統計基礎数学

愛知県立大学教授
小杉　肇 著

恒星社厚生閣

統計基礎数学

愛知県立大学教授
小杉　肇 著

恒星社厚生閣

著 者 紹 介

小 杉 肇

1920 年，愛知県生．
旧制八高，東大理学部卒．
現在，愛知県立大学教授．
主な著書「*e* の数学」
「統計学史通論」

統 計 基 礎 数 学 **価 2300円**

昭和 45 年 4 月 25 日 発行

著 者 小 杉 肇
発行者 志 賀 正 路

発行所 株式会社恒星社厚生閣
東京都新宿区三栄町 8
電話 東京(359)7371～5
振替 東京 59600 〒160

新日本印刷・青木製本

(分) 1041 (製) 200070 (出) 2244

目　　次

第I章 序　　論

第II章 初等確率論

第III章 行 列 式

第IV章 行 列

第 V 章　集合と函数

第 VI 章　無　限　級　数

第 VII 章 函数の展開

第 VIII 章 凸函数

第 IX 章 偏微分の理論と応用

第 X 章　調　和　解　析

第I章 序　論

§1 自　然　数

数学の基礎は自然数の概念である．この概念は“物を数える”ということから出発し，

“単位からの抽象”

の結果得られるものである．

自然数の心理的発生の順序から離れ，これを論理的に定義しようとすると，なかなか困難である．この根本的な問題は措いて，われわれは“自然数の概念”は一応体得しているものとして進むことにする．

(I) 自然数の性質

先ず自然数系

$$(N):1,2,3,\cdots\cdots$$

の性質を列記して，知識を組織付ける基礎とする．

(i) (N) には順序がある．

1のあとに 2，2 のあとに 3,…… というように (N) の何れの一数をとっても，必ずそのあとに続くものが一つ，然も唯一つ存在する．

nのあとに続くものを“nの後者”と名付け，n^* で表わすことにする．すなわち，

$$1^*=2,\quad 2^*=3,\cdots\cdots$$

(N) に属する数には，最初の1を除けば，必ずその前にくるものが唯一つ存在する．これをそれぞれの前者という．n の前者を $^*n$ で表わす．すなわち，

$$^*2=1,\quad ^*3=2,\cdots\cdots$$

^{*1} は明らかに存在しない．

(ii) 自然数 n に1を加えることは，n からその後者 n^* を作る演算である．すなわち，

$$n+1=n^*$$

(iii)　二つの自然数の和は

≪定義≫　$$a+(b+1)=(a+b)+1$$

から順次きめられるものである.

(iv)　二つの自然数の積は

≪定義≫　$$a\cdot 1=a,\ a(b+1)=a\cdot b+a$$

から順次きめられるものである.

以上の和及び積を作る演算をそれぞれ加法・乗法という. これらは次の法則によって支配される.

第 I.1 表

加　法	交換法則	$a+b=b+a$
	結合法則	$a+(b+c)=(a+b)+c$
乗　法	交換法則	$a\cdot b=b\cdot a$
	結合法則	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
分配法則		$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

(II)　自然数の公理

以上の事実を既知として, 稿を進める. 一般的に既知として取扱うものは可能な限り少数にとどめ, その他の事項はそれからすべて論理的に導き出すことが好ましいとされている. この立場から,われわれは自然数系 (N) を Peano によって, 次の公理群で定義することにする.

≪自然数系 (N) の定義≫

[N_1]　(N)は1を含む.

[N_2]　(N)に属する数 a の後者は常に唯一つ存在する. これを a^* とする.

[N_3]　1には前者がない.
1以外の (N) の数 a の前者は常に唯一つ存在する. これを $^*a$ とする.

[N_4]　(N) は1とその順次の後者 $1^*, 1^{**}, 1^{***}, \cdots\cdots$ から成る.

(Peano : Formulaire des mathematiques, 1898)

このように自然数系 (N) を定義した上で, 1の後者 1^* を2, 2の後者 2^*

を 3,…… とよび，順次 4,5,6,…… を定義する．

一般に自然数 a の後者 a^* を $a+1$ で表わす．従って，

$$1+1=2,\ 2+1=3,\ 3+1=4,\cdots\cdots$$

(III)　自然数の演算

相等の記号＝を次のように規定する．ただし，$a=b$ の否定は $a\neq b$ とする．

[E_1]　$a=b$ であるか，然らざれば，$a\neq b$ が成立する．

[E_2]　$a=a$

[E_3]　$a=b$ であれば，$b=a$ である．

[E_4]　$a=b$ でかつ $b=c$ であれば，$a=c$ が成立する．

一つの自然数 a に第二の自然数 b を加えるということは，a,b から第三の自然数 c を定める一つの演算である．これを“加法”とよび，c を a, b の和という．これは，

