

МАТЕМАТИКА СЕГОДНЯ

Научный сборник



В науке нет широкой
столбовой дороги,
и только тот может достигнуть
ее сияющих вершин,
кто, не страшась усталости,
карабкается по ее
каменистым тропам.

К. МАРКС

1

ИДЕИ И ПРОБЛЕМЫ
СОВРЕМЕННОЙ
МАТЕМАТИКИ

2

НЕРЕШЕННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ПРОБЛЕМЫ

3

ЗАДАЧИ
И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

МАТЕМАТИКА СЕГОДНЯ

НАУЧНЫЙ СБОРНИК

Под редакцией
доктора
физико-математических наук,
профессора
А. Я. ДОРОГОВЦЕВА

КИЕВ
ГОЛОВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1983

Математика сегодня: Научный сборник / Под ред. проф. А. Я. Дороговцева. — Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1982. — 192 с.

Сборник содержит статьи, посвященные актуальным направлениям развития математики и ее методам.

Первый цикл статей — это живое и увлекательное изложение отдельных научных направлений, к которым в настоящее время проявляется повышенный интерес. Здесь рассматривается, в частности, теория твисторов Пенроуза; задача четырех красок, которая была поставлена более ста лет назад и при исследовании которой созданы алгебраические средства, хотя и не приведшие к ее решению, но интересные сами по себе; изложено развитие идей французского математика Э. Галуа и дан обзор знаменитого трактата К. Жордана по теории групп; приведено оригинальное доказательство теоремы Лагранжа о четырех квадратах, использующее арифметические свойства кватернионов.

Следующие статьи содержат постановку нерешенных математических проблем и анализ задач олимпиады «Студент и научно-технический прогресс» по математике. Предложены также новые задачи и решения ряда задач, полученные студентами.

Сборник предназначен для студентов, преподавателей вузов и для тех, кто интересуется современными проблемами математики.

Табл. 3. Ил. 15.

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук Ю. П. Студнев (Ужгородский государственный университет), кандидат физ.-мат. наук В. Э. Кацнельсон (Харьковский государственный университет)

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией Е. Л. Корженевич.

М 1702000000—044
М211(04)—83 103—83

© Издательское объединение
«Вища школа», 1983

В Основных направлениях экономического и социального развития СССР на 1981—1985 годы и на период до 1990 года говорится, что развитие науки и техники должно быть в еще большей мере подчинено решению экономических и социальных задач советского общества. В частности, выдвигается задача развития математической теории, повышения эффективности ее использования в прикладных целях¹.

Одной из наиболее ярко выраженных особенностей развития современной науки и ее приложений является их математизация. Наряду с математической физикой и математическими методами механики для нас стали привычными термины: математическая биология, математическая лингвистика, математическая экономика и т. п. Именно нашему времени представляются особенно созвучными пророческие слова И. К а н т а (1724—1804): «Во всяком учении о природе можно найти науки в собственном смысле лишь столько, сколько имеется в ней математики». При этом в большинстве новых приложений речь идет не только об использовании известных математических моделей и методов, но и о разработке новых математических идей. Эта особенность современного развития науки в сочетании с большими возможностями мощных вычислительных машин привела к тому, что профессия математика стала массовой.

Математиков классических специальностей, которые будут заниматься разработкой математических проблем или их приложениями, а также преподавателей математики готовят ныне многие вузы нашей страны. В постановлении ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О дальнейшем развитии высшей школы и повышении качества подготовки специалистов»

¹ Материалы XXVI съезда КПСС.— М.: Политиздат, 1981, с. 146.

отмечалось, что главное внимание высшей школы должно быть сосредоточено на идейно-политическом воспитании будущих специалистов и на всестороннем улучшении качества их профессиональной подготовки.

Рост числа студентов-математиков и повышение роли математики при обучении студентов других специальностей поставили перед вузами ряд новых и весьма трудных методических проблем. Эти проблемы усугубляются, в свою очередь, тем, что сама математическая наука, интенсивно развиваясь, почти постоянно перестраивается, сравнительно быстро меняет актуальность различных направлений. Вузам очень важно своевременно учитывать изменения и требования научного прогресса, постоянно заботиться о высоком уровне подготовки специалистов.

Опыт университетского образования показывает, что наиболее успешным и эффективным средством повышения этого уровня является привлечение студентов, начиная с первого курса, к посильной, но достаточно серьезной самостоятельной научно-исследовательской работе. Поэтому основные требования к подготовке специалистов включают качественное обучение фундаментальным математическим дисциплинам, частичную специализацию в одном из узких современных направлений математики и обязательное, по возможности полное, развитие навыков самостоятельной исследовательской работы, что, в свою очередь, невозможно без систематического упорного умственного труда.

