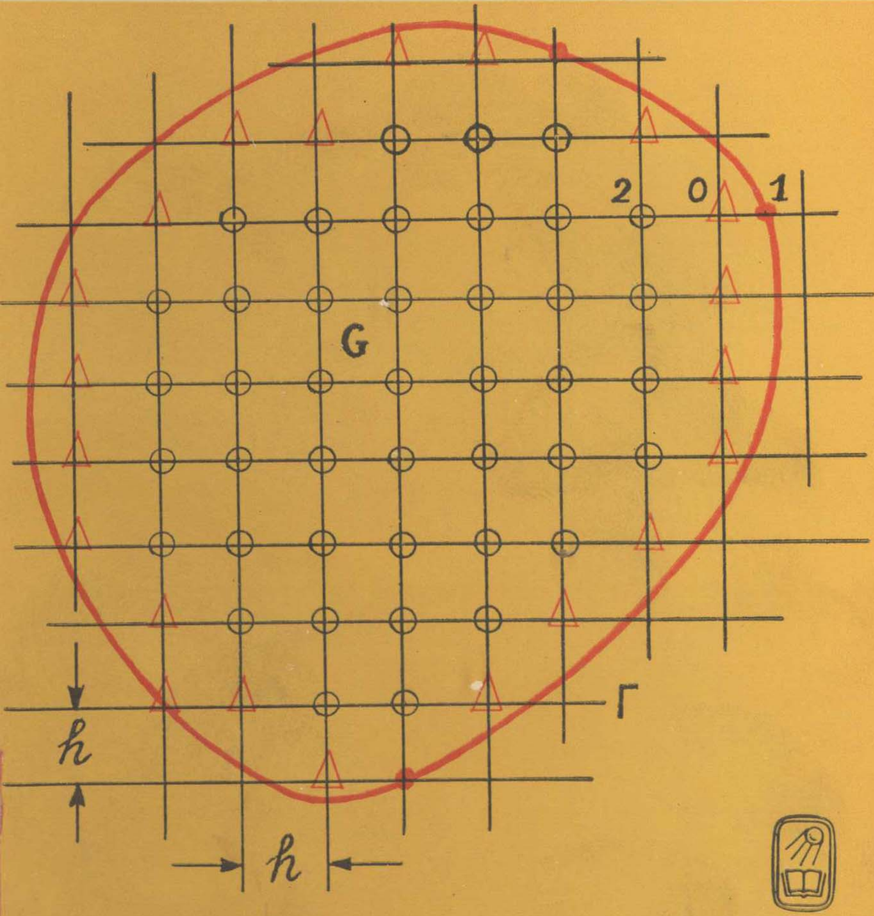
Е. А. ВОЛКОВ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ



Е. А. ВОЛКОВ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для инженерно-технических специальностей вузов

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982

22.19
В 67
УДК 519.6

Численные методы. Волков Е. А.: Учебное пособие. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. — 256 с.

В книге в минимальном необходимом объеме рассмотрены основные вопросы численных методов — приближение функций, численное интегрирование, численные методы линейной алгебры, численные методы решения дифференциальных уравнений.

Учебное пособие полностью соответствует программе раздела численных методов курса высшей математики технических вузов. По методике изложения книга близко примыкает к учебникам Я. С. Бугрова и С. М. Никольского «Высшая математика».

Для студентов инженерно-технических специальностей вузов.

Рис. 27. Табл. 10. Библ. 23 назв.

$В\ \frac{1702070000-056}{053(02)-82}\ 3\text{-}82$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей книге излагаются основы численных методов. Книга содержит материал, предусмотренный программой курса «Высшая математика для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений». Для понимания почти всего содержания книги достаточно знания общего курса математики по указанной программе в объеме трех учебников Я. С. Бугрова и С. М. Никольского: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. —М.: Наука, 1980; Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1980; Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1981.

При чтении § 14, 17 потребуются сведения о случайных величинах из элементарного курса теории вероятностей. Некоторые дополнительные понятия, используемые в тексте, разъясняются во введении и по мере необходимости.

