Б. А. СЕВАСТЬЯНОВ

КУРС ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Б. А. СЕВАСТЬЯНОВ

КУРС ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов вузов,
обучающихся по специальностям
«Математика» и «Механика»*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982

22.17
С 28
УДК 519.2

Севастьянов Б. А. **Курс теории вероятностей и математической статистики.**— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. — 256 с.

В основу книги положен годовой курс лекций, читавшихся автором в течение ряда лет на отделении математики механико-математического факультета МГУ. Основные понятия и факты теории вероятностей вводятся первоначально для конечной схемы. Математическое ожидание в общем случае определяется так же, как интеграл Лебега, однако у читателя не предполагается знание никаких предварительных сведений об интегрировании по Лебегу.

В книге содержатся следующие разделы: независимые испытания и цепи Маркова, предельные теоремы Муавра — Лапласа и Пуассона, случайные величины, характеристические и производящие функции, закон больших чисел, центральная предельная теорема, основные понятия математической статистики, проверка статистических гипотез, статистические оценки, доверительные интервалы.

Для студентов младших курсов университетов и втузов, изучающих теорию вероятностей.

С $\frac{1702060000-143}{053(02)\text{-}82}$ 12-82

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первоначальный курс теории вероятностей и математической статистики должен удовлетворять двум условиям. С одной стороны, он должен помогать развитию теоретико-вероятностной интуиции, т. е. умения строить математические модели, правильно отражающие те или иные стороны реальных случайных явлений. При этом надо иметь в виду, что теория вероятностей и математическая статистика тесно связаны с различными приложениями, с некоторыми из которых выпускникам математических отделений университетов с большой вероятностью придется столкнуться в своей работе. С другой стороны, теория вероятностей должна развиваться как математическая наука, построенная на точных определениях и аксиомах. Однако многие существующие руководства по теории вероятностей придерживаются одной из двух крайностей. В одних курсах, нацеленных на приложения, нет четкого разделения реальных случайных явлений и их математических моделей. В частности, важное в теории вероятностей понятие независимости молчаливо смешивается с причинной независимостью реальных явлений. Другие курсы посвящены, главным образом, строгому изложению математических основ теории вероятностей, поэтому они либо очень велики по объему, либо в значительной степени опираются на такие понятия функционального анализа, как мера и интеграл Лебега, и поэтому не могут быть использованы при обучении студентов младших курсов.

Содержание данного учебника соответствует годовому курсу теории вероятностей и математической статистики, который автор читал в течение ряда лет на механико-математическом факультете Московского государственного университета студентам-математикам 4-го и 5-го семестров. Для преодоления указанных выше трудностей автор придерживается некоторого компромиссного направления. Первоначально многие теоретико-вероятностные понятия введены в простом случае конечного вероятностного пространства. Приведен ряд примеров, в которых указана связь вводимых математических понятий с теми или иными свойствами реальных явлений. Общий случай основан на способе изложения, который связан с введением интеграла Лебега без теории меры. На 4-м семестре, когда студенты еще не знакомы с соответствующими понятиями функционального анализа, аксиоматически вводится понятие вероятностной меры и на ее основе определяется математическое ожидание как интеграл Лебега. Теорема Каратеодори о продолжении меры формулируется без доказательства. Понятия условного распределения вероятностей и условного математического ожидания даны не в полном объеме, а лишь в простых случаях дискретных и абсолютно непрерывных распределений. В основном автор старался опираться лишь на знание студентами классического математического анализа.

Главы 1—5 связаны в основном с конечными вероятностными пространствами. В этих главах введены основные понятия вероятности, математического ожидания, независимости, случайной величины. Распространение этих понятий на общий случай дано в главах 6—12. Главы 13—16 посвящены некоторым задачам математической статистики. Каждая глава сопровождается небольшим количеством задач. Однако автор предполагает, что читатель использует какой-нибудь задачник (например, Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Зубков А. М. Сборник задач по теории вероятностей. — М.: Наука, 1980).

Москва, *Б. А. Севастьянов*
май 1981 г.

Глава 1. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

§ 1. Предмет теории вероятностей

Сочетание слов «теория вероятностей» на неискушенного человека производит несколько странное впечатление. В самом деле, слово «теория» связывается с наукой, а наука изучает закономерные явления; слово «вероятность» в обычном языке связывается с чем-то неопределенным, случайным, незакономерным. Поэтому люди, знающие о существовании теории вероятностей только понаслышке, говорят о ней часто иронически. Однако теория вероятностей — это большой, интенсивно развивающийся раздел математики, изучающий случайные явления. Так в чем же тут дело? Как разрешить это противоречие между тем, что теория вероятностей — это наука, а ее предмет — случайность, которая, казалось бы, не поддается никакому научному предсказанию? Как мы увидим ниже, противоречие здесь только кажущееся, так как теория вероятностей изучает закономерности случайных явлений.