Кроме того, студенты должны иметь общее представление о современных математических идеях и достижениях, выходящих за рамки их специализации, понимать, что математика едина.

Из сказанного выше вытекает цель выпуска настоящего сборника — популяризация на доступном студентам уровне современных научных идей и проблем математики, привлечение студентов, особенно младших курсов, к серьезной самостоятельной работе.

Общие проблемы и пути развития математической науки, а также ее отношение к практической деятельности человека рассматриваются в статье академика АН УССР, заместителя директора Института математики АН УССР В. С. К о р о л ю к а.

О возрождении внимания математиков к старой идее комплексной реализации пространства, ее исполь-

зовании в современных задачах евклидовой теории поля и при решении важных линейных и нелинейных задач математической физики рассказывается в статье старшего научного сотрудника Межфакультетской проблемной НИЛ МГУ С. Г. Гиндикина.

Изложению современного состояния классической задачи о четырех красках, ее связи с теорией графов посвящена статья кандидата физико-математических наук Г. А. Донца и доктора физико-математических наук Н. З. Шора — сотрудников Института кибернетики АН УССР. Статья написана увлекательно и на доступном уровне, знание теории графов не предполагается. Особый интерес представляет изложение алгебраического подхода к задаче, связанного с решением алгебраических уравнений в классе вычетов.

Статья доктора физико-математических наук, профессора Киевского государственного университета Л. А. Калужнина затрагивает современные проблемы алгебры и содержит изложение вопросов, связанных с идеями Э. Галуа о группах подстановок.

В статье доктора физико-математических наук, профессора Симферопольского государственного университета А. В. Кужеля с привлечением большого числа интересных примеров, доступных студентам младших курсов, обсуждается один из важнейших методов математических рассуждений и построений — метод обобщений.

Теореме Лагранжа о том, что любое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов, некоммутативным евклидовым кольцам и их связи посвящена статья доктора физико-математических наук, профессора Киевского государственного университета Ю. А. Дрозда.

Следующий цикл небольших статей содержит нерешенные математические проблемы. Статья доктора физико-математических наук, профессора Киевского государственного университета М. И. Ядренко и кандидата физико-математических наук Н. Н. Леоненко посвящена постановке ряда новых нерешенных проблем комбинаторики и теории вероятностей, которые представляют интерес для теории и приложений. Понимание существа проблем этой статьи и последующих не требует знаний, выходящих за рамки общих нормативных курсов по математике. Поста-

новку нерешенной комбинаторной проблемы содержит статья кандидата физико-математических наук, старшего научного сотрудника Института математики АН УССР М. И. К р а т к о. Интересные, хотя, по-видимому, и не простые, проблемы возможности восстановления меры по ее значениям на шарах предложены кандидатом физико-математических наук, младшим научным сотрудником Киевского государственного университета А. Г. К у к у ш е м. В статье М. Рожковой обсуждается новая проблема теории чисел, предложенная венгерским математиком П. Э р д е ш е м.

По решению Минвуза СССР и ЦК ВЛКСМ с 1974 года проводится ежегодно в несколько туров олимпиада «Студент и научно-технический прогресс», в частности, по математике. В отличие от школьных, проведение студенческих олимпиад еще не имеет установившихся традиций. Опыт проведения московской городской олимпиады представлен в статье доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета В. М. Т и х о м и р о в а и кандидатов физико-математических наук А. А. Г р и г о р ь я н а, С. В. К о н я г и н а. Статья доктора физико-математических наук, профессора Киевского государственного университета А. Я. Д о р о г о в ц е в а и младшего научного сотрудника А. Г. К у к у ш а содержит избранные задачи олимпиад, проведенных в Киевском государственном университете за период 1974—1982 гг. Ко всем задачам даны решения или указания, а в ряде случаев приведены оригинальные решения студентов. В конце сборника даются новые задачи, а также решения некоторых задач, предлагавшихся в качестве курсовых работ.

Ваши отзывы и пожелания о содержании сборника просим направлять по адресу: 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7, Головное издательство издательского объединения «Вища школа», редакция литературы по математике и физике.

Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя приложить ни одной из математических наук, и в том, что не имеет связи с математикой.

ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ

Математика и опыт — вот подлинные основания достоверного, естественного, разумного, живого познания.

Б. СПИНОЗА

Математика — наука молодых. Иначе и не может быть. Занятие математикой — это такая гимнастика ума, для которой нужны вся гибкость и вся выносливость молодости.

