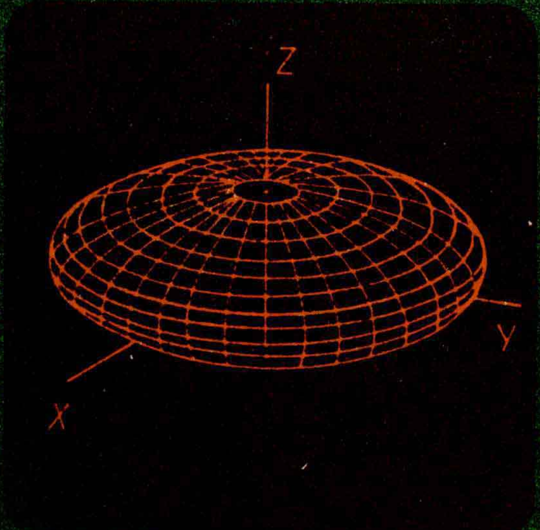
А. А. ГУСАК

# СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ



А.А. ГУСАК

# СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Издание третье,
дополненное

Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования БССР в качестве
учебного *пособия для* естественных *специальностей*
высших учебных заведений

Минск
«Вышэйшая школа»
1980

ББК 22.11 я 73
Г96
УДК 51(076)

Рецензент: Н. М. Матвеев, доктор физико-математических наук, профессор Ленинградского государственного университета им. А. А. Жданова

**Гусак А. А.**

Г 96 Сборник задач и упражнений по высшей математике: [Учеб. пособие для естест. спец. вузов].— 3-е изд., доп.— Мн.: Выш. школа, 1980.— 272 с., ил.

В пер.: 75 к.

Приведены основные определения и формулы, необходимые для решения задач, достаточное число примеров и задач с решениями, а также задачи и упражнения для самостоятельной работы студентов. Первое издание вышло в 1965 г., второе — в 1967 г. Написано по новой программе. Добавлены новые параграфы.
Предназначено для студентов биологических, географических и геологических специальностей вузов.

$$Г\frac{20203-122}{М304(05)-80}21-80 \quad 1702010000$$

ББК 22.11 я 73
517

## ПРЕДИСЛОВИЕ

«Сборник задач и упражнений по высшей математике» написан в соответствии с программами курса высшей математики для биологических, географических и геологических специальностей университетов. В нем отражены следующие разделы этого курса: метод координат на плоскости и его простейшие приложения, прямая на плоскости, линии второго порядка, функции и пределы, производная и дифференциал, приложения производной, неопределенный интеграл, определенный интеграл и его приложения, функции нескольких переменных, ряды, дифференциальные уравнения.

Третье издание «Сборника» является переработанным и дополненным. Оно содержит следующие новые параграфы: «Преобразование уравнения второй степени при параллельном переносе координатных осей», «Упрощение общего уравнения второй степени при повороте осей и параллельном переносе», «Приближенное решение уравнений», «Приближенное вычисление определенных интегралов», «Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и колебательные явления», «Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами» и др.

Уточнены и дополнены отдельные формулировки в теоретической части некоторых параграфов (§ 15, 16, 29, 45, 54 и др.). Приняты во внимание терминология и обозначения, применяемые в курсе математики средней школы, в соответствии с новыми программами по математике.

Некоторые примеры заменены другими, более полно и четко отражающими существо рассматриваемых вопросов (§ 34, 35, 42 и др.). Многие параграфы дополнены новыми примерами, задачами и упражнениями (§ 2—7, 9—12, 22, 28, 30, 36—39, 41, 46, 51—57), а два параграфа — новыми понятиями, примерами, задачами и упражнениями (в § 46 — понятия частных производных второго и высших порядков, в § 47 — достаточное условие экстремума функции двух переменных).

Структура пособия осталась прежней: в каждом параграфе имеются краткие теоретические сведения, подробно рассмотренные примеры, задачи для самостоятельного решения. Формулы теоретической части нумеруются в пределах каждой главы, в примерах нумерация формул сделана римскими цифрами (в каждом примере — своя). В конце книги приведены ответы, где к некоторым задачам даны указания, и приложения.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту — доктору физико-математических наук, профессору Н. М. Матвееву за критические замечания и ценные советы.

*Автор*

# Глава I. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ И ЕГО ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Положение точки на плоскости определяется парой чисел, называемых *координатами*. Существуют различные способы определения положения точки на плоскости, в зависимости от которых рассматривают разные системы координат: прямоугольные декартовы координаты, полярные и др.

## § 1. Прямоугольные декартовы координаты точки на плоскости. Простейшие задачи

*Прямоугольными декартовыми координатами* точки на плоскости называются расстояния этой точки $x=ML$, $y=MN$ (рис. 1) до координатных осей, измеренные в одних и тех же единицах длины и взятые с соответствующими знаками. Если точка расположена справа от оси $Oy$, то абсцисса $x$ данной точки положительна, если слева,— отрицательна; если точка лежит выше оси $Ox$, ее ордината $y$ положительна, в противном случае — отрицательна (при указанном выборе положительных направлений осей, обозначенных на рис. 1 стрелками).

