

Michel Rieutord

# Une introduction à la dynamique des fluides

MANUEL DE COURS

LMD

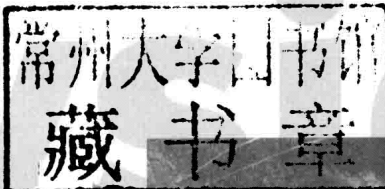


de boeck

Michel Rieutord

# Une introduction à la dynamique des fluides

MANUEL DE COURS



de boeck

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : [www.deboeck.com](http://www.deboeck.com)

© De Boeck Supérieur s.a., 2014  
Fond Jean Pâques 4, 1348 Louvain-la-Neuve

1<sup>re</sup> édition

Tous droits réservés pour tous pays.

Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit.

Imprimé en Belgique

Dépôt légal :

Bibliothèque nationale, Paris : octobre 2014

Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2014/0074/261 ISBN 978-2-8041-8554-1

# **Une introduction à la dynamique des fluides**

## **Physique**

- ASLANGUL C., *Mécanique quantique. 1. Fondements et premières applications*
- ASLANGUL C., *Mécanique quantique. 2. Développements et applications à basse énergie. 2° éd.*
- ASLANGUL C., *Mécanique quantique. 3. Corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes*
- BÉCHERRAWY T., *Optique géométrique*
- BIEMONT É., *Spectroscopie atomique. Instrumentation et structures atomiques*
- BIEMONT É., *Spectroscopie moléculaire. Structures moléculaires et analyse spectrale*
- CHAMPEAU R.-J., CARPENTIER R., LORGERÉ I., *Ondes lumineuses. Propagation, optique de Fourier, cohérence*
- TAILLET R., *Optique physique. Propagation de la lumière*
- WATSKY A., *Thermodynamique macroscopique*

## **Chimie**

- CACHAU-HERREILLAT D., *Des expériences de la famille Acide-Base. 3° éd.*
- CACHAU-HERREILLAT D., *Des expériences de la famille Réd-Ox. 2° éd.*
- DEPOVERE P., *Chimie générale. 3° éd.*
- DEPOVERE P., *Chimie organique. 2° éd.*
- KIEL M., *L'oxydoréduction. Du nombre d'oxydation aux diagrammes de Pourbaix*
- McMURRY J., BEGLEY T., *Chimie organique des processus biologiques*
- MOUSSARD C., *Biochimie structurale et métabolique. 3° éd.*
- MOUSSARD C., *Biologie moléculaire et Biochimie des communications cellulaires*
- RABASSO N., *Chimie organique. Généralités, études des grandes fonctions et méthodes spectroscopiques. 2° éd.*
- RABASSO N., *Chimie organique. Hétéroéléments, stratégies de synthèse et chimie organométallique. 2° éd.*

## Avant-propos de la deuxième édition

La seconde édition de mon cours de dynamique des fluides propose un texte revu et corrigé de la première édition enrichi d'un chapitre ainsi que de plusieurs sections supplémentaires. La principale nouveauté est le chapitre 11 dont le but est de présenter au lecteur une description du lien qui unit le contenu microscopique, discret ou particulaire d'un fluide à son aspect macroscopique qui est celui d'un continuum. Nous espérons avoir réussi à relever le défi de donner au lecteur toutes les bases nécessaires pour comprendre ce très vaste sujet.

Les sections supplémentaires ajoutent une présentation de l'instabilité de Marangoni-Bénard qui montre un effet des contraintes tangentielles induites par la tension superficielle. Nous discutons aussi l'équation de Chapman-Proctor qui nous permet d'illustrer l'utilisation d'un développement multi-échelle pour déterminer la dynamique de la convection à flux fixée. Enfin nous avons ajouté une longue introduction à la théorie des perturbations optimales ou perturbations à croissance algébrique dont la mécanique des fluides s'est enrichie au cours du dernier quart de siècle.

Finalement, plus encore que dans la première version de ce livre, nous avons cherché à illustrer les différents thèmes abordés par des exemples puisés dans les sciences de l'Univers. La Terre, les planètes géantes, les disques d'accrétion ou les étoiles fournissent ainsi de nombreuses illustrations des sujets discutés, soulignant par ailleurs l'importance de la dynamique des fluides en astrophysique ou en géophysique.

Cette seconde édition a bénéficié des remarques de nombreux lecteurs et tout particulièrement des relectures d'Arnaud Antkowiak et de Pierre-Louis Blelly sur quelques points clefs. Elle doit naturellement beaucoup aux étudiants qui, par leurs questions, m'ont forcé à aller au fond des problèmes. Puisse ce livre leur apporter en retour les réponses qu'ils recherchent.

Toulouse, octobre 2013

Michel Rieutord



## Avant-propos de la première édition

L'idée qui a présidé à l'écriture de ce livre était celle d'un cours sur la dynamique des fluides indépendant du contexte « science de l'ingénieur » de cette discipline. Nous voulions une présentation qui soit celle du physicien, c'est-à-dire de celui qui observe la Nature et tente d'en comprendre les mécanismes.