Математика, как и любая другая наука, изучает закономерные явления реального мира. Связь между математикой и объектом исследования можно изобразить схематически следующим образом (см. рис. 1). Классическим примером такой схемы является механика, созданная Ньютоном. На основе многовековых наблюдений движений небесных тел, а также практической деятельности людей, связанной со строительством и производством, Ньютон сформулировал несколько простых законов механики в виде аксиом и закон всемирного тяготения, из которых дедуктивными рассуждениями можно было объяснить все явления, которые наблюдались ранее, а также предсказать многие новые факты. Построение математических моделей реальных механических и физических процессов привело к созданию математического анализа, Закономерное событие — это событие, которое всегда осуществляется, как только создаются определенные условия. Закономерное явление — это система закономерных событий. Роль математики, в частности теории дифференциальных уравнений, при изучении реальных закономерных явлений общеизвестна. Но наряду с закономерными мы все время сталкиваемся в практической деятельности с событиями незакономерными или, иначе, случайными. Это события, которые при одних и тех же условиях иногда происходят, а иногда — нет. Например, человек, заболевший гриппом в период эпидемии, может выздороветь, может получить те или иные тяжелые осложнения, или умереть. Таким образом, исход заболевания гриппом случаен.

Рис. 1.

Казалось бы, что там, где мы имеем дело со случайными событиями, науке, в частности математике, делать нечего. Ведь наука открывает научные законы, которые помогают предсказывать течение того или иного процесса или явления, а случайное явление — это как раз такое явление, предсказать исход которого невозможно. Однако и случайные события подчиняются некоторым закономерностям, которые мы назовем *вероятностными* закономерностями. Прежде всего условимся, что мы будем иметь дело не со всякими случайными событиями, а с *массовыми* случайными событиями, т. е. мы будем предполагать, что в принципе возможно создать много раз одни и те же условия, при каждом из которых может произойти или нет некоторое случайное событие. Пусть при осуществлении некоторых условий N раз случайное событие A осуществляется $N(A)$ раз. Число $N(A)$ называется *частотой* события A, а отношение $N(A)/N$ — *относительной частотой* события A. Оказывается, при больших N относительная частота $N(A)/N$ для случайных массовых событий обладает так называемым свойством устойчивости, которое состоит в том, что в нескольких сериях из достаточно больших $N_1, N_2, \ldots, N_s$

наблюдений события A в одних и тех же условиях мы обычно имеем приближенные равенства

$$\frac{N_1(A)}{N_1} \approx \frac{N_2(A)}{N_2} \approx \ldots \approx \frac{N_s(A)}{N_s}.$$

Таким образом, относительная частота события A колеблется около одного и того же числа, которое характеризует данное случайное событие A. Это число $\mathsf{P}(A)$ в соответствующей математической модели мы будем называть вероятностью события A. Например, мы можем много раз подбрасывать одну и ту же монету. Пусть случайное событие A — это выпадение герба при одном бросании. В случае бросания «правильной» (симметричной, однородной) монеты $\mathsf{P}(A) = 1/2$. Статистика рождений показывает, что мальчиков рождается несколько больше, чем девочек, причем наблюдаемая доля рождений мальчиков равна 0,51—0,52 (в разные периоды, в разных странах могут быть колебания). Медицинская статистика свидетельствует о том, что смертность от гриппа имеет малую, но ненулевую вероятность (поэтому в условиях массовой эпидемии число смертных случаев от гриппа становится заметным).

Устойчивость частот — это объективное свойство массовых случайных явлений реального мира. Отсутствие устойчивости частот в сериях испытаний свидетельствует о том, что условия, при которых производятся испытания, претерпевают значительные изменения. Теория вероятностей — это математическая наука, которая изучает математические модели случайных явлений. Если говорить более подробно, то теория вероятностей устанавливает такие связи между вероятностями случайных событий в математических моделях, которые позволяют вычислять вероятности сложных событий по вероятностям более простых событий.