Запись $M(x;\ y)$ означает, что точка $M$ имеет координаты $x$ и $y$.

*Расстояние между двумя точками* $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ вычисляется по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{1}$$

*Координаты точки* $C(x;\ y)$, делящей данный отрезок $AB$, где $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, в данном отношении $AC:CB=l$, определяются формулами:

$$x=\frac{x_1+lx_2}{1+l}\ ;\ y=\frac{y_1+ly_2}{1+l}\ . \tag{2}$$

Замечание. В формулах (2) нумерация точек имеет существенное значение. При использовании этих формул нужно различать начало и конец отрезка.

В частном случае, при $l=1$, получаем координаты середины $E(x;\ y)$ отрезка $AB$:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\ y=\frac{y_1+y_2}{2}\ . \tag{3}$$

*Площадь треугольника* с вершинами $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$

$$S=\frac{1}{2}\left|[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)]\right|, \tag{4}$$

где двумя вертикальными чертами обозначен модуль выражения, стоящего в квадратных скобках.

Замечание. *Модуль* действительного числа $x$ определяется так:

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x\geqslant 0;\\ -x, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

**Пример 1.** Вычислить длины медиан треугольника с вершинами $A(-2; -2)$, $B(2; 6)$, $C(8; -4)$.

Найдем сначала основания медиан, являющиеся серединами сторон треугольника. Пусть $D$, $E$, $F$ — соответственно середины сторон $AB$, $BC$, $AC$. Координаты точки $D$ определяем по формулам (3); в данном случае $x_1=-2$, $y_1=-2$, $x_2=2$, $y_2=6$. Обозначая координаты точки $D$ через $x_D$, $y_D$, получаем:

$$x_D=\frac{-2+2}{2}=0;\quad y_D=\frac{-2+6}{2}=2;\ D(0;\ 2).$$

Аналогичным образом находим:

$$x_E=\frac{2+8}{2}=5;\quad y_E=\frac{6+(-4)}{2}=1;\ E(5;\ 1);$$

$$x_F=\frac{-2+8}{2}=3;\quad y_F=\frac{-2+(-4)}{2}=-3;\ F(3;\ -3).$$

Вычислим длину медианы $AE$. Подставляя в формулу (1) координаты точек $A$ и $E$, т. е. значения $x_1=-2$, $y_1=-2$, $x_2=5$, $y_2=1$, получаем

$$|AE|=\sqrt{[5-(-2)]^2+[1-(-2)]^2}=\sqrt{58}.$$

По формуле (1) находим длины медиан $BF$ и $CD$:

$$|BF|=\sqrt{(3-2)^2+(-3-6)^2}=\sqrt{82};$$

$$|CD|=\sqrt{(0-8)^2+(2+4)^2}=10.$$

**Пример 2.** В треугольнике с вершинами $P(3;\ 2)$, $Q(7;\ 2)$, $R(7;\ -6)$ найти длину биссектрисы $QL$.

Из элементарной геометрии известно, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Найдем длины этих сторон. По формуле (1) получаем:

$$|PQ|=\sqrt{(7-3)^2+(2-2)^2}=4;\quad |QR|=\sqrt{(7-7)^2+(-6-2)^2}=8.$$

Следовательно, $|PQ|:|QR|=4:8=1:2$ и $|PL|:|LR|=1:2$, где $L(x;\ y)$ — точка пересечения биссектрисы угла $Q$ стороной $PR$. Координаты точки $L$ определим по формулам (2). В данном случае $x_1=3$, $y_1=2$, $x_2=7$, $y_2=-6$, $l=\frac{1}{2}$, поэтому

$$x=\frac{3+\frac{1}{2}\cdot 7}{1+\frac{1}{2}}=\frac{13}{3};$$

$$y=\frac{2+\frac{1}{2}(-6)}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3};\ L\left(\frac{13}{3};\ -\frac{2}{3}\right).$$

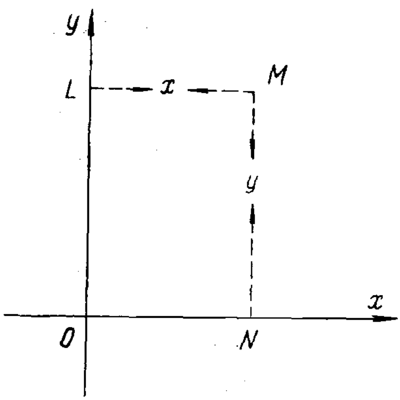



Рис. 1

По формуле (1) вычисляем длину биссектрисы $QL$:

$$|QL| = \sqrt{\left(7 - \frac{13}{3}\right)^2 + \left(2 + \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