Глава 1 посвящена численным методам приближения функций одной переменной. Здесь, кроме многочленов Тейлора, интерполяционных многочленов и многочленов наилучшего равномерного приближения, рассматриваются аппроксимации кубическими сплайнами, значительное место уделяется важному в инженерно-технических приложениях методу наименьших квадратов в непериодическом и периодическом случаях с анализом погрешности самого метода и случайной ошибки, возникающей за счет ошибок наблюдений. В главу 1 включен также параграф, относящийся к численному дифференцированию, используемому при построении сплайнов, и вводный § 1 о приближенных числах.

В главе 2 представлены численные методы интегрирования. Наряду с традиционными квадратурными формулами кратко изложен метод Монте-Карло вычисления определенных интегралов. В § 16 обосновывается практическое правило Рунге оценки погрешности квадратурных формул и метод уточнения результата по Ричардсону. Численным методам интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (решению задачи Коши) посвящен § 18.

Глава 3 содержит численные методы решения задач линейной алгебры, в частности метод Гаусса, метод итераций решения систем линейных уравнений и методы решения частичных проблем собственных значений матриц. В § 22 рассматривается метод прогонки решения системы с трехдиагональной матрицей (трехточечного разностного уравнения), получивший широкое распространение.

В главе 4 излагаются основные приближенные численные методы решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.

Глава 5 посвящена приближенным методам решения краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. В § 28 даны методы минимизации невязки и метод Галеркина. В § 29 излагается разностный метод. На базе двухточечной краевой задачи вводятся основные понятия и разъясняются основные положения теории разностных схем.

В главе 6 изучаются разностные схемы для линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядков. Рассматриваются вопросы аппроксимации, устойчивости, сходимости, а также экономичности разностных схем.

К книге приложен список литературы, рекомендуемой для более углубленного изучения численных методов.

Автор искренне благодарен академику С. М. Никольскому и профессору Я. С. Бугрову, чьи советы были существенно использованы при написании данной книги.

Автор выражает свою глубокую признательность члену-корреспонденту АН СССР Н. С. Бахвалову, профессору В. А. Треногину и доценту Н. А. Потапкову, прочитавшим книгу в рукописи и сделавшим ряд ценных замечаний.

Е. А. Волков

ВВЕДЕНИЕ

На практике в большинстве случаев найти точное решение возникшей математической задачи не удается. Это происходит главным образом не потому, что мы не умеем этого сделать, а поскольку искомое решение обычно не выражается в привычных для нас элементарных или других известных функциях. Поэтому важное значение приобрели численные методы, особенно в связи с возрастанием роли математических методов в различных областях науки и техники и с появлением высокопроизводительных электронных вычислительных машин (ЭВМ).

Под численными методами подразумеваются методы решения задач, сводящиеся к арифметическим и некоторым логическим действиям над числами, т. е. к тем действиям, которые выполняет ЭВМ. В зависимости от сложности задачи, заданной точности, применяемого метода и т. д. может потребоваться выполнить от нескольких десятков до многих миллиардов действий. Если число действий не превышает тысячи, то с такой задачей обычно может справиться человек, имея в своем распоряжении настольную клавишную счетную машину без программного управления и набор таблиц элементарных функций. Однако без быстродействующей ЭВМ явно не обойтись, если для решения задачи нужно выполнить, скажем, порядка миллиона действий и тем более, когда решение должно быть найдено в сжатые сроки. Например, задачи, связанные с суточным прогнозом погоды, должны быть решены за несколько часов, а при управлении быстро протекающими технологическими процессами требуется находить решение за доли секунды.

Решение, полученное численным методом, обычно является приближенным, т. е. содержит некоторую погрешность. Источниками погрешности приближенного решения являются: 1) несоответствие математической задачи (математической модели) изучаемому реальному явлению; 2) погрешность исходных данных (входных параметров); 3) погрешность метода решения; 4) ошибки округлений в арифметических и других действиях над числами.

Погрешность в решении, обусловленная первыми двумя источниками, называется *неустранимой*. Эта погрешность может присутствовать, даже если решение поставленной математической задачи найдено точно. Вопрос о том, насколько хорошо описывает математическая модель исследуемое явление, проверяется путем сравнения результатов экспериментов и типичных частных решений при некоторых значениях входных параметров. Влияние погрешности исходных данных часто удается оценить элементарными средствами, например, варьируя исходные данные в пределах их ошибок и фиксируя решения. Если исходных данных много, а их ошибки носят случайный характер, то на помощь могут прийти статистические методы. (В § 14 даются оценки случайной ошибки при аппроксимации функций методом наименьших квадратов.) В некоторых случаях неустранимую погрешность можно рассматривать как погрешность функции, возникающую за счет погрешности аргументов. (Оценка такой погрешности, опирающаяся на формулу Лагранжа, рассматривается в § 1.)