В теории вероятностей используются результаты и методы многих областей математики (комбинаторики, математического анализа, алгебры, логики и т. п.). Однако теория вероятностей обладает некоторым своеобразием, поскольку она очень тесно связана с различными приложениями, причем приложения эти не столь привычны, как, например, приложения дифференциальных уравнений. Поэтому овладеть теорией вероятностей может лишь тот, кто решает много задач (эти задачи часто имеют нематематическую постановку, и надо уметь построить соответствующую математическую модель) и приобретает, таким образом, теоретико-вероятностную интуицию.

§ 2. События

Одним из основных понятий теории вероятностей является случайное событие или, как мы будем чаще говорить, просто событие. В реальном мире случайное событие — это исход (какого-либо испытания, наблюдения, эксперимента), который может произойти (наступить, осуществиться) или не произойти (не наступить, не осуществиться).

Пример 1. При бросании игральной кости[1]) может выпасть число очков, равное какому-либо числу из множества чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Событиями в этом случае будут, например,

$$A=\{\text{выпадает четное число очков}\},$$

$$B=\{\text{выпадает число очков, не большее трех}\}.$$

В математической модели можно принять понятие события как первоначальное, которому не дается определения и которое характеризуется лишь своими свойствами. Исходя из реального смысла понятия события, мы можем определить следующие частные случаи понятия события и следующие операции над событиями. В тех случаях, когда мы одновременно рассматриваем несколько событий, мы всегда будем предполагать, что эти события могут произойти или не произойти при одном и том же испытании (т. е. при осуществлении одних и тех же условий).

Достоверным событием будем называть событие, которое всегда происходит, и будем его обозначать Ω. *Невозможным* событием назовем событие, которое никогда не происходит. Обозначать невозможное событие будем $\varnothing$. Событие $\bar{A}$ назовем событием, *противоположным* A,

[1]) Игральной костью называется кубик, сделанный из однородного материала, грани которого занумерованы цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Число очков, выпавшее при бросании игральной кости, — это цифра на верхней грани кубика.

если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит A. *Суммой* или *объединением* событий A и B назовем событие, обозначаемое $A \cup B$ или $A + B$, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят или A, или B (или оба вместе). *Произведением* или *пересечением* событий A и B назовем событие, обозначаемое $A \cap B$ или AB, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят и A и B вместе. *Разностью* $A \setminus B$ событий A и B назовем событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит A и не происходит B. События A и B назовем *несовместными*, если $AB = \varnothing$. Мы будем писать $A \subseteq B$ и говорить, что событие A *влечет за собой* событие B, если из наступления события A следует наступление события B. Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то мы будем говорить, что события A и B равносильны, и писать $A = B$.

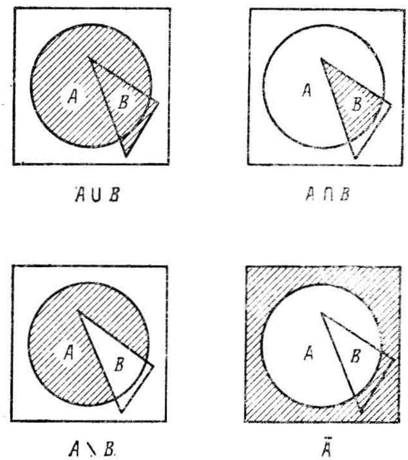

Рис. 2. Сумма, произведение, разность событий A и B; событие $\overline{A}$ противоположно A.

В примере 1 с бросанием игральной кости имеем следующие события:

$$A \cup B = \{\text{выпадает число очков, отличное от пяти}\},$$
$$A \cap B = \{\text{выпадает число очков, равное двум}\},$$
$$A \setminus B = \{\text{выпадает число очков, равное 4 или 6}\},$$
$$\overline{A} = \{\text{выпадает нечетное число очков}\}.$$

Пример 2. На квадрат случайно бросается частица (см. рис. 2);

событие $A = \{$частица попадает в круг $A\}$,

событие $B = \{$частица попадает в треугольник $B\}$.

События $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $\bar{A}$ в этом случае — это попадание частицы в области, получаемые объединением, пересечением, разностью областей A и B и дополнением $\bar{A}$ в квадрате (на рис. 2 соответствующие области заштрихованы).

В настоящее время в теории вероятностей наиболее распространенным является подход, в котором событие определяется через неопределяемое понятие элементарного события. Наиболее употребительная теоретико-вероятностная модель в простых случаях — это урновая модель. Пусть имеется урна с n одинаковыми шарами. Испытание состоит в том, что мы случайно выбираем из урны один шар. Обозначим $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ множество шаров в урне. Если из урны при испытании мы вынимаем шар $\omega_i \in A$, где A — некоторое подмножество множества шаров Ω, то мы будем говорить, что произошло событие A; если же $\omega_i \notin A$, то мы будем говорить, что событие A не произошло. В данном случае событие A отождествляется с подмножеством A множества всех возможных исходов или, как мы будем далее говорить, элементарных событий.

