

Manuel
de

Mécanique des fluides

Arnault Monavon

2^e édition

→ L2
→ IUT

Cours
+ exos
corrigés

DUNOD

Manuel

de mécanique des fluides

Cours + Exercices

Arnault Monavon

Maître de conférences à l'UPMC

2^e édition

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2014

5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com

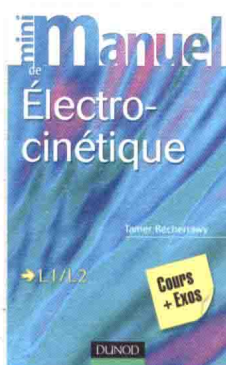
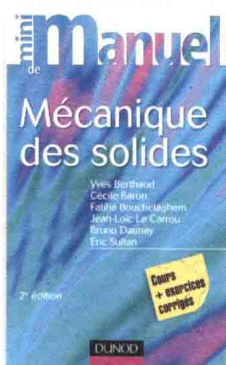
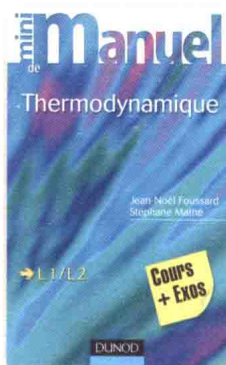
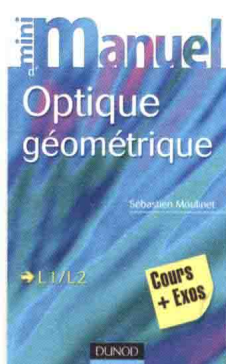
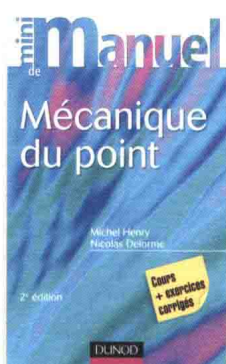
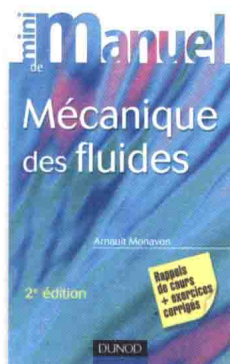
ISBN 978-2-10-071231-1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Mini manuel

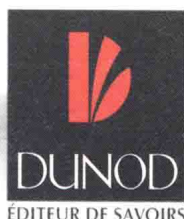
[L'EXAM DANS LA POCHE]



[Apprendre et comprendre l'essentiel]

DISPONIBLES EN LIBRAIRIE

Le catalogue complet sur www.dunod.com



Comment utiliser le Mini-Manuel ?

La page d'entrée de chapitre



Elle donne le plan du cours, ainsi qu'un rappel des objectifs pédagogiques du chapitre.

Le cours

Le cours, concis et structuré, expose les notions importantes du programme.



Les rubriques



Une erreur à éviter



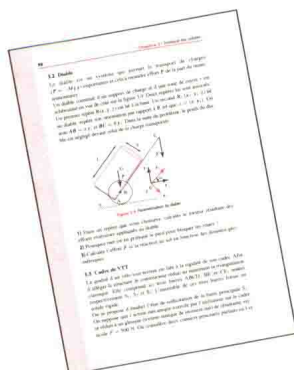
Un peu de méthode



Un exemple pour comprendre



Les points clés à retenir



Les exercices

Ils sont proposés en fin de chapitre, avec leur solution, pour se tester tout au long de l'année.

Table des matières

Nomenclature	1
1 Propriétés physiques	3
1.1 Définition	3
1.2 Gaz	4
1.3 Liquides	5
1.4 Fluide barotrope (compressible)	7
<i>Points clefs</i>	9
<i>Exercices</i>	9
<i>Solutions</i>	10
2 Statique	13
2.1 Système	13
2.2 Forces de surface et de volume	16
2.3 Équilibre statique	19
2.4 Loi de comportement	21
2.5 Statique des fluides	22
<i>Points clefs</i>	35
<i>Exercices</i>	35
<i>Solutions</i>	39
3 Cinématique	47
3.1 Description lagrangienne	48
3.2 Description eulérienne	50
3.3 Dérivées particulières	55
3.4 Divergence du champ de vitesse	64
3.5 Rotationnel du champ de vitesse	69