Численные методы в большинстве случаев сами по себе являются приближенными, т. е. даже при отсутствии ошибок во входных данных и при идеальном выполнении арифметических действий они дают решение исходной задачи с некоторой погрешностью, называемой *погрешностью метода*. Это происходит потому, что численным методом обычно решается некоторая другая, более простая задача, аппроксимирующая (приближающая) исходную задачу. В ряде случаев используемый численный метод строится на базе бесконечного процесса, который в пределе приводит к искомому решению (например, вычисление значений элементарной функции с помощью частичных сумм степенного ряда, в который разлагается эта функция). Однако реально предельный переход обычно не удается осуществить, и процесс, прерванный на некотором шаге, дает приближенное решение.

Исследованию погрешности численных методов уделяется значительное внимание во всех разделах данной книги. Численный метод обычно зависит от одного или нескольких параметров, которыми можно распоряжаться. В качестве такого параметра служит, например, число итераций при решении систем уравнений или число учитываемых членов при суммировании ряда, а также шаг, с которым используются значения подынтегральной функции при приближенном вычислении определенного интеграла. Погрешность метода или получаемая ее оценка обычно зависит от соответствующего параметра. Иногда удается получить оценку погрешности, выражаемую только через известные величины. С помощью этой оценки можно определить значения параметра, задающего метод, при которых погрешность метода лежит в требуемых пределах. Чаще же оценка погрешности содержит неизвестные постоянные множители, а параметр метода входит в нее в виде либо степенной, либо показательной функции. По такой оценке судят о скорости убывания погрешности при изменении параметра метода. Скорость убывания погрешности является важной характеристикой метода.

Вопросом, наиболее сложным технически, является учет погрешностей округления в арифметических действиях. Если действий выполняется немного, то *погрешности округления* при ручных вычислениях можно учесть методом, изложенным в § 1, посвященном элементарной теории погрешностей, рассчитанной на небольшое число действий. При решении задач на ЭВМ характерны две ситуации. Если количество выполняемых арифметических действий невелико, то обычно ошибки округления не проявляются, так как в ЭВМ числа представляются с 10 и более десятичными значащими цифрами, а окончательный результат редко бывает нужен более чем с 5 десятичными значащими цифрами. Если задача сложная (например, сводящаяся к решению уравнений с частными производными) и для ее приближенного решения потребуется, скажем, 10^7 арифметических действий, то в этой ситуации нереально учитывать влияние погрешностей округления в каждом действии. При таком учете получится слишком завышенная оценка погрешности, отвечающая самому неблагоприятному случаю. Ошибки же округления ведут себя достаточно случайно как по величине, так и по знаку. Поэтому имеются предпосылки для их взаимной компенсации. Однако с ошибками округления при решении сложных задач все равно приходится серьезно считаться.

Для решения одной и той же задачи могут применяться различные приближенные методы. Чувствительность к ошибкам округления существенно зависит от выбранного численного метода. В главах 5 и 6 исследуются разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений и выделяются так называемые устойчивые методы (разностные схемы), которые, в частности, мало чувствительны к ошибкам округления. Мало чувствительными к таким ошибкам являются итерационные сходящиеся методы, поскольку возникающие погрешности на следующих итерациях исправляются.

Численный метод может считаться удачно выбранным, если его погрешность в несколько раз меньше неустранимой погрешности, а погрешность, возникающая за счет округлений, называемая *вычисленной погрешностью*, по крайней мере в несколько раз меньше погрешности метода. Если неустранимая погрешность отсутствует, то погрешность метода должна быть несколько меньше заданной точности решения.

К численному методу, кроме требования достижения заданной точности, предъявляется ряд других требований. Предпочтение отдается методу, который реализуется с помощью меньшего числа действий, требует меньшей памяти ЭВМ и, наконец, является логически более простым, что способствует более быстрой его реализации на ЭВМ. Перечисленные условия обычно противоречат друг другу, поэтому часто при выборе численного метода приходится соблюдать компромисс между ними.

