigcup\limits_1^n A_k \in \mathscr{M}$, и поскольку $A_n' \uparrow \bigcup\limits_1^\infty A_n$, то в силу 1.1. B_4 $\bigcup\limits_1^\infty A_n \in \mathscr{M}$. Из соотношения

$$\bigcap_1^\infty A_n = \overline{\bigcup_1^\infty \overline{A}_n}$$

вытекает, что $\bigcap\limits_1^\infty A_n \in \mathscr{M}$. Таким образом, выполнено условие 1.1. A_2.

Л е м м а 1.1. *Если λ-система $\mathscr{F}$ содержит π-систему $\mathscr{C}$, то $\mathscr{F}$ содержит $\sigma(\mathscr{C})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пересечение $\mathscr{F}'$ всех λ-систем, содержащих π-систему $\mathscr{C}$, очевидно, является λ-системой. Докажем, что это пересечение является в то же время π-системой. Отсюда будет следовать утверждение леммы.

Совокупность $\mathscr{F}_1$ всех множеств A, таких, что $AB \in \mathscr{F}'$ для всех $B \in \mathscr{C}$, является, как легко видеть, λ-системой.

---

*) Символом $\emptyset$ обозначается пустое множество.

**) Запись $A_n \uparrow A$ означает, что $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^\infty A_n$. Аналогично запись $A_n \downarrow A$ означает, что $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$ и $A = \bigcap\limits_1^\infty A_n$.

Поскольку $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{C}$, то $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}'$. Это значит, что если $A \in \mathcal{F}'$, $B \in \mathcal{C}$, то $AB \in \mathcal{F}'$.

Положим теперь $B \in \mathcal{F}_2$, если $BA \in \mathcal{F}'$ для всех $A \in \mathcal{F}'$. Легко видеть, что $\mathcal{F}_2$ есть λ-система. По доказанному $\mathcal{F}_2 \supseteq \mathcal{C}$. Следовательно, $\mathcal{F}_2 \supseteq \mathcal{F}'$. Это значит, что если A, $B \in \mathcal{F}'$, то $AB \in \mathcal{F}'$. Следовательно, $\mathcal{F}'$ является π-системой.

1.2. Пару $(\Omega, \mathcal{A})$, состоящую из некоторого множества Ω и σ-алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств этого множества, называют *измеримым пространством.*

Важным примером измеримого пространства является пространство $\left(I_t^s, \mathcal{B}_t^s\right)$, где $I_t^s = [s, t]$ — отрезок числовой прямой, а $\mathcal{B}_t^s$ — σ-алгебра подмножеств этого отрезка, порожденная всеми интервалами, содержащимися в I_t^s. Для s и t допускаются и бесконечные значения, причем мы полагаем $I_{+\infty}^{-\infty} = (-\infty, +\infty)$, $I_t^{-\infty} = (-\infty, t)$, $I_{+\infty}^s = [s, +\infty)$.

Пусть $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ — два измеримых пространства. Отображение α пространства Ω_1 в Ω_2 называется *измеримым*, если полный прообраз любого множества из $\mathcal{A}_2$ принадлежит $\mathcal{A}_1$. Это определение применимо и в том случае, когда отображение определено лишь на подмножестве $\tilde{\Omega}_1 \subset \Omega$.

Отметим, что если $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_2$, то для измеримости отображения α достаточно, чтобы принадлежал к $\mathcal{A}_1$ полный прообраз любого множества из $\mathcal{C}$ и чтобы $\Omega_2 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, где $C_n \in \mathcal{C}$ (для доказательства достаточно заметить, что множества, полный прообраз которых принадлежит $\mathcal{A}_1$, образуют σ-алгебру в Ω_2).

Очевидно, если α — измеримое отображение $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ в $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ и β — измеримое отображение $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ в $(\Omega_3, \mathcal{A}_3)$, то $\beta\alpha$ есть измеримое отображение $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ в $(\Omega_3, \mathcal{A}_3)$, если только область определения β содержит $\alpha(\Omega_1)$.