$$a+b=c$$

と表わされる．この＋は前出の規定（I, iii）によって定義される操作である．

加法の外，a,b から第三の自然数 c を定める第二の操作がある．これを乗法といい，c を a,b の積とよぶ．これは，

$$a\times b=c \quad \text{または} \quad a\cdot b=c \quad \text{または} \quad ab=c$$

と表わし，前出の規定（I, iv）で定義される．

(IV)　数学的帰納法

自然数系（N）の公理から，数学全体にわたって有力な推論の一原則が立てられる．すなわち，

（ｉ）　一つの定理が 1 に対して成立する．

（ii）　該定理が（N）の任意の一数 n に対して成立するとすれば，必ず $n+1$ に対しても成立する．

という二つの前提から（N）のすべての数に対して該定理が成立することが結論される．これを“数学的帰納法”という．

これは一般に公理として行なわれている．然し，ここでは定理としてあつかう．それは証明をたどることによって，自然数系の内容がより明白に理解され，これを利用するときのよい指針となるからである．

≪証明≫

今，該定理が (N) のすべての数に対しては成立しないと仮定すれば，(N) の内にこれの成立しない最初の数がなければならない．これを m とすれば，(i) から，

$$m \neq 1$$

ここに $[N_3]$ によって，m の前者 $^*m$ が存在するが，m は該定理が成立しない最初の数であるから，その前者 $^*m$ に対しては定理は成立する．故に (ii) から $(^*m)^* = m$ に対しても定理は成立しなければならない．これは矛盾である．

故に，該定理は (N) のすべての数に対して成立しなければならない．(了)

数学的帰納法はこのように確固たる基礎の上に建設されているのであって，自然科学における帰納法のように不確実・蓋然的な点はなく，常に正しい結論を導くものである．この故に時として，"完全帰納法"とも称せられる．これは，次のように拡張して広く利用される．すなわち，

一つの命題が数列

$$a_1, a_2, \cdots\cdots$$

の各数に対して成立することを断定するには下記の二点を明らかにすればよい．

(i)　この命題が第一の数 a_1 に対して成立すること．(基礎)

(ii)　数列の一数 a_n に対して（または a_1 から a_n までの総てに対して）成立すると仮定すれば，その次の数 a_{n+1} に対してもまた成立しなければならないこと．(移行の根拠)

問　　題

(1)　二項定理

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \cdots + b^n$$

を証明せよ．ただし，n は正整数，

$$\binom{m}{0} = {}_mC_0 = 1,\quad \binom{m}{r} = {}_mC_r = \frac{m!}{r!(m-r)!}$$

である．

（2）　$$\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

を証明せよ．ただし，nは正整数である．

（3）　$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}<\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$$

を証明せよ．ただし，nは1より大きい整数である．

（4）　mが1より大きい整数であって，aとbとが相等しくないときは

$$\frac{1}{2}(a^m+b^m)>\left(\frac{a+b}{2}\right)^m$$

であることを証明せよ．

（5）　$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を総て正の数とすれば，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i \geqq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i} \geqq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$$

であり，かつ，等号が表われるのは，これらの数が悉く相等しい場合にかぎることを証明せよ．

（6）　$2n$ 個の数 $1, 2, \cdots, 2n$ のなかから任意に $n+1$ 個の数をとり出す．このとき，選び出された数のうちに，一方が他方で割り切れるような少なくとも2つの数があることを証明せよ．

（7）　一平面上に $m+n$ 個の直線があり，その中 m 個は同一点を通過し残りの n 個は他の同一点を通過する．かつ，これらの直線中には平行なものまたは相合するものはないとする．これらの直線が平面を分つ部分の数は $mn+2m+2n-1$ であることを証明せよ．

（8）　平面内に n 個の点があるとき，これらを結合する直線の交点の全数を求めよ．ただし，これらの直線は何れの二つも平行でなく，またもとの n 個の点を除いては何れの三つも同一点で会することはないものとする．

§2　測　　定　　値

統計（学）では“数量”を取扱うが，数学におけるとは，更にまた自然科学一般における数量とは異なった数量が現われることが多い．この数値が数学におけるもの，または物理的な測定で得られたような数値と同じような取扱い

――統計的手法――が可能であるかどうか，またそれはどんな意味をもつものであるかをつねに考えなければならない．

事象のある特性に着目し，これを"数量化 (quantification) する"ことが統計の出発点であると同時に，"如何なる方法に基づいて数量を与えたか"が，あとに続く"統計的処理"を決定する重要な鍵である．数量化の仕方に応じて与えられた数値の性質が決定されるのであるから，特に人間の複雑な行動に関連する事象を取扱う場合には注意が必要である．

（I） 測定への数の適用

われわれが測定に際して数を使用する――対象または事象に数を割り当てる――ことのできるのは，数を適用しようとする対象または事象の特性が数の特性と並行しているとき，然もその限りにおいてのみである．従って，われわれは数の特性や相互関係の充分な吟味が必要なのである．