Введем некоторые понятия математического и функционального анализа, которые широко распространены в современной литературе по численным методам. С этими понятиями можно знакомиться по мере того, как они будут встречаться в основном тексте.

1. Пусть $\varphi(h)$ — некоторая функция переменной h с конечной областью определения D_φ на полуоси $h>0$, причем $h \in D_\varphi$ может принимать сколь угодно малые значения. Тогда, если существуют такие положительные числа h_0, c, k, что при всех $h \in D_\varphi$, удовлетворяющих условию $0<h\leqslant h_0$, выполняется неравенство

$$|\varphi(h)| \leqslant ch^k,$$

то пишут

$$\varphi(h) = O(h^k)$$

и говорят, что $\varphi(h)$ *есть O большое от* h^k (*при* $h\to 0$).

Согласно данному определению выполняются следующие очевидные свойства. Если $\varphi(h) = O(h^k)$, $\psi(h) = O(h^k)$, причем $D_\varphi = D_\psi$, то $\varphi(h)+\psi(h) = O(h^k)$, т. е. $O(h^k) + O(h^k) = O(h^k)$. Если $k>m>0$, то $O(h^k)$ в то же время есть $O(h^m)$. Наконец, если $\varphi(h) = O(h^k)$, то $a\varphi(h) = O(h^k)$, где a — постоянная, не зависящая от h.

Пример. $\sin^2 2h = O(h^2)$, так как $\sin^2 2h \leqslant 4h^2$ $\forall h$.

Пусть теперь дана функция $\varphi(h, \tau)$ положительных аргументов h, τ, которые могут принимать сколь угодно малые значения. Тогда, если существуют такие положительные числа h_0, τ_0, c, k, m, что при всех допустимых значениях h, τ, удовлетворяющих условиям $0<h\leqslant h_0$, $0<\tau\leqslant\tau_0$, выполняется неравенство

$$|\varphi(h, \tau)| \leqslant c(h^k+\tau^m),$$

то пишут

$$\varphi(h, \tau) = O(h^k+\tau^m)$$

и говорят, что $\varphi(h, \tau)$ *есть O большое от* $h^k+\tau^m$ (*при* $h\to 0$, $\tau\to 0$).

Введем еще одно аналогичное понятие.

Функция $\Phi(N)$, заданная для всех натуральных $N>N_0>0$, *есть O большое от* N^k (*при* $N\to\infty$), т. е. $\Phi(N) = O(N^k)$, если найдется такая постоянная $c>0$, что при всех натуральных $N>N_0$

$$|\Phi(N)| \leqslant cN^k.$$

2. Будем говорить, что функция $f(x)$ *принадлежит классу* $C_k[a, b]$, и писать $f \in C_k[a, b]$, если функция f определена на отрезке $[a, b]$ и имеет на нем непрерывные производные до порядка k включительно. Это означает, что на некотором интервале (A, B), содержащем отрезок $[a, b]$, существует k раз непрерывно дифференцируемая функция f^*, совпадающая на $[a, b]$ с f. Под значениями указанных производных функции f на концах отрезка $[a, b]$ подразумеваются значения соответствующих производных функции f^*.

Пример. Пусть на отрезке $[0, 1]$ задана функция $f(x) = x^{5/2}$. Рассмотрим на интервале $(-1, 2)$ функцию $f^*(x) = |x|^{5/2}$. Очевидно, отрезок $[0, 1]$ содержится в интервале $(-1, 2)$, функция f^* дважды непрерывно дифференцируема на интервале $(-1, 2)$, а именно,

$$\frac{df^*(x)}{dx} = \frac{5}{2}|x|^{3/2} \operatorname{sign} x,$$

$$\frac{d^2f^*(x)}{dx^2} = \frac{15}{4}|x|^{1/2}.$$

Кроме того, $f^*(x) = f(x)$ $\forall x \in [0, 1]$. Следовательно, $f \in C_2[0, 1]$, причем $f'(x) = \frac{5}{2}x^{3/2}$, $f''(x) = \frac{15}{4}x^{1/2}$, $x \in$ $\in [0, 1]$.