Н. ВИНЕР



475767879

121939495969

999999

010

5555

848328

777777

88888

00

α β γ δ ε ζ η θ φ χ ψ ω

000

45786

00000000

75432845

00

0162

987

987

987

987

987

987

987

987

987

987

475767879
3141 939495969



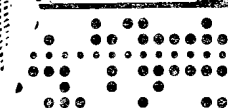
278648

VC
LH
I

904

97575757
31415161718

3

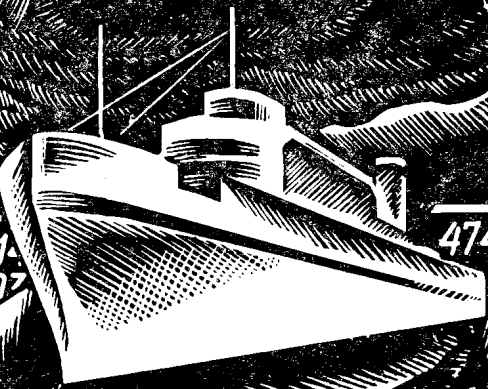


921

97575757
5161718

080

λθ
μθ
RTZS
UXOWS
UY



000010121314
262728293031
242434E
-950

474849
5657
132
6

1

А МАТЕМАТИКУ
УЖЕ ЗАТЕМ
УЧИТЬ СЛЕДУЕТ,
ЧТО ОНА УМ
В ПОРЯДОК ПРИВОДИТ.
М. В. Ломоносов

ИДЕИ И ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

В. С. КОРОЛЮК, академик АН УССР

МАТЕМАТИКА В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

Математика, эта «царица и служанка» всех остальных наук, всегда и везде оказывалась впереди и, подчас подвергаясь насмешкам, упрекам в ее оторванности от жизни, отвлеченности, сухости и т. п., прокладывала новые пути человеческому знанию.

С. Л. Соболев

В настоящее время резко возросла роль математики во всех сферах человеческой деятельности, стали значительно шире области ее применения. Наряду с физикой и механикой математика используется в различных областях технических наук, экономике, биологии и медицине, лингвистике и даже в социологических исследованиях. Можно без преувеличения утверждать, что математика оказывает сейчас большое влияние на научно-технический прогресс.

Чем же объясняется такое стремительное развитие математики, расширение ее применения и влияния?

Это объясняется прежде всего современными ее достижениями, что привело к осознанию почти неограниченных возможностей математики и возрастанию потребностей в ее применении к решению практических задач. Кроме того, важную роль в процессе математизации знаний сыграла автоматизация вычислений посредством современных электронных вычислительных машин. Ускорение вычислительных процессов дало возможность решать ранее недоступные, сложные практические задачи.

В современном научно-техническом прогрессе математизация различных областей науки и техники означает использование математических методов в процессе анализа и в получении научно обоснованных объективных выводов. Применение математических методов в тех или иных областях знаний свидетельствует о достижении этой областью определенного уровня зрелости, при котором основные понятия и задачи настолько конкретизированы, что могут стать предметом строгого, т. е. математического, анализа. Такой анализ, в свою очередь, играет решающую роль в дальнейшем уточнении понятий и в успешном их применении. Именно математика предлагает наиболее общие и вместе с тем достаточно четкие модели для изучения окружающего нас мира. Эти модели строятся в весьма абстрактной форме, на математическом языке. Почти четыреста лет назад Галилео Галилей говорил, что философия написана в грандиозной книге — природе, которая всегда открыта для всех и каждого. Но понять ее может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она написана. Написана же она на математическом языке, а знаки ее — математические формулы.

Создание математических моделей реальных процессов и явлений — важный этап познания мира. Развитие самой математики происходит в полном соответствии с ленинским определением диалектического пути познания: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины...»¹

Процесс применения математики состоит в последовательном абстрагировании при построении математических моделей, строгом математическом анализе их свойств, а также в конкретной интерпретации этих моделей, т. е. в применении их к объяснению процессов и явлений природы. Образно эту мысль иллюстрируют слова известного математика Р. Куранта: «Мы стартуем с Земли (конкретная задача) и, сбросив балласт излишней информации, устремляемся на крыльях абстракции в заоблачные высоты, где в разреженной атмосфере наблюдение и анализ становятся легче. Затем наступает решающее испытание — приземление: теперь нужно установить, достигнуты ли

¹ Ленин В. И. Философские тетради. — Полн. собр. соч., т. 29, с. 152, 153.

поставленные цели. Иными словами, полет в область абстрактной общности должен исходить из конкретного и завершаться конкретным».

В процессе своего развития математика обогащалась выдающимися достижениями. Примерами таких достижений являются создание дифференциального и интегрального исчисления — математического анализа (XVIII в.), построение неевклидовой геометрии (XIX в.), развитие аксиоматического метода (XIX—XX вв.). Создание математического анализа позволило в новой, наиболее адекватной форме представить основные законы движения. Понятие бесконечно малых величин так же, как и понятия непрерывности и предела, играет основную роль в современной математике. Построение неевклидовой геометрии явилось подготовкой к революционным преобразованиям физической картины мира в форме теории относительности и соответственно нового представления о реальном пространстве и времени. Развитие аксиоматического метода привело к интенсивной разработке оснований математики, методологии математики, к развитию математической логики, к детальному выяснению структуры математики и ее связи с реальной действительностью.