**Пример 3.** Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки $L(0;\ 0)$, $M(-1;\ -1)$, $N(1;\ 0)$.

Пусть $C(a;\ b)$ — центр окружности и $R$ — ее радиус. Найдем числа $a$, $b$ и $R$. По определению окружности $|CL|=R$, $|CM|=R$, $|CN|=R$. Определяя длины $|CL|$, $|CM|$, $|CN|$ с помощью формулы (1) и подставляя их выражения в последние три равенства, получаем:

$$\sqrt{(0-a)^2+(0-b)^2}=R \text{ или } a^2+b^2=R^2; \qquad \text{(I)}$$

$$\sqrt{(-1-a)^2+(-1-b)^2}=R \text{ или } (1+a)^2+(1+b)^2=R^2; \qquad \text{(II)}$$

$$\sqrt{(1-a)^2+(0-b)^2}=R \text{ или } (1-a)^2+b^2=R^2. \qquad \text{(III)}$$

Раскрывая скобки в левых частях уравнений (II) и (III), используя уравнение (I) и приводя подобные члены, находим:

$$a+b+1=0;$$

$$1-2a=0.$$

Решая эту систему, получаем $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$, $C\left(\frac{1}{2};\ -\frac{3}{2}\right)$. Из уравнения (I) находим $R=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

**Пример 4.** Даны две точки $L(4;\ 2)$, $M(6;\ -2)$. На оси $Ox$ найти такую точку $N$, чтобы площадь треугольника $LMN$ была равна 8 квадратным единицам.

Пусть $N(x;\ 0)$ — искомая точка ($y=0$, так как точка лежит на оси $Ox$). В формулу (4) подставим значения $x_1=4$, $y_1=2$, $x_2=6$, $y_2=-2$, $x_3=x$, $y_3=0$, $S=8$. Получим

$$8=\frac{1}{2}|(6-4)(0-2)-(x-4)(-2-2)|=\frac{1}{2}|4x-20|;$$

$$16=|4x-20|.$$

Последнее равенство эквивалентно следующим двум:

$$16=4x-20;\ 16=-(4x-20),$$

откуда $x_1=1$, $x_2=9$. Следовательно, условиям задачи удовлетворяют две точки: $N_1(1;\ 0)$, $N_2(9;\ 0)$.

1. Построить точки $M_1\ (2;\ 3)$, $M_2\ (-4;\ 5)$, $M_3\ (-2;\ -7)$, $M_4\ (6;\ -8)$, $M_5\ (0;\ 2)$, $M_6\ (3;\ 0)$, $M_7\ (0;\ -4)$, $M_8\ (-6;\ 0)$, $M_9\ (0;\ 0)$.

2. Построить точки, симметричные точке $M\ (1;\ 4)$ относительно оси абсцисс, оси ординат, начала координат, биссектрисы первого координатного угла.

3. Найти координаты точек, симметричных точке $M_0\ (x_0;\ y_0)$ относительно оси абсцисс, оси ординат, начала координат, биссектрисы первого и третьего координатных углов.

4. Дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами $|AB|=2$, $|AD|=5$.

Найти координаты вершин прямоугольника, приняв его две непараллельные стороны за оси координат и точку их пересечения — за начало координат.

5. Дан ромб с диагоналями, равными 6 и 8. Найти координаты вершин ромба, приняв его диагонали за оси координат.

6. Точка, двигаясь прямолинейно, переместилась из точки $M_1$ (—2; —1) в точку $M_2$ (1; 3). Определить пройденный путь и угол между осью $Ox$ и направлением движения.

7. Вычислить периметр треугольника с вершинами $A$ (2; 2), $B$ (2; 6), $C$ (5; 2).

8. Показать, что треугольник с вершинами $P$ (2; 3), $Q$ (6; 6), $R$ (3; 2) — равнобедренный.

9. Доказать, что треугольник с вершинами $A$(3; 2), $B$(0; 1), $C$(2; —5) — прямоугольный.

10. На координатных осях найти точки, удаленные от точки $M$(6; —4) на 10 единиц.

11. Найти точку, одинаково удаленную от осей координат и от точки $M$(2; 9).

12. Разделить отрезок между точками $M_1$ (0; 6) и $M_2$ (2; 0) в таком же отношении, в каком находятся расстояния этих точек от начала координат.

13. От точки $M_1$(1; —1) до точки $M_2$(—4; 5) проведен отрезок. До какой точки его нужно продолжить в том же направлении, чтобы его длина утроилась?

14. Расстояние между точками $M_1$(2; $y$) и $M_2$($x$; —4) делится точкой $N$(3; —3) пополам. Найти эти точки.

15. Найти точку пересечения медиан треугольника, вершины которого $A$(—3; 6), $B$(6; 1), $C$(3; —4).