Будем при $k = 0$ вместо $C_0[a, b]$ использовать обозначение $C[a, b]$. Запись $f \in C[a, b]$ означает, что *функция f непрерывна на отрезке* $[a, b]$.

3. В курсе дифференциального исчисления даются понятия частных производных функции многих переменных во внутренних точках области ее определения.

Для формулировок задач требуется расширить эти понятия на замкнутую область, включая граничные точки.

Пусть функция f задана на замкнутой области $\bar{G}$ n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$. Скажем, что f *имеет на замкнутой области $\bar{G}$ некоторую непрерывную частную производную*, если на какой-либо открытой области G^*, содержащей замкнутую область $\bar{G}$, существует функция f^*, совпадающая с f на $\bar{G}$ и имеющая на G^* соответствующую непрерывную частную производную. При этом в качестве значений рассматриваемой частной производной функции f в граничных точках области G примем значения соответствующей частной производной функции f^*.

Определение. Будем говорить, что функция f *непрерывно дифференцируема k раз на замкнутой области* $\bar{G}$, т. е. принадлежит *классу* $C_k(\bar{G})$, и писать $f \in C_k(\bar{G})$, если функция f имеет на $\bar{G}$ все непрерывные частные производные до порядка k включительно.

Пример. Пусть на замкнутом квадрате $\bar{G} = \{(x_1, x_2)\colon 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, 2\}$ дана функция $f(x_1, x_2) = x_2 \cos(x_1 - 2)^{1/2}$. Зададим на открытом круге $G^* = \{(x_1, x_2)\colon x_1^2 + x_2^2 < 4\}$ функцию $f^*(x_1, x_2)$ по той же формуле: $f^*(x_1, x_2) = x_2 \cos(x_1 - 2)^{1/2}$. Очевидно, $\bar{G}$ содержится в G^*, $f^*(x_1, x_2)$ совпадает с $f(x_1, x_2)$ на $\bar{G}$ и функция $f^*(x_1, x_2)$ непрерывно дифференцируема k раз на G^* при любом k. Согласно данному выше определению $f \in C_k(\bar{G})$ $\forall k$.

4. Пусть M — множество элементов f, g, r, ... произвольной природы.

Множество M называется *метрическим пространством*, если любой паре его элементов поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(f, g)$, называемое *расстоянием* между элементами f и g, которое удовлетворяет *аксиомам расстояния*:

1) $\rho(f, g) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $f = g$;

2) $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ $\forall f, g \in M$;

3) $\rho(f, r) \leqslant \rho(f, g) + \rho(g, r)$ $\forall f, g, r \in M$.

Аксиома 3) называется *неравенством треугольника*. Функцию $\rho(f, g)$ будем называть еще *метрикой* пространства M.

Примером метрического пространства служит любое множество M точек $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, ... n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$ с расстоянием

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Выполнение аксиом 1) и 2) для заданного расстояния очевидно, а неравенство треугольника следует из *неравенства Минковского* (доказываемого в курсе линейной алгебры):

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|,$$

где $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ — произвольные точки пространства $\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$, $|\boldsymbol{x}|=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$. Действительно,

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|=|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})|\leqslant$$
$$\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|=\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+\rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

В частности, метрическим пространством с введенным выше расстоянием будет множество точек, образующих замкнутый единичный шар $\bar{S}=\{\boldsymbol{x}\colon |\boldsymbol{x}|\leqslant 1\}$.

5. Множество M называется *линейным пространством*, если в нем определены операции сложения и умножения на действительные числа, не выводящие за пределы M и удовлетворяющие условиям:

1) *сложение ассоциативно*: $(f+g)+r=f+(g+r)$;

2) *коммутативно*: $f+g=g+f$;

3) *существует нулевой элемент* $\theta\in M$, *т. е.* $f+\theta=f$ $\forall f\in M$;

4) $0\cdot f=\theta$ $\forall f\in M$;

5) $(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f$;

6) $\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$;

7) $\alpha(\beta f)=(\alpha\beta)f$;

8) $1\cdot f=f$;

α, β — *действительные числа.*

6. Система элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ линейного пространства M называется *линейно зависимой*, если существуют такие не равные одновременно нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что

$$\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\ldots+\alpha_n f_n=\theta.$$

Если данное равенство возможно только при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, то система элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ называется *линейно независимой.*

7. Множество F называется *линейным нормированным пространством*, если оно линейно и каждому элементу $f\in F$ поставлено в соответствие действительное число $\|f\|$, называемое *нормой* f и удовлетворяющее *аксиомам нормы*:

1) $\|f\|\geqslant 0$, *причем* $\|f\|=0$ *тогда и только тогда, когда* $f=\theta$, *т. е.* f *является нулевым элементом в* F;

2) $\|\alpha f\|=|\alpha|\,\|f\|$ *для любого действительного* α;

3) $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$ $\forall f, g\in F$.