Двадцатый век принес математике много новых идей, которые привели к развитию новых ее областей и новых ее применений. Наряду с развитием таких фундаментальных математических теорий, как функциональный анализ, синтезирующий математический анализ и линейную алгебру, теория множеств и топология, математическая логика и теория алгоритмов, возникли новые прикладные математические теории, благодаря которым стал возможен анализ математических моделей с реальным содержанием (интерпретацией) понятий. В качестве примеров отметим развитие теории вероятностей и теории оптимального управления, бурное развитие вычислительной математики вместе с прикладной теорией алгоритмов — программированием.

Распространение вероятностных понятий и методов способствовало математизации исследований в физике, радиофизике и электронике, в геологии и геодезии, в самых разнообразных областях науки и техники.

Особое значение в современных приложениях имеет понятие случайного процесса — абстрактной мате-

матической модели разнообразных реальных физических процессов. Характерной особенностью теории вероятностей и теории случайных процессов является органическое сочетание абстрактных логических построений с интуитивно наглядными представлениями о случайных экспериментах. Создание теории информации, ориентированной на изучение процессов передачи сигналов по каналам связи, обусловило бурное развитие молекулярной биологии и психологии. Большое влияние на научно-технический прогресс оказывает созданная в 50-х годах и интенсивно развивающаяся в настоящее время теория оптимального управления. Трудно переоценить роль современных электронных вычислительных машин, обладающих не только возможностью осуществления вычислений с огромной скоростью, но и имеющих математическое обеспечение в виде алгоритмов и программ решения разнообразных сложных прикладных задач.

Практика является одним из важных источников новых проблем и понятий в математике. Однако прогресс математики невозможен без внутреннего развития самой математики. Стремление к общности результатов, их завершенности независимо от возможных применений — неисчерпаемые источники прогресса математики. На всех этапах ее развития постоянно возникали и возникают проблемы, связанные с упорядочением и переосмысливанием полученных ранее результатов. Так, упорядочение логических основ математики привело к созданию и развитию таких ее абстрактных областей, как математическая логика, теория алгоритмов, теория множеств. Примером внутреннего развития математической теории может служить также теория случайных процессов, возникшая в 30-х годах нашего столетия из разрозненных фактов и примеров физики, демографии, радиотехники.

Наконец, существует еще немаловажный стимул в развитии математики — любопытство и воображение исследователя. Стремление к познанию окружающего нас мира является характерной чертой человека, это движущая сила прогресса всего человеческого общества. При этом здравый смысл и интуиция играют важную роль в творчестве математиков. Более того, ряд выдающихся математических идей появились, опередив существующие стандарты строгости. Так было, например, с созданием основ анализа

бесконечно малых величин, а также с такими фундаментальными понятиями математики, как предел, алгоритм, вероятность, которыми пользовались без строгого их уточнения. Вместе с тем, какой бы полезной ни была математическая идея, рано или поздно возникает необходимость в построении строгого логического фундамента, обеспечивающего формальную непротиворечивость математической теории.

Большой вклад в развитие современной математической науки внесли советские математики. С именем нескольких поколений советских математиков связаны выдающиеся достижения в теории вероятностей и теории случайных процессов, в теории дифференциальных уравнений и их приложений к современной математической физике, а также в ряде других областей математики.

С. Г. ГИНДИКИН, старший научный сотрудник
Межфакультетской проблемной
НИЛ МГУ

КОМПЛЕКСНЫЙ МИР РОДЖЕРА ПЕНРОУЗА

Нельзя придумать ничего столь странного и невероятного, что не было бы уже высказано кем-либо из философов.

Р. Декарт

На последнем математическом конгрессе, который проходил в Хельсинки летом 1978 г., Роджер Пенроуз сделал пленарный доклад «Комплексная геометрия реального мира». Основная идея Пенроуза заключалась в том, что точки четырехмерного пространства-времени Минковского или Евклида (в евклидовой теории поля) естественно интерпретировать как комплексные прямые в трехмерном комплексном пространстве. Эта идея разрабатывалась Пенроузом в течение ряда лет в рамках его «твисторной программы» [1] (твисторами он называет точки вспомогательного трехмерного комплексного пространства). Незадолго перед конгрессом появились первые результаты, которые уже нельзя было рассматривать, как чисто интерпретационные (инстантонные решения уравнения Янга — Миллса и комплексные автодуальные решения уравнения Эйнштейна).