3.6	Accélération	78
3.7	Mouvement relatif	80
	<i>Points clefs</i>	82
	<i>Exercices</i>	83
	<i>Solutions</i>	85
4	Conservation de la masse	91
4.1	Formulation générale	91
4.2	Cas particuliers	94
	<i>Points clefs</i>	98
	<i>Exercices</i>	98
	<i>Solutions</i>	100
5	Conservation de la quantité de mouvement	103
5.1	Loi fondamentale de la dynamique	103
5.2	Équation de la dynamique des fluides	106
5.3	Fluide parfait	107
5.4	Équations du mouvement	112
5.5	Approximations fréquentes	117
5.6	Équations du mouvement en repère relatif	129
	<i>Points clefs</i>	130
	<i>Exercices</i>	131
	<i>Solutions</i>	136
6	Théorème de Bernoulli	143
6.1	Formulation locale	143
6.2	Formulation intégrale	150
6.3	Extension à un système complexe	156
6.4	Approximation par tranches	157
	<i>Points clefs</i>	160
	<i>Exercices</i>	161
	<i>Solutions</i>	167
7	Résultante des forces	177
7.1	Introduction	177
7.2	Théorème des quantités de mouvement	178

7.3	Fluide parfait incompressible en écoulement permanent dans le champ de la pesanteur	182
7.4	Application à un tube de courant	183
7.5	Cas d'un tube de courant immobile	186
	<i>Points clefs</i>	193
	<i>Exercices</i>	193
	<i>Solutions</i>	203
8	Frottement visqueux	217
8.1	Écoulement de Couette	217
8.2	Écoulement en conduit rectiligne	220
8.3	Écoulements turbulents	225
	<i>Points clefs</i>	230
	<i>Exercices</i>	230
	<i>Solutions</i>	232
Annexe A	Annexe mathématique	235
A.1	Analyse vectorielle	235
A.2	Opérateurs différentiels	235
A.3	Intégration	236
Annexe B	Formulations des équations générales	237
B.1	Coordonnées cartésiennes	237
B.2	Coordonnées cylindriques	239
B.3	Coordonnées sphériques	240
Annexe C	Données thermophysiques	243
C.1	Air	243
C.2	Eau	243
	Table des figures	246
	Liste des tableaux	247
	Index	249

Nomenclature

Notations

A	scalaire	$\partial\mathcal{D}$	bord du domaine $\mathcal{D}$
$\vec{A}$	vecteur	$\vec{\nabla}$	gradient (opérateur <i>nabla</i>)
$\overline{\overline{A}}$	tenseur	(δa)	échelle de variation de a

Symboles romains

A	surface	$\vec{r}$	rayon-vecteur
$\vec{a}$	variable de LAGRANGE	r	rayon polaire (coordonnées cylindriques et sphériques), constante du gaz
c	vitesse du son	S	nombre de STROUHAL
c_p, c_v	chaleurs massiques	s	abscisse curviligne
$\mathcal{D}$	système matériel	t	temps
$\vec{e}$	vecteur unitaire	$\vec{T}$	densité de force de surface
e	énergie totale massique	T	température absolue
e_m	énergie mécanique massique	$\mathcal{U}$	potentiel des forces de masse, vitesse débitante
$\vec{f}$	densité de force de masse	u	composante de la vitesse sur Ox , énergie interne massique
$\vec{g}$	accélération de la pesanteur	$\mathcal{V}$	volume géométrique
$\mathcal{H}$	charge (hydraulique)	V	volume, vitesse
h	enthalpie massique	$\vec{V}, \vec{v}$	vitesse
$\overline{\overline{I}}$	tenseur identité	v	composante de la vitesse sur Oy
$\vec{n}$	vecteur normal	w	composante de la vitesse sur Oz
h'	$\int dp/\rho$	$\bar{x}$	variable d'EULER
p	pression statique	Z	verticale ascendante
p_g	pression réduite (ou motrice ou piézométrique)		
Q, q	débit massique		
Q_v, q_v	débit volumique		
Re	nombre de REYNOLDS		

Symboles grecs

α	coefficient de dilatation	$\vec{\omega}$	tourbillon
β	coefficient d'augmentation de pression	ω	vitesse de rotation
χ_T	coefficient de compressibilité isotherme	$\vec{\Phi}$	trajectoire (représentation lagrangienne, $\vec{a} \rightarrow \vec{x}$)
δ_{ij}	symbole de KRONECKER	ϕ, φ	potentiel des vitesses, mouvement absolu et relatif
$\bar{\epsilon}, \epsilon_{ijk}$	tenseur d'orientation	$\vec{\Psi}$	trajectoire (représentation lagrangienne, $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$)
ε	petit paramètre ($\ll 1$)	ψ	fonction de courant
Γ	circulation	ρ	masse volumique
Λ	coefficient de perte de charge	$\bar{\bar{\sigma}}$	tenseur des contraintes
$\vec{\gamma}$	accélération	θ	angle polaire (coordonnées cylindriques et sphériques)
$\bar{\bar{\Omega}}$	tenseur des taux de rotation		