В общем случае мы будем в каждой теоретико-вероятностной модели рассматривать некоторое основное множество $\Omega = \{\omega\}$. Будем называть его элементы ω *элементарными событиями*, само множество Ω — *пространством элементарных событий*, а некоторые его подмножества $A \subseteq \Omega$ — *событиями*. Операции над событиями — это операции над подмножествами. При этом в теории вероятностей употребляется своя терминология, связь которой с теоретико-множественной терминологией отражена в таблице 1.

Операции суммы и произведения событий можно распространить на любое конечное или бесконечное множество событий $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$, $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$. Обычные свойства операций над множествами переносятся на операции над событиями, например,

$$\overline{\bigcup_{\alpha} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha} \bar{A}_\alpha, \quad \overline{\bigcap_{\alpha} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha} \bar{A}_\alpha, \quad \bar{\bar{A}} = A,$$

$$\bar{A} = \Omega \setminus A, \quad \bar{\varnothing} = \Omega, \quad \bar{\Omega} = \varnothing,$$

$$A \setminus B = A \setminus AB = A\overline{B}, \quad A \setminus (A \setminus B) = AB,$$
$$A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$$

и т. д. Иногда придерживаются следующего соглашения: если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны, то вместо $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ пишут $\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

В общем случае бесконечного пространства Ω мы рассматриваем не все подмножества Ω, а лишь некоторые классы этих подмножеств, называемые алгебрами и σ-алгебрами множеств.

Таблица 1

Обозначение	Терминология в теории множеств	Терминология в теории вероятностей
Ω	пространство (основное множество)	пространство элементарных событий, достоверное событие
$\omega, \omega \in \Omega$	элемент пространства ω	элементарное событие ω
$A, A \subseteq \Omega$	множество A	событие A
$A \cup B$, $A + B$	сумма или объединение множеств A и B	сумма событий A и B
$A \cap B, AB$	пересечение множеств A и B	произведение событий A и B
$A \setminus B$	разность множеств A и B	разность событий A и B
$\varnothing$	пустое множество	невозможное событие
$\overline{A}$	дополнительное множество A	противоположное A событие
$AB = \varnothing$	A и B не пересекаются	A и B несовместны
$A \subseteq B$	A есть подмножество B	A влечет событие B
$A = B$	A и B равны	A и B равносильны

Определение 1. Назовем класс $\mathscr{A}$ подмножеств пространства Ω *алгеброй множеств*, если

1) $\varnothing \in \mathscr{A}$, $\Omega \in \mathscr{A}$;

2) из $A \in \mathscr{A}$ следует $\bar{A} \in \mathscr{A}$;

3) из $A, B \in \mathscr{A}$ следует $A \cup B \in \mathscr{A}$, $A \cap B \in \mathscr{A}$.

Определение 2. Алгебру множеств $\mathscr{A}$ назовем *σ-алгеброй*, если из $A_n \in \mathscr{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, следует $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

§ 3. Вероятностное пространство

Определение 3. Тройку $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$, где Ω — пространство элементарных событий, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра подмножеств Ω, называемых *событиями*, P — числовая функция, определенная на событиях и называемая *вероятностью*, будем называть *вероятностным пространством*, если выполнены следующие аксиомы:

1°. $\mathsf{P}(A) \geqslant 0$ для всех $A \in \mathscr{A}$ (*неотрицательность* P);

2°. $\mathsf{P}(\Omega) = 1$ (*нормированность* P);

3°. $\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$, если $AB = \varnothing$ (*аддитивность* P);

4°. Если $A_n \downarrow \varnothing$, т. е. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \mathsf{P}(A_n) = 0$ (*непрерывность* P).

Из этих аксиом вытекают следующие свойства вероятности.

1) *Если* $A \subseteq B$, *то* $\mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$.

Так как $B = A + (B \setminus A)$ и $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$, то по аксиоме 3°

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A). \tag{1}$$

2) *Если* $A \subseteq B$, *то* $\mathsf{P}(A) \leqslant \mathsf{P}(B)$.

Следует из (1).

3) *Для любого* $A \in \mathscr{A}$

$$0 \leqslant \mathsf{P}(A) \leqslant 1.$$

Следует из 2), так как $\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$.