16. Вычислить площадь треугольника с вершинами $P$(1; —1), $Q$(5; 6), $R$(7; —3).

17. Даны две точки $L$(1; 3) и $M$(4; —6). На оси $Oy$ найти такую точку $N$, чтобы площадь треугольника $LMN$ равнялась 12 квадратным единицам.

18. Доказать, что точки $A$(—2; —1), $B$(—1; 1), $C$(1; 5) лежат на одной прямой.

19. Вычислить площадь четырехугольника с вершинами $A$(—5; 0), $B$(1; 2), $C$(4; —1), $D$(3; —4).

20. Найти координаты вершин правильного шестиугольника, сторона которого равна 2, при условии, что начало координат помещено в центре шестиугольника, а ось абсцисс проходит через две его противоположные вершины.

21. На оси $Oy$ найти точку, одинаково удаленную от начала координат и точки $M$(2; 5).

22. Найти центр тяжести треугольника с вершинами $A$(—1; 1), $B$(2; 4), $C$(5; 1).

23. Вычислить площадь пятиугольника с вершинами $A$(4; —2), $B$(2; 2), $C$(—2; 3), $D$(—3; —2), $E$(2; —5).

## § 2. Уравнение линии в прямоугольных декартовых координатах

Линия на плоскости задается как некоторое множество точек.

*Уравнением линии* на плоскости называется такое уравнение относительно $x$ и $y$, которому удовлетворяют координаты любой точки этой линии и только они.

В общем виде уравнение линии на плоскости в прямоугольных декартовых координатах записывается так:

$$F(x,\ y)=0,$$

где $F(x, y)$ — некоторая зависимость между $x$ и $y$.

Из определения уравнения линии следует, что если при подстановке координат точки в данное уравнение получается тождество, то точка лежит на соответствующей линии; если тождество не получается, то точка не лежит на этой линии.

Чтобы составить уравнение линии как некоторого множества точек, необходимо: а) взять произвольную точку линии с текущими координатами $x$ и $y$; б) записать общее свойство точек данного множества в виде равенства; в) выразить входящие в это равенство величины с помощью текущих координат.

**Пример 1.** Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных точек $M_1(-4;\ 3)$ и $M_2(2;\ 5)$.

Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка данного множества. По условию,

$$|M_1M|=|M_2M|. \qquad \text{(I)}$$

С другой стороны, по формуле расстояния между двумя точками:

$$|M_1M|=\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2};\ |M_2M|=\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}.$$

Подставляя эти выражения в равенство (I), находим уравнение данного множества точек:

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}.$$

Упростим его. Возводя в квадрат обе части уравнения и раскрывая скобки в подкоренных выражениях, будем иметь:

$$x^2+8x+16+y^2-6y+9=x^2-4x+4+y^2-10y+25.$$

Перенося все члены в левую часть, приводя подобные и сокращая на 4, получаем

$$3x+y-1=0.$$

Это уравнение является уравнением прямой линии (из элементарной геометрии известно, что множеством точек, указанным в условии задачи, будет прямая, перпендикулярная к отрезку $M_1M_2$ и проходящая через его середину).

**Пример 2.** Написать уравнение окружности радиуса $R=5$ с центром в начале координат. Лежат ли на этой окружности точки $A(4;\ 3)$, $B(1;\ 5)$, $C(-2;\ 9)$, $D(3;\ -4)$?

Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка окружности (множества точек, удаленных от точки 0 на 5 единиц). По определению окружности, $|OM|=5$.

Длина отрезка $[OM]$ по формуле (I) равна

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Следовательно, уравнение окружности имеет вид

$$\sqrt{x^2+y^2}=5$$

или

$$x^2+y^2=25.$$

Выясним, лежат ли на данной окружности точки $A$, $B$, $C$ и $D$. Подставляя координаты точки $A$ в уравнение окружности, получаем тождество

$$4^2 + 3^2 = 25.$$

Таким образом, точка $A$ лежит на окружности. Для точки $B$ имеем неравенство

$$1^2 + 5^2 \neq 25.$$

Следовательно, точка $B$ на окружности не лежит. (Отметим, что точка $B$ лежит вне окружности, так как $|OB| = \sqrt{26} > \sqrt{25}$.) Аналогичным образом убеждаемся в том, что точка $D$ принадлежит, а точка $C$ не принадлежит данной окружности.

**Пример 3.** Найти точки пересечения линий $x^2+y^2=10$ и $x+y-4=0$.

Точка пересечения двух линий лежит как на первой, так и на второй линии, поэтому ее координаты должны удовлетворять обоим уравнениям. С другой стороны, если координаты точки удовлетворяют уравнению как первой, так и второй линии, то точка принадлежит обеим линиям, т. е. является точкой их пересечения. Следовательно, для нахождения точек пересечения двух линий достаточно решить совместно систему их уравнений.