簡単にいえば，測定のために最も大切な数の特性は，

同一性 (identity)
順序性 (rank order)
加法性 (additivity)

の三者である．数は互いに相等しい場合を除けば，論争の余地のない順序で，一次元の尺度上に配列することができる．加法性があるということは加減乗除の4種の基本的演算がすべて適用できることを意味する．何故ならば，減法，乗法，除法はすべて加法の特殊な場合と考え得られるからである．すなわち，減法は二つの数のうち，一方の数が負号をもつ場合の加法であり，乗法は同一数の連続的な加法の過程であり，除法はこれと反対に連続的な減法の過程，換言すれば，負数の連続的加法である．この故に加法性があれば，すべての基本的演算はその中に含まれることになる．

(II) 有効な測定

有効な測定が行なわれるためには，現象が必ずしも加法性を含めた数のすべての特性を満たすには及ばない．順序性があれば，多くの目的にとって充分である．然し，加法性の条件が満たされない場合には，割り当てられた数の意味が限定されるので，すべての演算を適用するわけにはいかなくなる．

“測定値”はそれぞれの完全さの程度において異なるものである．完全である程，測定値は有意味であり，また有効である．われわれは“測定値というもの”が必ずしも完全な数ではないことを充分認識して，そのもっている以上の意味を測定値に与えないようにしなければならない．

(III) 測 定 の 尺 度

測定とは対象や事象に，規則に従って，数字を割り当てることであるから，数字の割り当て方の規則が，その尺度を規定する本質的な基準になる．高い水準の尺度には一層厳格な規則が要求され，従って，より多くの数の基本公理が適用されることになる．そして尺度の水準が高まれば，測定結果の数にますます高度の演算が行なわれる．

(i) 名義尺度 (nominal scale)

この場合には，数値は単なる符号の意味しかもたない．同一の組あるいはカテゴリーに属するものに，

$$0, 1, 2, \cdots\cdots$$

などの数値のいずれかを与えるもので，丁度学校の一組，二組，……などの学級番号を表わす数値と同じといえる．従って，

一組，二組，……

でなくても，

A組，B組，……

でもよいわけで，この場合の数値は単なる符号に過ぎず，この間に代数的な関係はない．すなわち，このような数値は便宜的に付与された記号にすぎないものである．

(ii) 序数尺度 (ordinal scale)

これは，順序の比較ができる数値を取扱う場合で，例えば 10 人の子供を成績順に並べて成績の良いものから，

$$1, 2, 3, \cdots\cdots, 10$$

と数値を付与したとすれば，これらの数値が序数尺度値といえる．1の数値をもつものの成績が2のものの成績より良く，また 3, 4, ……, 10 の数値を与えられたものの成績よりも良いことを示している．この中から任意の二つを選ん

だとき，常に数値の小さい者の成績の方が，大きい数値をもつものの成績よりもよいという関係が成立する．

心理学，教育学などの実際的研究においての場合，このように順序のみが与えられる事象，従って，そのような数値群を取扱う場合がよく起こるものである．

(iii) 距離尺度 (interval scale, equal unit scale)

距離尺度とは数値間の間隔（距離）に加法性が成立する場合である．すなわち，この場合には等価な単位 (unit) が要求されているものである．例えば，温度を例にとると，10℃ の水と 20℃ の水とを同じ量だけ加え合わせると，その平均の 15℃ の水が得られるという形で扱われ得る数値である．この場合，絶対 0 度の位置は必要でなく，0 点は任意にどこにとってもよい．0 点の位置はどこにあっても，加法性さえ保証されればよいのである．

数値が距離尺度としての性質をもっていれば，その数値の算術平均を求めたり，標準偏差を計算したり，ピアソンの相関係数を求めるなどの統計的処理が可能である．

(iv) 比例尺度 (ratio scale)

距離尺度としての性質をもつ上に，絶対 0 点をもっている尺度値である．例えば，身長，体重などを表わす数値がこれである．この尺度値については広汎な統計的手法が適用される．

第 I.2 表

尺　度	保証される経験的操作	許される統計的手法	例
名義尺度	相等性．	事例数を数えあげること．モードを決めること．属性相関を求めること．	学級に番号をつける．
序数尺度	数値間により大またはより小の関係．	中位数を求めること．百分位数を求めること．順位相関を求めること．	鉱物の硬度．臭の快度．
距離尺度	数値間の間隔(距離)がどこでも同等であること．	算術平均を求めること．標準偏差を求めること．順位相関を求めること．ピアソンの相関係数を求めること．	温度 標準得点
比例尺度	数値の比がつねに同等であること．	幾何平均を求めること．変異係数を求めること．	長さ，重さ，密度，音の高さ，大きさの尺度．