Les fluides sont omniprésents dans notre environnement et leur mouvement se rappelle à nous quotidiennement, ne serait-ce que par le temps qu'il fait. Ainsi comment ne pas être intrigué, en tant que physicien, par le vol d'un oiseau, le déferlement d'une vague ou la formation d'un nuage ? De façon assez surprenante la mécanique des fluides s'est tenue longtemps à l'écart de la physique (une situation qui semble fort heureusement changer), notamment du cursus universitaire des physiciens français, alors que beaucoup de grands noms de la physique y ont imprimé leur marque, à commencer par Newton, Euler, Maxwell, Rayleigh, Heisenberg, Landau, Chandrasekhar etc. Pourtant cette discipline offre encore de beaux défis aux chercheurs ; dans les années 1950, Heisenberg notait que la turbulence reste l'un des problèmes majeurs non-résolus de la physique classique ; presque cinquante ans plus tard cette remarque est toujours valable.

Le présent ouvrage essaye d'introduire les principaux thèmes de la mécanique des fluides, l'idée étant de fournir les bases nécessaires pour aborder n'importe quelle partie de la discipline. En fin de chaque chapitre, des exercices sont proposés pour aider le lecteur à vérifier son assimilation. Une liste d'ouvrages est également proposée, permettant un approfondissement des questions traitées ou offrant un point de vue différent. Un chapitre de compléments de mathématiques est aussi inclus de manière à ce que ce cours puisse être abordé avec un bagage de connaissances égal à celui d'un étudiant en fin de premier cycle universitaire.

Le niveau de ce cours n'est pas uniforme et progresse de chapitre en chapitre : grosso modo, les quatre premiers chapitres reflètent le contenu d'un cours donné en licence de physique à l'université Paul Sabatier de Toulouse, les quatre suivants sont issus d'un cours donné au même endroit en maîtrise de physique et les deux derniers (avec des reprises dans d'autres chapitres) un cours au DEA d'astrophysique de Toulouse.

Après avoir commis son œuvre, l'auteur doit avouer qu'elle fut réalisée grâce à quelques complices qu'il va s'empresse de remercier.

Pour commencer l'instigateur, José-Philippe Pérez sans qui rien n'aurait commencé. Des décors m'ont été fournis par Alain Vincent, Hervé Willaime et Thierry Roudier. La mécanique a été huilée par André Violante; les costumes sont de Donald Knuth. Le scénario a été relu et corrigé par Boris Dintrans dans le rôle de l'étudiant, Katia Ferrière dans le rôle du gourou MHD, Geneviève dans le rôle de ma femme, et mon père dans son propre rôle. La pièce a été conçue à l'Observatoire Midi-Pyrénées et jouée à de nombreuses reprises devant les étudiants de l'Université Paul Sabatier qui étaient enthousiastes ou effrayés, mais jamais indifférents, surtout en examens. Enfin, l'acteur-auteur-compositeur remercie les éditions Masson pour leur confiance tout au long de cette aventure et espère que la pièce pourra être re-jouée, réinterprétée ...

Toulouse, mai 1997

Michel Rieutord

## Guide de lecture

Le premier chapitre tente de répondre à la question : comment décrire le mouvement d'un fluide ? Nous y établissons les équations de base de la dynamique des fluides. Le deuxième chapitre, dédié à la statique nous permet de commencer avec un problème relativement simple. Nous abordons ensuite les premiers problèmes de dynamique en considérant le cas idéal des fluides parfaits où tout phénomène de diffusion est éliminé. Essentiellement cette idéalisation permet d'apprécier les effets de pression et d'inertie sur le mouvement. Au quatrième chapitre, nous incluons la viscosité dans le cas simple des fluides incompressibles et introduisons alors la notion de couche limite qui reflète la compétition entre transport diffusif et advectif.

Sont abordées ensuite les différentes ondes qui peuvent se propager dans un fluide ce qui nous permet de glisser naturellement vers les instabilités. Nous avons dédié un chapitre entier au problème de la convection thermique qui fournit un exemple d'instabilité où les notions introduites au chapitre précédent peuvent être mises en application de façon concrète. Le huitième chapitre est consacré aux fluides en rotation si importants pour comprendre la dynamique atmosphérique ou océanique.

Le neuvième chapitre est une introduction à la turbulence ; nous y présentons les résultats classiques de turbulence homogène isotrope et essayons d'introduire le lecteur à quelques questions d'actualité. Le dixième chapitre dédié à la magnétohydrodynamique, permet de se faire une idée de la dynamique des fluides conducteurs qui jouent un rôle majeur en astrophysique. Enfin le onzième et dernier chapitre tente d'introduire le lecteur aux fondements statistiques de la dynamique des gaz. On veut lui permettre de mieux comprendre l'émergence du milieu continu à partir d'une matière distribuée essentiellement de façon discrète. Des compléments de mathématiques ainsi que la solution des exercices terminent ce cours.

Un certain nombre de sections ont été marquées d'un ♠ : la maîtrise de leur contenu n'est pas nécessaire pour suivre l'exposé ; elles peuvent être laissées de côté lors d'une première lecture.