Indices (inférieurs ou supérieurs)

a	mouvement absolu	γ	exposant isentropique
e	extérieur, entrée, mouvement d'entraînement	k	exposant polytropique
f	frottement	m	mécanique
i	intérieur	r	mouvement relatif
$i, j, \dots$	indices (1, 2, 3)	s	sortie

CHAPITRE 1

Propriétés physiques

PLAN

- 1.1 Définition
- 1.2 Gaz
- 1.3 Liquides
- 1.4 Fluide barotrope (compressible)

OBJECTIFS

- Différencier un solide d'un fluide.
- Donner les définitions et les valeurs numériques des coefficients calorimétriques et thermoélastiques de fluides usuels comme l'air et l'eau.
- Rappeler les propriétés de la transformation isentropique.
- Définir un fluide barotrope.

1.1 DÉFINITION

La notion intuitive de ce qu'est un fluide repose sur les différences observées expérimentalement entre les propriétés physiques de la matière à l'état solide, liquide et gazeux. À l'état solide, la matière est déformable mais, à condition de ne pas dépasser la limite élastique au-delà de laquelle se produisent des déformations plastiques irréversibles, la matière reprend sa forme initiale lorsque les efforts appliqués s'annulent. À l'état liquide ou gazeux, la matière n'a pas de forme propre et on peut obtenir des déformations aussi grandes que l'on veut en exerçant des efforts extrêmement petits, pour autant qu'ils soient appliqués suffisamment longtemps. Lorsqu'ils cessent, le fluide ne reprend pas sa forme initiale. On exprime ces constatations en disant qu'un fluide peut s'écouler.

Il serait donc vain de tenter de différencier un solide d'un fluide en se basant sur les valeurs numériques de leurs propriétés physiques respectives car les adjectifs « grand » et « petit » n'ont aucun sens en physique,

si on ne se donne pas une référence. Il faut donc s'appuyer sur le schéma de comportement.

Un fluide est un milieu matériel homogène, déformable, assimilable à un milieu continu dans lequel les contraintes ne dépendent que des taux (ou vitesses) de déformation et non pas des déformations elles-mêmes.



Ce chapitre se rattache à la thermodynamique et nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Foussard & Mathé auquel nous nous référerons par l'abréviation « FM » (cf. S. FOUSSARD et J.-N. MATHÉ. Mini Manuel de Thermodynamique. Dunod, Paris, 2009).

1.2 GAZ

Gaz parfait

Ce modèle est le plus simple et le plus connu (FM, § 1.6). Il est valable tant que la température et la pression ne sont « pas trop proches » des conditions critiques où l'état liquide se confond avec l'état gazeux. En mécanique des fluides, il s'écrit de préférence avec la masse volumique du fluide ρ , plutôt que son volume massique $1/\rho$:

$$\rho = p/(rT),$$

où ρ se mesure en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, p en Pa (pascal), r en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et T en K (kelvin) (voir tableau 1.2. La constante du gaz r se déduit de la constante molaire des gaz parfaits $\mathcal{R} = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et de la masse molaire $\mathcal{M}$ par la définition : $r = \mathcal{R}/\mathcal{M}$; dans le cas de l'air : $\mathcal{M}_{\text{air}} = 28,97 \text{ g}$ et $r_{\text{air}} = 287,0 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Coefficients calorimétriques

La thermodynamique macroscopique ne donne pas les valeurs des chaleurs massiques et il faut se référer à la théorie cinétique des gaz ou à des tables (FM, § 2.2).

