В. Е. ГМУРМАН

Введение в теорию вероятностей и математическую статистику

В. Е. ГМУРМАН

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКУЮ СТАТИСТИКУ

ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ, ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для инженерно-экономических институтов
и факультетов*

Государственное издательство «Высшая школа»
Москва — 1963

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании добавлены элементы математической статистики, предусмотренные программой по высшей математике для инженерно-экономических специальностей высших технических учебных заведений, а также добавлено несколько параграфов, учитывающих интересы студентов технологических и экономических специальностей. Учтены замечания кафедры высшей математики Ленинградского инженерно-экономического института, содержавшиеся в рецензии на рукопись пособия.

Большую работу при подготовке рукописи к изданию выполнили Г. А. Норина и В. Усачев. Этим лицам автор приносит глубокую благодарность.

Особую признательность автор выражает академику Б. В. Гнеденко за помощь в решении наиболее трудных вопросов.

Считаю своим долгом указать, что пособие написано по инициативе заведующего кафедрой высшей математики Московского полиграфического института доцента Ф. П. Андриевского, которого автор сердечно благодарит.

Автор обращается с просьбой к читателям сообщить свои критические замечания по адресу: Москва К-64, Подсосенский пер. 20, издательство «Высшая школа».

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Предмет теории вероятностей. Наблюдаемые нами события (явления) можно подразделить на следующие три вида: достоверные события, невозможные события и случайные события.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S.

Например, если в сосуде содержится вода при нормальном атмосферном давлении и температуре 20°, то событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии» есть достоверное. В этом примере заданные атмосферное давление и температура воды составляют совокупность условий S.

Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий S.

Например, событие «вода в сосуде находится в твердом состоянии» заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий предыдущего примера.

Случайным называют событие, которое при осуществлении совокупности условий S может либо произойти, либо не произойти.

Например, если брошена монета, то она может упасть так, что сверху будет либо герб, либо надпись. Поэтому событие «при бросании монеты выпал герб» — случайное.

Каждое случайное событие, в частности — выпадение герба, есть следствие действия очень многих случайных причин (в нашем примере: сила, с которой брошена монета, форма монеты и многие другие). Не представляется возможным учесть влияние на результат всех этих причин, поскольку число их очень велико и законы их действия неизвестны. Поэтому теория вероятностей не ставит себе задачей предсказание того, что единичное случайное событие произойдет или не произойдет, она и не в силах этого сделать.

По иному обстоит дело, если рассматриваются случайные события, которые могут многократно наблюдаться при осуществлении одних и тех же условий S, т. е. если речь идет о массовых однородных случайных событиях. Оказывается, что достаточно большое число однородных случайных событий, независимо от их конкретной природы, подчиняется определенным закономерностям, а именно — вероятностным закономерностям. Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Итак, предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать. Например, хотя, как было уже сказано, нельзя наперед определить результат одного бросания монеты, но можно предсказать, причем с небольшой погрешностью, число появлений герба, если монета будет брошена достаточно большое число раз. При этом предполагается, конечно, что все бросания монеты производятся в одних и тех же условиях.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках. Теория вероятностей служит также для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, предупредительном и приемочном контроле качества продукции и для многих других целей.

В последние годы методы теории вероятностей все шире и шире проникают в различные области науки и техники и этим способствуют их прогрессу.

Краткая историческая справка Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, представляли собой попытки создания теории азартных игр (Кардано, Гюйгенс, Паскаль, Ферма и др. в XIV—XVII вв.).

Следующий этап развития теории вероятностей связан с именем Якова Бернулли (1654—1705). Доказанная им теорема, получившая впоследствии название «Закона больших чисел», были первым теоретическим обоснованием накопленных ранее фактов.

Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана Муавру, Лапласу, Гауссу, Пуассону и др.

Новый, наиболее плодотворный период связан с именами П. Л. Чебышева (1821—1894) и его учеников А. А. Маркова (1856—1922) и А. М. Ляпунова (1857—1918). В этот период теория вероятностей становится стройной математической наукой. Ее последующее развитие обязано, в первую очередь, русским и советским математикам (С. Н. Бернштейн, В. И. Романовский, А. Н. Колмогоров, А. Я. Хинчин, Б. В. Гнеденко, Н. В. Смирнов и др.). В настоящее время ведущая роль в создании новых ветвей теории вероятностей принадлежит советским математикам.

Часть первая

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Глава первая

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Испытания и события

Выше мы назвали событие случайным, если при осуществлении определенной совокупности условий S оно может либо произойти, либо не произойти. В дальнейшем вместо того, чтобы говорить «совокупность условий S осуществлена», мы будем говорить кратко: «произведено испытание». Таким образом, мы будем рассматривать событие как результат испытания.

Пример 1. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел — это испытание. Попадание в определенную область мишени — событие.