Решим данную систему. Из последнего уравнения определим

$$y = -x + 4 \qquad (1)$$

и подставим его выражение в первое уравнение:

$$2x^2 - 8x + 6 = 0.$$

После упрощений получим $x^2-4x+3=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=3$. Подставив эти значения в уравнение (1), найдем $y_1=3$, $y_2=1$. Следовательно, получены две точки пересечения $M(1; 3)$, $N(3; 1)$.

**Пример 4.** Найти точки пересечения окружности $x^2+y^2=16$ с координатными осями.

Для любой точки, лежащей на оси $Ox$, ордината $y$ равна нулю (по определению прямоугольных декартовых координат точки на плоскости). Обратно, если $y=0$, то точка лежит на оси $Ox$. Следовательно, ось $Ox$ имеет уравнение $y=0$. Аналогично можно показать, что уравнение оси $Oy$ будет $x=0$.

Чтобы получить точки пересечения данной окружности с осью $Ox$, необходимо решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16; \\ y &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда найдем две точки $A_1(-4; 0)$, $A_2(4; 0)$. Аналогичным образом получаем, что данная окружность пересекает ось $Oy$ в точках $B_1(0; -4)$ и $B_2(0; 4)$.

**Пример 5.** На окружности $x^2+y^2=25$ найти точку с ординатой $y=3$.

Подставляя значение $y=3$ в уравнение окружности, получаем $x^2+3^2=25$ или $x^2=16$, откуда $x_1=4$, $x_2=-4$. Таким образом, условию задачи удовлетворяют две точки $M_2(-4; 3)$, $M_1(4; 3)$.

**24.** Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, оставаясь втрое дальше от оси $Ox$, чем от оси $Oy$. Лежат ли на этой линии точки $P(1; 3)$, $Q(2; 5)$, $R(-2; 1)$?

**25.** Составить уравнение множества точек, удаленных от начала координат на 7 единиц. Принадлежат ли этому множеству точки $L(1; -2)$, $M(0; 7)$, $N(-4; 9)$?

**26.** Найти траекторию точки $M$, которая движется так, что ее расстояние от точки $A(3; 0)$ остается вдвое меньше расстояния от точки $B(-6; 0)$.

**27.** Составить уравнение множества точек, равноудаленных от начала координат и точки $M(4; -3)$.

**28.** Составить уравнение множества точек, одинаково удаленных от оси $Ox$ и от точки $A(0; 2)$.

**29.** Найти точки пересечения линии $3x-5y-15=0$ с координатными осями.

**30.** Найти точки пересечения линий, определяемых уравнениями $x^2+y^2=13$, $2x-y-1=0$.

**31.** Вычислить расстояние между точками пересечения линий $x^2+y^2=25$, $x+7y-25=0$.

**32.** Найти множество точек, равноудаленных от точек пересечения линий $x^2+y^2=25$, $2x-y+5=0$.

**33.** Определить траекторию движения точки $M$ в каждом из следующих случаев: 1) расстояние до оси $Oy$ равно $a$ единицам; 2) расстояние до оси $Ox$ равно $b$ единицам; 3) расстояния до координатных осей равны между собой.

## § 3. Полярные координаты

Полярная система координат на плоскости определяется точкой $O$ *(полюс)*, исходящим из нее лучом $[OP)$ *(полярная ось)*, масштабным отрезком $e$ и направлением отсчета углов (рис. 2, *а*).

*Полярными координатами* точки $M$, не совпадающей с полюсом, называются расстояние $\rho>0$ *(полярный радиус)* от точки $M$ до полюса $O$ и угол $\varphi$ *(полярный угол)* между полярной осью $OP$ и лучом $[OM)$. Для полюса считают $\rho=0$ (значение $\varphi$ не определено). Полярный угол $\varphi$ имеет бесконечное множество значений. Его значение, удовлетворяющее условию $0\leqslant\varphi<2\pi$, называется *главным.*

Точку $M$ с полярными координатами $\rho$ и $\varphi$ обозначают $M(\rho; \varphi)$.

При соответствующем выборе (полюс совпадает с началом координат, полярная ось — с положительной полуосью $Ox$) прямоугольной декартовой и полярной систем координат (рис. 2, *б*) связь между декартовыми координатами $x$ и $y$ точки $M$ и ее полярными координатами выражается формулами:

$$x=\rho\cos\varphi;\quad y=\rho\sin\varphi;$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2};\quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