Par exemple, la chaleur massique à pression constante de l'air à 20°C est égale à $c_p = 1,012 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ tandis que l'exposant isentropique prend pour valeur $\gamma = c_p/c_v = 1,4$. Rappelons également la forme prise par la relation de Mayer de laquelle se déduisent la chaleur massique à volume constant c_v ainsi que l'expression des chaleurs spécifiques en fonction de r et γ :

$$c_p(T) - c_v(T) = r \quad \text{et} \quad c_v = \frac{r}{\gamma - 1}, \quad c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}.$$

Coefficients thermoélastiques

Les coefficients thermoélastiques se calculent directement à partir de l'équation d'état (voir tableau 1.1) et, quand bien même le comportement d'un gaz réel s'en éloignerait il quelque peu, les définitions de ces coefficients dans le cas du gaz parfait constituent un bon ordre de grandeur (FM, § 1.5).

Tableau 1.1 Coefficients thermoélastiques

Coefficient	Symbole usuel	Définition	Cas du GP	Unité
de dilatation	α	$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$	$\frac{1}{T}$	K^{-1}
d'augmentation de pression	β	$\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho$	$\frac{1}{T}$	K^{-1}
de compressibilité isotherme	χ_T	$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T$	$\frac{1}{p}$	Pa^{-1}
de compressibilité isentropique	χ_s	$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s$	$\frac{1}{\gamma p}$	Pa^{-1}

Aux conditions atmosphériques ($\Theta = 20\text{ }^\circ\text{C}$, $p = 1\text{ atm} = 1,0133\text{ bar}$) ; on retiendra les valeurs suivantes : $\alpha = \beta \sim 3 \cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$ et $\chi_T \sim 10^{-5}\text{ Pa}^{-1}$. Les deux coefficients de compressibilité sont reliés par la relation de Reech :

$$\chi_T = \gamma \chi_s.$$

1.3 LIQUIDES

Contrairement aux gaz, le comportement des liquides est déterminé par les forces d'interaction moléculaires, en raison de leur proximité. Les liquides sont beaucoup plus denses et moins compressibles que les gaz, mais cette distinction n'a rien d'absolu, car, au voisinage du point critique, il n'y a aucune discontinuité entre l'état liquide et l'état gazeux.

Par exemple, les coordonnées du point critique de l'eau sont 221 bar et 374 °C, tandis que celles de l'azote sont 33 bar et -147 °C. Dans ce qui suit, nous supposons que les liquides sont pris à des températures très inférieures à la température critique, proches de l'ambiance.

Masse volumique

Le rapport des masses volumiques des liquides et des gaz est de l'ordre de 1 000. Par exemple, à 20 °C et 1 bar, la masse volumique de l'eau est de 998 kg · m⁻³ tandis que celle de l'air est de 1,16 kg · m⁻³.

Coefficients thermoélastiques

- Coefficient de compressibilité isotherme χ_T . Il est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-5} \text{ atm}^{-1}$ pour de l'eau liquide.

Exemple de l'eau : pour faire varier de 1 % le volume d'une certaine masse d'eau liquide, il faut exercer une surpression de l'ordre de 200 bar. Il est donc inutile, lorsqu'on définit le volume d'un liquide, de préciser à quelle pression il a été mesuré.

- Coefficient de dilatation α . Il est de l'ordre de $2,1 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ pour de l'eau liquide à 20 °C. Comparée à celle des gaz, la dilatation thermique des liquides n'est pas négligeable.
- Coefficient d'augmentation de pression. Il est extrêmement difficile de faire des mesures à volume constant pour un liquide et on préfère calculer les coefficients correspondants à partir de la définition : $\beta = \alpha / (\chi_T p)$.

Exemple de l'eau : en utilisant les valeurs indiquées, nous obtenons $\beta = 4,2 \text{ K}^{-1}$. Donc, de l'eau considérée au départ à 20 °C et 1 bar et maintenue dans une enceinte de volume constant voit sa pression multipliée par le facteur β pour une augmentation de la température de 1 degré, ce qui est considérable.

Chaleurs spécifiques

Les chaleurs spécifiques des liquides dépendent parfois de façon significative de la température. Cependant, pour des applications mettant en jeu des écarts de température « suffisamment » petits, on peut les assimiler l'une à l'autre et les tenir pour constantes. Les mesures s'effectuent à pression constante, ce qui donne c_p , ensuite c_v se déduit de la relation de Mayer :

$$c_p - c_v = \alpha \beta T p / \rho = \alpha^2 T / (\chi_T \rho) .$$

Exemple de l'eau

Pour de l'eau à la température de 20 °C et sous une pression de 1 bar, la chaleur massique à pression constante prend la valeur $c_p = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ tandis que $c_p - c_v = 0,024 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (calculé).