Важнейшим частным случаем отображений являются числовые функции, т. е. отображения в числовую прямую $I_{+\infty}^{-\infty}$. Пусть $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра подмножеств Ω. Мы будем говорить, что числовая функция $\xi(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ *измерима относительно* $\mathcal{A}$, или $\mathcal{A}$-*измерима*, если измеримо определяемое ею отображение $(\Omega, \mathcal{A})$ в $\left(I_{+\infty}^{-\infty}, \mathcal{B}_{+\infty}^{-\infty}\right)$, т. е. если для любого $\Gamma \in \mathcal{B}_{+\infty}^{-\infty}$

$$\{\omega : \xi(\omega) \in \Gamma\} \in \mathcal{A}.$$

Поскольку интервалы $(t, +\infty)$ порождают σ-алгебру $\mathscr{B}^{-\infty}_{+\infty}$, то для $\mathscr{A}$-измеримости функции $\xi(\omega)$ достаточно, чтобы при любом t

$$\{\omega : \xi(\omega) > t\} \in \mathscr{A}.$$

Понятие $\mathscr{A}$-измеримой функции автоматически распространяется на случай, когда система множеств $\mathscr{A}$ является σ-алгеброй не во всем пространстве Ω, а в некотором подмножестве $\widetilde{\Omega}$ этого пространства. Легко видеть, что в этом случае область определения любой $\mathscr{A}$-измеримой функции ξ совпадает с $\widetilde{\Omega}$.

Пусть $\mathscr{L}$ — какая-нибудь система числовых функций на Ω, удовлетворяющая условию

1.2. А. Если $\xi \in \mathscr{L}$ и

$$\eta(\omega) = \begin{cases} \xi(\omega) & \text{при } \xi(\omega) \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } \xi(\omega) < 0, \end{cases}$$

то η и $\xi - \eta$ принадлежат $\mathscr{L}$.

Систему числовых функций $\mathscr{H}$ мы назовем *$\mathscr{L}$-системой*, если выполняются следующие условия:

1.2. Б$_1$. $1 \in \mathscr{H}$.

1.2. Б$_2$. Линейная комбинация любых двух функций из $\mathscr{H}$ снова принадлежит $\mathscr{H}$.

1.2. Б$_3$. Если $\xi_n \in \mathscr{H}$, $0 \leqslant \xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$ *) и $\xi(\omega)$ ограничена или принадлежит $\mathscr{L}$, то $\xi \in \mathscr{H}$.

Лемма 1.2. *Если $\mathscr{L}$-система $\mathscr{H}$ содержит индикаторы* **) *всех множеств, принадлежащих к некоторой π-системе $\mathscr{C}$, то $\mathscr{H}$ содержит все функции из $\mathscr{L}$, измеримые относительно $\sigma(\mathscr{C})$.*

Доказательство. Совокупность всех множеств, индикаторы которых входят в $\mathscr{H}$, образует λ-систему $\mathscr{F}$. Поскольку $\mathscr{F} \supseteq \mathscr{C}$, то по лемме 1.1 $\mathscr{F} \supseteq \sigma(\mathscr{C})$.

---

*) Мы пишем $a_n \uparrow a$, если $a_n \to a$ и $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$ Аналогично, запись $a_n \downarrow a$ означает, что $a_n \to a$ и $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots$.

**) Индикатором (иначе, характеристической функцией) множества A мы называем функцию

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A, \\ 0, & \text{если } \omega \,\overline{\in}\, A. \end{cases}$$

Пусть ξ — неотрицательная функция, пр... и измеримая относительно $\sigma(\mathcal{C})$. Положим

$$\Gamma_{kn}=\left\{\frac{k}{2^n}\leqslant\xi(\omega)<\frac{k+1}{2^n}\right\};$$

$$\xi_n=\sum_{k=0}^{2^{2n}}\frac{k}{2^n}\chi_{\Gamma_{kn}}.$$

Очевидно, $0\leqslant\xi_n\uparrow\xi$ и, согласно 1.2. Б$_3$, $\xi\in\mathcal{H}$.