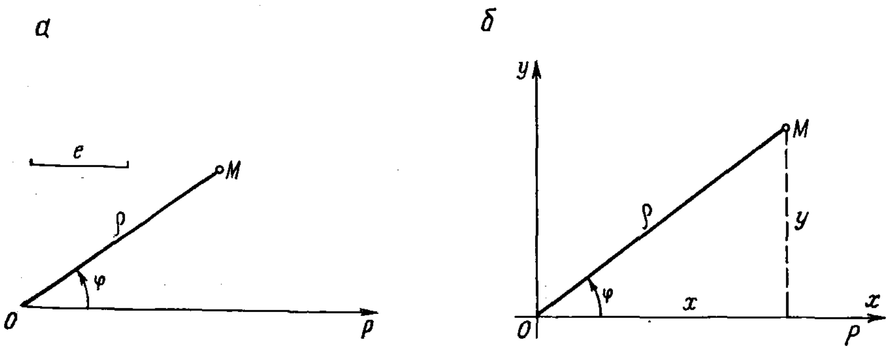



Рис. 2

Уравнение линии на плоскости в полярных координатах имеет вид

$$F(\rho, \varphi) = 0,$$

где $F(\rho, \varphi)$ означает некоторую зависимость между $\rho$ и $\varphi$.

**Пример 1.** Составить уравнение прямой, перпендикулярной полярной оси и отсекающей от нее отрезок, длина которого равна $a$.

Обозначим через $A$ точку пересечения данной прямой с полярной осью $OP$ (рис. 3). Пусть $M(\rho; \varphi)$ — произвольная точка данной прямой. Из прямоугольного треугольника $OAM$ находим

$$\rho \cos \varphi = a \Rightarrow \rho = \frac{a}{\cos \varphi}.$$

Полученное уравнение является искомым; ему удовлетворяют координаты любой точки данной прямой и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не принадлежащей этой прямой.

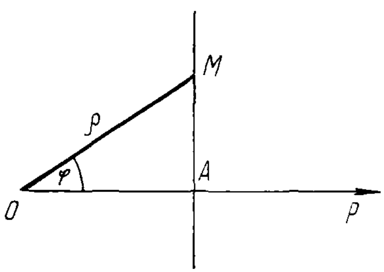



Рис. 3

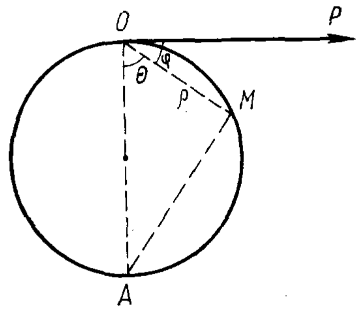



Рис. 4

**Пример 2.** Составить уравнение окружности радиусом $R$, касающейся полярной оси в полюсе, и центр которой расположен ниже полярной оси (рис. 4).

Возьмем произвольную точку $M$ данной окружности с текущими координатами $\rho$ и $\varphi$. Обозначив через $\theta$ угол $MOA$, из прямоугольного треугольника $OAM$ найдем, что

$$2R \cos \theta = \rho.$$

Поскольку $\cos \theta = -\sin \varphi$, то искомое уравнение примет вид

$$-2R \sin \varphi = \rho \text{ или } \rho + 2R \sin \varphi = 0.$$

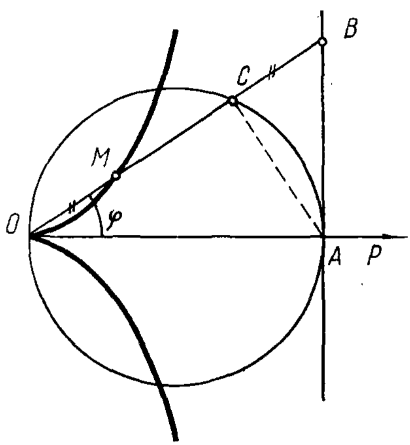



Рис. 5

**Пример 3.** Дана окружность диаметра $|OA| = 2a$ и касательная к ней в точке $A$ (рис. 5). Из точки $O$ проведен луч $[OC)$ и на нем отложен отрезок $[OM]$, равный отрезку $[BC]$, заключенному между окружностью и касательной. Если луч $[OC)$ будет вращаться вокруг точки $O$, то точка $M$ опишет линию, называемую *циссоидой Диоклеса*. Составить уравнение этой линии и построить ее.

Введем полярную систему координат, приняв за полюс точку $O$, а за полярную ось—луч $[OA)$. Полярные координаты точки $M$ обозначим через $\rho$ и $\varphi$.

Поскольку $\rho = |OM| = |OB| - |OC|$, а $|OB| = \dfrac{2a}{\cos\varphi}$ ; $|OC| = 2a\cos\varphi$, то

$$\rho = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Полученное уравнение и является уравнением данной линии.

Чтобы построить линию, достаточно получить ряд ее точек. Для этого нужно провести лучи $OC_1$, $OC_2$, ..., $OC_n$, найти соответствующие точки $M_1$, $M_2$, ..., $M_n$ (на основании определения линии) и соединить их. Циссоида Диоклеса изображена на рис. 5.