Аксиома 3) называется *неравенством треугольника* для нормы.

Рассмотрим пример нормированного пространства. Класс $C[a, b]$ всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$, очевидно, является линейным пространством, так как сумма любых двух непрерывных функций непрерывна и непрерывная функция, умноженная на любое число, тоже непрерывна. Нулевым элементом в этом пространстве является единственная функция, тождественно равная нулю на $[a, b]$.

Если ввести в классе $C[a, b]$ норму

$$\|f\| = \max_{[a, b]} |f(x)|, \tag{1}$$

то он становится нормированным пространством. Выполнение аксиом 1) и 2) для введенной нормы очевидно. Проверим неравенство треугольника. Имеем

$$\|f+g\| = \max_{[a, b]} |f(x)+g(x)|.$$

Так как $|f(x)+g(x)|$ является непрерывной функцией на отрезке $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса найдется такая точка $x^* \in [a, b]$, что

$$\max_{[a, b]} |f(x)+g(x)| = |f(x^*)+g(x^*)|.$$

Отсюда легко следует неравенство треугольника:

$$\|f+g\| = |f(x^*)+g(x^*)| \leqslant |f(x^*)| + |g(x^*)| \leqslant \leqslant \max_{[a, b]} |f(x)| + \max_{[a, b]} |g(x)| = \|f\| + \|g\|.$$

8. *Любое линейное нормированное пространство является одновременно метрическим пространством с расстоянием (метрикой)*

$$\rho(f, g) = \|f-g\|. \tag{2}$$

Действительно, аксиомы 1) и 2) для введенного расстояния выполняются в силу аксиомы 1) и аксиомы 2) при $\alpha = -1$ для нормы *), а неравенство тре-

*) Аксиомы расстояния сформулированы в п. 4, а аксиомы нормы — в п. 7.

угольника для расстояния (2) следует из неравенства треугольника для нормы:

$$\rho(f, r) = \|f - r\| = \|(f-g) + (g-r)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|f-g\| + \|g-r\| = \rho(f, g) + \rho(g, r).$$

9. В одном и том же линейном пространстве норму можно вводить различными способами. Например, в классе непрерывных функций $C[0, 1]$ норму можно задать, кроме способа (1), еще в следующем виде:

$$\|f\| = \left(\int_0^1 f^2(x)\,dx\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Мы не станем останавливаться на проверке аксиом для данной нормы, отложив этот вопрос до § 13.

Для того чтобы различать нормы, мы будем в случае необходимости использовать индексы у нормы. Например, для нормы (1) распространены обозначения $\|f\|_{C[a, b]}$ и $\|f\|_C$, а для нормы (3) часто используется знак $\|f\|_{L_2}$.

В зависимости от введенной в одном и том же линейном пространстве нормы могут изменяться различные свойства получаемого нормированного пространства и, в частности, изменяется «физический» смысл метрики, порождаемой нормой. Например, расстояние (2), заданное с помощью нормы (1), т. е.

$$\rho(f, g) = \|f - g\|_C = \max_{[a, b]} |f(x) - g(x)|, \tag{4}$$

означает максимальное по модулю уклонение друг от друга функций f и g на отрезке $[a, b]$, а при использовании нормы (3) расстояние имеет вид

$$\rho(f, g) = \|f - g\|_{L_2} = \left(\int_0^1 (f(x) - g(x))^2\,dx\right)^{1/2} \tag{5}$$

и носит смысл среднеквадратичного уклонения функций f и g.

Выбор нормы часто диктуется условиями конкретной задачи. Например, при рассмотрении равномерных приближений функций (§ 12) нужна норма (1), а при приближений функций методом наименьших квадратов