В силу 1.2. А произвольная $\sigma(\mathcal{C})$-измеримая функция $\eta\in\mathcal{L}$ может быть представлена в виде разности двух $\sigma(\mathcal{C})$-измеримых неотрицательных функций из $\mathcal{L}$. Последние, как уже доказано, принадлежат $\mathcal{H}$. Следовательно, и $\eta\in\mathcal{H}$.

1.3. Пусть $\mathcal{A}_i$ есть σ-алгебра подмножеств множества Ω_i ($i=1, 2, \ldots, n$). Мы будем обозначать через $\Omega_1\times\ldots\times\Omega_n$ совокупность наборов $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, где $\omega_i\in\Omega_i$, и через $\mathcal{A}_1\times\ldots\times\mathcal{A}_n$ σ-алгебру, порожденную подмножествами вида $A_1\times\ldots\times A_n$, где $A_i\in\mathcal{A}_i$ (отметим, что множества $A_1\times\ldots\times A_n$ образуют π-систему). В случае, когда $\Omega_1=\ldots=\Omega_n=\Omega$, мы будем писать Ω^n вместо $\Omega_1\times\ldots\times\Omega_n$, а в случае, когда $\mathcal{A}_1=\ldots=\mathcal{A}_n=\mathcal{A}$, будем писать $\mathcal{A}^n$ вместо $\mathcal{A}_1\times\ldots\times\mathcal{A}_n$.

Предположим теперь, что заданы бесконечная последовательность пространств Ω_i и в каждом пространстве Ω — σ-алгебра подмножеств $\mathcal{A}_i$. Мы будем обозначать через $\Omega_1\times\ldots\times\Omega_n\times\ldots$ пространство последовательностей $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots)$, где $\omega_i\in\Omega_i$, и через $\mathcal{A}_1\times\ldots\times\mathcal{A}_n\times\ldots$ σ-алгебру в этом пространстве, порожденную подмножествами

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n\times\Omega_{n+1}\times\Omega_{n+2}\times\ldots \tag{1.1}$$
$$(n=1, 2, \ldots; A_i\in\mathcal{A}_i).$$

В случае, когда сомножители одинаковы, будем писать сокращенно Ω^∞ и $\mathcal{A}^\infty$. Отметим, что совокупность подмножеств вида (1.1) является π-системой.

Лемма 1.3. *Пусть* α_i — *измеримое отображение* $(\Omega, \mathcal{A})$ *в* $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ (i *может пробегать либо значения* $1, 2, \ldots, n$, *либо все натуральные значения*). *Тогда отображение* α

пространства $(\Omega, \mathcal{A})$ *в* $(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \ldots)$, *определенное формулой*

$$\alpha(\omega) = \{\alpha_1(\omega), \alpha_2(\omega), \ldots\},$$

является измеримым.

Доказательство. Пусть для определенности i пробегает все натуральные значения. Совокупность всех множеств из $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \ldots$, полные прообразы которых при отображении α принадлежат $\mathcal{A}$, образуют, очевидно, σ-алгебру. Эта σ-алгебра содержит все множества вида (1.1). Следовательно, она содержит $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \ldots$.

Лемма 1.4. *Пусть* $\mathcal{A}_i$ *есть* σ*-алгебра подмножеств пространства* Ω_i $(i = 1, 2)$ *и пусть* $f(\omega_1, \omega_2)$ $(\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2)$ *есть* $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$*-измеримая функция. Тогда при любом фиксированном* $\omega_2 \in \Omega_2$ $f(\omega_1, \omega_2)$ *есть* $\mathcal{A}_1$*-измеримая функция от* ω_1.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{L}$ совокупность всех функций на пространстве $\Omega_1 \times \Omega_2$. Система $\mathcal{H}$ всех функций $f(\omega_1, \omega_2)$, для которых справедлива наша лемма, является, очевидно, $\mathcal{L}$-системой. Эта система содержит индикатор любого множества $A_1 \times A_2$. По лемме 1.2 она содержит все функции, измеримые относительно σ-алгебры $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

Лемма 1.5. *Пусть каждому* t *из некоторого множества* T *сопоставлена функция* $x_t(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ *со значениями в измеримом пространстве* $(E, \mathcal{B})$. *Для того чтобы функция* $\xi(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ *была измерима относительно* σ*-алгебры* $\mathcal{N}_T$, *порожденной множествами* $\{\omega : x_t(\omega) \in \Gamma\}$ $(t \in T, \Gamma \in \mathcal{B})$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\xi(\omega) = f[x_{t_1}(\omega), x_{t_2}(\omega), \ldots, x_{t_n}(\omega), \ldots], \tag{1.2}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots \in T$ *и* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ *есть* $\mathcal{B}^\infty$*-измеримая функция в пространстве* E^∞.