**Пример 4.** Построить линию, определяемую в полярной системе координат уравнением $\rho = a^{\varphi}$, где $a$ — произвольное положительное число, $a \neq 1$. (Эта линия называется *логарифмической спиралью.*)

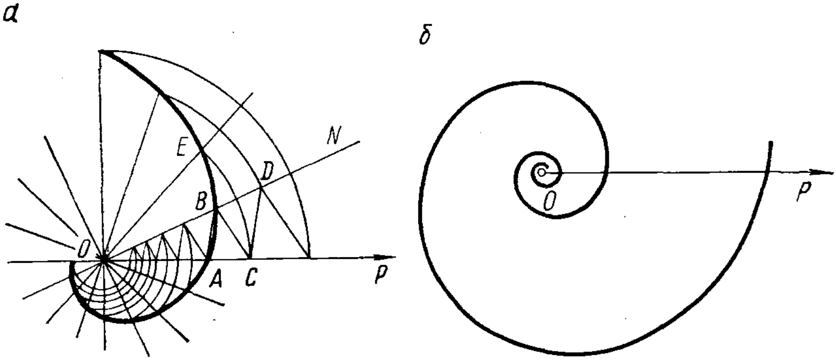



Рис. 6

Из уравнения $\rho = a^{\varphi}$ видно, что если $a > 1$, то $\rho = 1$ при $\varphi = 0$, $\rho$ неограниченно возрастает при $\varphi \to +\infty$, и спираль развертывается против хода часовой стрелки; $\rho$ неограниченно убывает при $\varphi \to -\infty$, и спираль закручивается по ходу часовой стрелки, делая бесконечное количество оборотов вокруг полюса. Если $a < 1$, спираль закручивается вокруг полюса против хода часовой стрелки.

Чтобы построить линию, необходимо зафиксировать некоторое значение $a$. Придавая произвольные значения $\varphi$, вычисляем соответствующие значения $\rho$. Каждой паре значений $\rho$ и $\varphi$ соответствует некоторая точка $M(\rho;\ \varphi)$. Эти точки можно построить и следующим образом. Проведем из полюса лучи под углом, равным, например, $\dfrac{\pi}{8}$ друг к другу (рис. 6, $a$). Тогда значения полярных радиусов точек спирали, которые откладываются на этих лучах, начиная от полярного радиуса $|OA| = 1$, направленного по полярной оси, будут $a^{\frac{\pi}{8}}$, $(a^{\frac{\pi}{8}})^2$, $(a^{\frac{\pi}{8}})^3$, . . . Выразив число $a^{\frac{\pi}{8}}$ соответствующим масштабу отрезком $[OB]$, отложим этот отрезок на луче $[ON)$ и получим точку $B$ данной спирали. Величину $(a^{\frac{\pi}{8}})^2 = |OB|^2$ полярного радиуса, который нужно отложить на следующем луче, найдем графическим путем, построив треугольник $OBC$, подобный треугольнику $OAB$, в результате чего $|OB|^2 = |OC|$; величину полярного радиуса, который нужно отложить на следующем луче, получим, построив треугольник $OCD$, подобный треугольнику $OAB$, и т. д. Для определения точек спирали, расположенных по ходу часовой стрелки от точки $A$, необходимо построить систему уменьшающихся подобных треугольников (рис. 6, *а*). Логарифмическая спираль изображена на рис. 6, *б*.

Замечание. В природе по логарифмической спирали очерчены некоторые раковины (например, *haliotis splendes*, рис. 7, *а*). В подсолнухе семечки расположены по характерным дугам, близким, как показывают соответствующие измерения, к дугам логарифмической спирали (рис. 7, *б*).

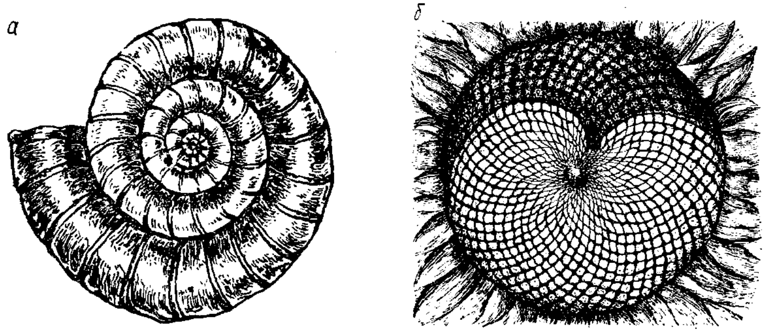



Рис. 7

**34.** В полярной системе координат построить точки $A(3;\ 0)$, $B\left(2;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, $C\left(1;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $D(4;\ \pi)$, $E\left(1{,}5;\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$.