Пример 2. В урне имеются цветные шары. Из урны наудачу берут один шар. Извлечение шара из урны есть испытание. Появление шара определенного цвета — событие.

§ 2. Виды случайных событий

События называют *несовместными,* если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример 1. Из ящика с деталями наудачу извлечена деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» — несовместные.

Пример 2. Брошена монета. Появление герба исключает появление надписи. События «появился герб» и «появилась надпись» — несовместные.

События называют *единственно возможными,* если появление в результате испытания одного и только одного из них является достоверным событием.

Пример 3. Приобретены два билета денежно-вещевой лотереи. Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий: «выигрыш выпал на первый билет и не выпал на второй», «выигрыш не выпал на первый билет и выпал на второй», «выигрыш выпал на оба билета», «на оба билета выигрыш не выпал». Эти события единственно возможные.

Пример 4. Стрелок произвел выстрел по цели. Обязательно произойдет одно из следующих двух событий: попадание, промах. Эти события единственно возможные.

События называют *равновозможными,* если имеются основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.

Пример 5. Появление герба и появление надписи при бросании монеты есть события равновозможные. Действительно, предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму и наличие чеканки не оказывает влияния на выпадение той или иной стороны монеты.

Пример 6. Появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости есть события равновозможные. Действительно, предполагается, что игральная кость изготовлена из однородного материала, имеет форму правильного многогранника и наличие очков не оказывает влияния на выпадение той или иной грани.

§ 3. Классическое определение вероятности

Вероятность является одним из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия. Здесь будет дано определение, которое называют классическим. Далее (§ 6) мы укажем слабые стороны этого определения и приведем другое (статистическое) определение вероятности, которое позволяет преодолеть недостатки классического определения.

Рассмотрим пример. Пусть в урне содержится 6 одинаковых тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них — красные, 3 — синие и 1 — белый. Очевидно, возможность вынуть наудачу из урны цветной шар (т. е. красный, либо синий) больше, чем возможность извлечь белый шар. Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается можно. Это число и называют вероятностью события. Таким образом, вероятность есть число, характеризующее возможность появления события.

Поставим своей задачей дать количественную оценку того, что взятый наудачу шар будет цветным. Появление цветного шара будем рассматривать в качестве события A. Каждый из возможных результатов испытания (испытание состоит в извлечении шара из урны), т. е. каждое событие, которое может наступить в испытании, назовем элементарным исходом. Элементарные исходы будем обозначать через E_1, E_2, E_3 и т. д. В нашем примере возможны следующие 6 элементарных исходов: E_1 — появился белый шар; E_2, E_3 — появился красный шар; E_4 E_5, E_6 — появился синий шар.

Легко видеть, что эти исходы несовместны (появление одного из шаров исключает появление любого из остальных), единственно возможны (обязательно появится один шар) и равновозможны (шар вынимают наудачу, шары одинаковы и тщательно перемешаны).

Те элементарные исходы, при которых интересующее нас событие наступает, назовем благоприятствующими этому событию. В нашем примере благоприятствуют событию A (появлению цветного шара) следующие 5 исходов: E_2, E_3, E_4, E_5, E_6.

Отношение числа благоприятствующих событию A элементарных исходов к их общему числу называют вероятностью события A и обозначают $P(A)$. В рассматриваемом примере всего элементарных исходов — 6, из них 5 благоприятствуют событию A. Следовательно, вероятность того, что взятый шар окажется цветным, равна $P(A)=\frac{5}{6}$.

Найденное число (вероятность) и дает ту количественную оценку возможности появления цветного шара, которую мы поставили своей задачей найти.

Дадим теперь определение вероятности.

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех несовместных, единственно возможных и равновозможных элементарных исходов испытания.

Таким образом, вероятность события A определяется формулой

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m — число элементарных исходов, благоприятствующих событию A; n — число всех возможных элементарных исходов испытания. Здесь предполагается, что элементарные исходы несовместны, единственно возможны и равновозможны.

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

1. *Вероятность достоверного события равна единице.*

Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае $m=n$ и, следовательно,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1.$$

2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае $m=0$ и, следовательно,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0.$$

3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. В этом случае $0<m<n$, а, значит, $0<\frac{m}{n}<1$ и, следовательно,

$$0<P(A)<1.$$

Итак, вероятность любого события удовлетворяет неравенствам

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

Далее будут указаны теоремы, которые значительно упрощают решение многих задач. Пока же приведем примеры, при решении которых используется лишь определение вероятности.

§ 4. Примеры непосредственного вычисления вероятностей

Пример 1. Набирая номер телефона, абонент забыл цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Обозначим через A событие — набрана нужная цифра.

Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны (если набрана некоторая цифра, то никакая другая набранной быть не может), единственно возможны (одна из цифр набрана обязательно) и равновозможны (цифра набрана наудачу).

Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна).

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{1}{10}.$$

Пример 2. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Обозначим через B событие — набраны две нужные цифры.

Всего можно набрать столько пар различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т. е. $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$. Таким образом, общее число возможных элементарных исходов равно 90. Эти исходы несовместны, единственно возможны и равновозможны. Благоприятствует событию B лишь один исход.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(B) = \frac{1}{90}.$$

Пример 3. Брошены два одинаковых кубика, грани которых занумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Найти вероятность того, что номер 6 появится хотя бы на одной грани.

Решение. Обозначим через A событие — номер 6 появился хотя бы на одной грани.

Каждый выпавший номер первого кубика может сочетаться со всеми номерами второго. Например, если на верхней грани первого кубика появилось число 5, то на верхней грани второго кубика может появится любое из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Аналогично обстоит дело, если появится любое число первого кубика. Таким образом, общее число возможных элементарных исходов равно $6 \cdot 6 = 36$. Эти исходы несовместны, единственно возможны и равновозможны.

Подсчитаем теперь число элементарных исходов, благоприятствующих событию A. Пусть на верхней грани первого кубика появилось число 6. При этом на втором кубике может появиться любое из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Все эти 6 исходов благоприятствуют событию A. Очевидно, мы получим еще 6 благоприятствующих исходов, если предположим, что число 6 выпало на втором кубике, а на первом появилось любое возможное число. Однако было бы неправильным заключить, что общее число благоприятствующих исходов равно $6 + 6 = 12$. Дело в том, что мы дважды засчитали тот исход, при котором число 6 появилось на гранях обоих кубиков. Итак, число исходов, благоприятствующих событию A, равно 11. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{11}{36}.$$

§ 5. Относительная частота. Устойчивость относительной частоты

Относительная частота, наряду с вероятностью, принадлежит к основным понятиям теории вероятностей.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний.

Таким образом, относительная частота события A определяется формулой

$$W(A) = \frac{M}{n},$$

где M — число появлений события, n — общее число испытаний.

Сопоставляя определения вероятности и относительной частоты, заключаем: определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; определение же относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически. Другими словами, вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту — после опыта.

Пример 1. Отдел технического контроля обнаружил 3 нестандартных детали в партии из 80 случайно отобранных деталей. Относительная частота появления нестандартных деталей равна

$$W(A) = \frac{3}{80}.$$

Пример 2. По цели произвели 24 выстрела, причем было зарегистрировано 19 попаданий. Относительная частота поражения цели равна

$$W(A) = \frac{19}{24}.$$

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производятся опыты, в каждом из которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости. Это свойство состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется очень мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события.

Таким образом, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.

Подробнее и точнее связь между относительной частотой и вероятностью будет изложена далее. Теперь же проиллюстрируем свойство устойчивости на примерах.

Пример 3. По данным шведской статистики относительная частота рождения девочек за 1935 г. по месяцам характеризуется следующими числами (числа расположены в порядке следования месяцев, начиная с января): 0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473.

Относительная частота колеблется около числа 0,482, которое можно принять за приближенное значение вероятности рождения девочек.

Заметим, что статистические данные различных стран дают примерно то же значение относительной частоты.

Пример 4. Многократно проводились опыты бросания монеты, в которых подсчитывали число появлений герба. Ниже приведены результаты нескольких опытов.

Число бросаний	Число появлений герба	Относительная частота
4040	2048	0,5080
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Здесь относительные частоты незначительно отклоняются от число 0,5, причем тем меньше, чем больше число испытаний. Например, при 4040 испытаниях отклонение равно 0,008, а при 24 000 испытаний отклонение равно лишь 0,0005. Приняв во внимание, что вероятность появления герба при бросании монеты равна 0,5, мы вновь убеждаемся, что относительная частота колеблется около вероятности.

§ 6. Ограниченность классического определения вероятности. Статистическая вероятность

«Классическое» определение вероятности предполагает что число элементарных исходов испытания — конечно. На практике же весьма часто встречаются такие испытания, число возможных исходов которых — бесконечно. В таких случаях классическое определение неприменимо. Уже это обстоятельство указывает на ограниченность классического определения. Правда, указанный недостаток может быть преодолен путем соответствующего обобщения определения вероятности.

Наиболее слабая сторона классического определения состоит в том, что очень часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий. Тем более затруднительно указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. Обычно о равновозможности элементарных исходов испытания заключают из соображений симметрии. Так обстоит дело, например, при бросании игральной кости, когда предполагают, что кость имеет форму правильного многогранника (куба). Однако задачи, в которых можно исходить из соображений симметрии, на практике встречаются весьма редко.

По этой причине наряду с классическим определением пользуются также статистическим определением вероятности.