1.4 FLUIDE BAROTROPE (COMPRESSIBLE)

Lorsqu'un fluide subit des évolutions très rapides (écoulement en tuyère, ondes acoustiques, explosions sous-marines, etc.) les phénomènes diffusifs (frottements visqueux, conduction de la chaleur) n'ont pas le temps d'influencer l'état du milieu : la transformation est *isentropique*. Dès lors, l'équation de la transformation $s(\rho, T) = s_0$, où s est l'entropie, permet d'éliminer la température T ; mais T n'est pas constante pour autant. On a donc :

$$\rho = \rho(p), \quad (1.1)$$

et le milieu est dit *barotrope*. En voici deux exemples.

Gaz parfait

L'équation d'une transformation isentropique d'un gaz parfait s'écrit (FM, exemples 3.3 et 3.4) :

$$p/p_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma = (T/T_0)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (1.2)$$

où p_0 , ρ_0 et T_0 sont la pression et la masse volumique du gaz dans un état de référence arbitraire. La première égalité s'identifie à la définition (1.1) tandis que la seconde permet de calculer *a posteriori* les variations de température.

Liquide

Une loi d'état d'origine expérimentale, fréquemment utilisée pour l'étude des transformations isentropiques de l'eau, est la loi de Tait :

$$(p + B)/(p_r + B) = (\rho/\rho_r)^n \quad (1.3)$$

où $p_r = 1 \text{ bar}$, $B = 3\,000 \text{ bar}$, $\rho_r = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $n = 7$.

Tableau 1.2 Unités usuelles de la mécanique des fluides

Grandeur	Dénomination	Symbole	Définition
Vitesse	mètre par seconde	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	
	kilomètre par heure	$\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$	$1/3,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Vitesse angulaire	radian par seconde	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	
Accélération	mètre par seconde carrée	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	
Accélération angulaire	radian par seconde carrée	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$	
Force	newton	N	9,806 65 N
	kilogramme-force	kgf	
Moment d'une force	newton-mètre	$\text{N} \cdot \text{m}$	
Travail, énergie, quantité de chaleur	joule	J	
Puissance, flux énergétique, flux thermique	watt	W	$1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$
Contrainte et pression	pascal	Pa	$1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$
	bar	bar	10^5 Pa
	atmosphère	atm	101 325 Pa
Viscosité dynamique	pascal-seconde	$\text{Pa} \cdot \text{s}$	
Viscosité cinématique	mètre carré par seconde	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	
Température	kelvin	K	
	celsius	°C	$T[\text{K}] - 273,15$
Chaleur massique, entropie massique	joule par kilogramme-kelvin	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Conductivité thermique	watt par mètre-kelvin	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	



Parler d'un « fluide barotrope » est un abus de langage. Tous les fluides sont divariants et le caractère « barotrope » est une *approximation* qui ne résulte que des conditions dans lesquelles le fluide est sollicité.



POINTS CLEFS

- Les solides et les fluides se différencient par le schéma de comportement.
- Un fluide est un milieu continu dont les contraintes dépendent des taux (vitesses) de déformation.
- Dans les conditions standard, les liquides et les gaz se distinguent essentiellement par leur masse volumique.
- Une transformation isentropique est une transformation dans laquelle les frottements visqueux sont négligeables et suffisamment rapide pour que la conduction de la chaleur n'ait pas le temps d'influencer l'état du fluide.
- La masse volumique d'un fluide barotrope ne dépend que de la pression et le rôle de la température est implicite.

EXERCICES

1.1 Cycliste

Un cycliste regonfle un des pneus de sa bicyclette. On admet qu'il parvient à doubler la pression atmosphérique p_0 . En supposant la transformation isentropique, quelle température atteint l'air dans la pompe en fin de compression sachant que l'air extérieur est la température Θ_0 ?

Données : l'air est assimilé à un gaz parfait de constante $r_a = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et d'exposant isentropique $\gamma_a = 1,4$. Caractéristiques de l'air extérieur : $p_0 = 1 \text{ bar}$, $\Theta_0 = 20^\circ \text{C}$.

1.2 Vitesse du son

On sait que, dans un gaz parfait, la vitesse du son est donnée par l'expression : $c(T) = \sqrt{\gamma r T}$. On considère alors un écoulement isentropique où les variations relatives de pression et de masse volumique sont notées $(\delta p)/p_0$ et $(\delta \rho)/\rho_0$. Quelles sont les limites supérieures de ces deux rapports si la variation relative de vitesse $(\delta c)/c_0$ ne doit pas dépasser