**35.** Построить точки $A\left(7;\ \dfrac{\pi}{3}\right)$, $B\left(8;\ \dfrac{5\pi}{4}\right)$, $C\left(5;\ \dfrac{7\pi}{4}\right)$, $D\left(3{,}5;\ \dfrac{\pi}{6}\right)$, заданные полярными координатами.

**36.** Найти точки, симметричные относительно полюса соответственно точкам $A(2;\ 0)$, $B\left(8;\ \dfrac{\pi}{3}\right)$, $C\left(1;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $D\left(3;\ \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

**37.** Найти точки, симметричные относительно полярной оси соответственно точкам $A\left(1;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, $B\left(7;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $C\left(3;\ \dfrac{5\pi}{4}\right)$, $D\left(2;\ \dfrac{5\pi}{3}\right)$.

**38.** Вычислить прямоугольные декартовы координаты точек $A\left(\sqrt{2};\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, $B\left(1;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $C\left(\sqrt{8};\ \dfrac{3\pi}{4}\right)$, $D\left(2;\ \dfrac{11\pi}{6}\right)$, заданных полярными координатами.

**39.** Вычислить полярные координаты точек $A(2;\ 2)$, $B(0;\ -3)$, $C(1;\ -1)$, $D(6;\ 8)$, заданных прямоугольными декартовыми координатами.

40. Составить уравнение прямой линии, параллельной полярной оси и расположенной выше ее, если расстояние между ними равно $b$.

41. Составить уравнение прямой в полярных координатах, если известны ее расстояние $\rho$ до полюса $O$ и угол $\alpha$ между полярной осью и лучом, направленным из полюса перпендикулярно к этой прямой.

42. Составить уравнение окружности радиусом $R$, проходящей через полюс, центр которой лежит на полярной оси.

43. Составить уравнение окружности радиусом $R$, касающейся полярной оси в полюсе, центр которой лежит выше полярной оси.

44. Написать в декартовых координатах уравнения линий: 1) $\rho = R$; 2) $\rho \sin\varphi = b$; 3) $\rho\cos(\varphi - \alpha) = p$; 4) $\rho = 2a\cos\varphi + b$; 5) $\rho = \dfrac{a(1 \pm \sin\varphi)}{\cos\varphi}$; 6) $\rho = \dfrac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$.

45. Написать в полярных координатах уравнения линий: 1) $x^2 + (y + R)^2 = R^2$; 2) $(x - R)^2 + y^2 = R^2$; 3) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$; 4) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$; 5) $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = b^2 - a^4$.

46. Из точки $O$ на окружности радиусом $R$ проводится луч $OK$, от точки $L$ пересечения его с окружностью откладывается отрезок $|LM| = 2R$ по направлению луча $[OK)$. Линия, описываемая точкой $M$ при вращении луча на полный оборот вокруг точки $O$, называется *кардиоидой*. Составить уравнение кардиоиды и построить ее.

47. Составить уравнение множества точек, произведение расстояний которых до двух данных точек $F_1$ и $F_2$ есть постоянная величина, равная $a^2$, где $a$ — половина расстояния между точками $F_1$ и $F_2$ (эта линия называется *лемнискатой Бернулли*). Построить линию.

48. Через точку $E(a; \frac{\pi}{2})$ проведена прямая, параллельная полярной оси. Произвольный луч $[OK)$ пересекает эту прямую в точке $K$. На луче по обе стороны от точки $K$ отложены отрезки $|KM_1| = |KM| = l$. Множество точек $M$ и $M_1$ называется *конхоидой Никомеда*. Составить уравнение конхоиды и построить ее.

49. Написать уравнение множества точек, произведение расстояний которых до двух данных точек есть величина постоянная, равная $a^2$; расстояние между $F_1$ и $F_2$ равно $2b$. Построить кривую (она называется *овалом Кассини*; при $b = a$ получаем лемнискату Бернулли, см. задачу 47).

50. На окружности радиусом $r$ фиксирована точка $O$. Если прямая $(ON)$ вращается около точки $O$, то точки $M_1$ и $M_2$, находящиеся на данной прямой и отстоящие на расстоянии $l$ от точки $N$ пересечения прямой с окружностью, опишут кривую, называемую *улиткой Паскаля*. Составить уравнение этой кривой и построить ее (при $l = 2r$ получим кардиоиду).

**51.** Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах: 1) $\rho = 7$; 2) $\rho = \frac{4}{\cos\varphi}$; 3) $\rho = \frac{5}{\sin\varphi}$; 4) $\varphi = \frac{\pi}{6}$; 5) $\rho\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) = 2$; 6) $\rho + 6\sin\varphi = 0$.

**52.** Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах: 1) $\rho = a\varphi$ (*спираль Архимеда*); 2) $\rho = \frac{a}{\varphi}$ (*гиперболическая спираль*); 3) $\rho = a\sin 3\varphi$ (*трехлепестковая роза*); 4) $\rho = a\sin 2\varphi$ (*четырехлепестковая роза*).