Доказательство. Отображение Ω в числовую прямую $I_{+\infty}^{-\infty} = (-\infty, +\infty)$, задаваемое формулой (1.2), можно представить в виде произведения $f\alpha$, где

$$\alpha(\omega) = \{x_{t_1}(\omega), x_{t_2}(\omega), \ldots, x_{t_n}(\omega), \ldots\}.$$

При любом $t \in T$ $x_t(\omega)$ определяет измеримое отображение $(\Omega, \mathcal{N}_T)$ в $(E, \mathcal{B})$. По лемме 1.3 α есть измеримое отображение $(\Omega, \mathscr{N}_T)$ в $(E^{\infty}, \mathscr{B}^{\infty})$. По условию f определяет измеримое отображение $(E^{\infty}, \mathscr{B}^{\infty})$ в $(I_{+\infty}^{-\infty}, \mathscr{B}_{+\infty}^{-\infty})$. Следовательно, $\xi = f\alpha$ есть измеримое отображение $(\Omega, \mathscr{N}_T)$ в $(I_{+\infty}^{-\infty}, \mathscr{B}_{+\infty}^{-\infty})$. Итак, все функции, представимые в виде (1.2), $\mathscr{N}_T$-измеримы.

Обозначим теперь через $\mathscr{L}$ совокупность всех функций $\xi(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$, через $\mathscr{H}$ множество функций ξ, представимых в виде (1.2), и через $\mathscr{C}$ систему всех ω-множеств вида

$$\{x_{t_1} \in \Gamma_1, \ldots, x_{t_n} \in \Gamma_n\} \tag{1.3}$$

$$(n = 1, 2, \ldots; \; t_1, \ldots, t_n \in T; \; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathscr{B}).$$

Индикатор множества (1.3) равен

$$\chi_{\Gamma_1}[x_{t_1}(\omega)] \ldots \chi_{\Gamma_n}[x_{t_n}(\omega)].$$

Следовательно, он представим в виде (1.2) и входит в $\mathscr{H}$. Очевидно, $\mathscr{H}$ является $\mathscr{L}$-системой, а $\mathscr{C}$ — π-системой, и по лемме 1.2 $\mathscr{H}$ содержит все функции $\xi(\omega)$, измеримые относительно $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{N}_T$.

§ 2. Меры и интегралы

1.4. Пусть $(\Omega, \mathscr{M})$ — некоторое измеримое пространство. Неотрицательная числовая функция $\varphi(A)$ $(A \in \mathscr{M})$ называется *мерой* *), если, каков бы ни был конечный или счетный набор попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots$ из $\mathscr{M}$, $\varphi(\bigcup A_k) = \Sigma \varphi(A_k)$. Мера, удовлетворяющая условию $\varphi(\Omega) = 1$, называется ***вероятностной мерой***.

Пусть φ — мера, заданная на σ-алгебре $\mathscr{M}$. Пусть f есть $\mathscr{M}$-измеримая числовая функция, заданная на некотором подмножестве Ω_f пространства Ω, и пусть A содержится в Ω_f.

---

*) Все определения и утверждения, содержащиеся в n° 1.4, без труда переносятся на случай, когда для функции $\varphi(A)$, помимо конечных значений, допускается значение $+\infty$. (Такой функцией является, в частности, обычная мера Лебега на бесконечной числовой прямой.) Однако с подобными функциями нам придется встретиться только в некоторых примерах, и поэтому всюду, где не сделано специальной оговорки, под мерой φ будет пониматься функция, принимающая лишь конечные значения.