## Table des matières

### Chapitre 1 Les bases de la mécanique des fluides

|          |                                                            |    |
|----------|------------------------------------------------------------|----|
| <b>1</b> | <b>Un bref historique</b>                                  | 1  |
| <b>2</b> | <b>Le concept de fluide</b>                                | 2  |
| 2.1      | Définitions                                                | 2  |
| 2.2      | Les milieux continus                                       | 3  |
| <b>3</b> | <b>La cinématique des fluides</b>                          | 3  |
| 3.1      | Notion de particule fluide                                 | 3  |
| 3.2      | Description lagrangienne                                   | 4  |
| 3.3      | Description eulérienne                                     | 4  |
| 3.4      | Dérivée particulaire                                       | 4  |
| 3.5      | Déformation d'un élément fluide                            | 5  |
| 3.6      | Les fluides incompressibles                                | 8  |
| 3.7      | Évolution d'une quantité intégrale entraînée par le fluide | 8  |
| 3.8      | Fonction de courant                                        | 10 |
| <b>4</b> | <b>Les lois du mouvement</b>                               | 10 |
| 4.1      | Conservation de la masse                                   | 11 |
| 4.2      | Conservation de la quantité de mouvement                   | 13 |
| 4.3      | Conservation de l'énergie                                  | 15 |
| <b>5</b> | <b>Les lois de comportement</b>                            | 17 |
| 5.1      | La contrainte de pression                                  | 17 |
| 5.2      | Le fluide parfait                                          | 18 |
| 5.3      | Les fluides newtoniens                                     | 19 |
| 5.4      | Autres lois de comportement ♠                              | 26 |
| <b>6</b> | <b>Les relations thermodynamiques</b>                      | 33 |
| 6.1      | Le gaz parfait                                             | 34 |
| 6.2      | Les liquides                                               | 35 |
| 6.3      | Le fluide barotrope                                        | 35 |

|          |                                                             |    |
|----------|-------------------------------------------------------------|----|
| <b>7</b> | <b>Les conditions aux limites</b> .....                     | 35 |
| 7.1      | Sur le champ de vitesse .....                               | 36 |
| 7.2      | Sur la température .....                                    | 38 |
| 7.3      | La tension superficielle .....                              | 39 |
| 7.4      | Les conditions initiales .....                              | 40 |
| <b>8</b> | <b>Introduction au formalisme lagrangien</b> ♣ .....        | 41 |
| 8.1      | Les équations du mouvement en variables lagrangiennes ..... | 41 |
| 8.2      | Exemple d'application .....                                 | 43 |

## Chapitre 2 La statique des fluides

|          |                                                                 |    |
|----------|-----------------------------------------------------------------|----|
| <b>1</b> | <b>Les équations de la statique</b> .....                       | 47 |
| <b>2</b> | <b>Équilibre dans un champ de gravitation</b> .....             | 48 |
| 2.1      | Théorème de Pascal .....                                        | 49 |
| 2.2      | Atmosphères en équilibre .....                                  | 50 |
| 2.3      | Liquide stratifié entre deux plaques horizontales .....         | 52 |
| 2.4      | Masses fluides autogravitantes en rotation ♣ .....              | 53 |
| <b>3</b> | <b>Propriétés de la résultante des forces de pression</b> ..... | 57 |
| 3.1      | Théorème d'Archimède .....                                      | 57 |
| 3.2      | Centre de poussée .....                                         | 58 |
| 3.3      | Poussée sur une paroi .....                                     | 59 |
| <b>4</b> | <b>Les équilibres régis par la tension superficielle</b> .....  | 60 |
| 4.1      | Quelques figures particulières .....                            | 60 |
| 4.2      | Équilibre d'un liquide mouillant un solide .....                | 61 |

## Chapitre 3 Écoulement des fluides parfaits

|          |                                                                    |    |
|----------|--------------------------------------------------------------------|----|
| <b>1</b> | <b>Équations du mouvement</b> .....                                | 69 |
| 1.1      | Rappels .....                                                      | 69 |
| 1.2      | Autres formes de l'équation d'Euler .....                          | 70 |
| <b>2</b> | <b>Quelques propriétés du mouvement des fluides parfaits</b> ..... | 70 |
| 2.1      | Théorème de Bernoulli .....                                        | 71 |
| 2.2      | Le champ de pression .....                                         | 72 |
| 2.3      | Exemples d'application .....                                       | 72 |
| 2.4      | Théorème de Kelvin .....                                           | 74 |
| 2.5      | Influence de la compressibilité .....                              | 76 |
| <b>3</b> | <b>Les écoulements irrotationnels</b> .....                        | 77 |
| 3.1      | Définition .....                                                   | 77 |
| 3.2      | Rôle de la topologie pour un écoulement irrotationnel .....        | 78 |
| 3.3      | Théorème de Lagrange .....                                         | 79 |
| 3.4      | Théorème de l'énergie cinétique minimale ♣ .....                   | 80 |
| 3.5      | Analogie électrostatique .....                                     | 81 |
| 3.6      | Écoulement plan potentiel d'un fluide incompressible .....         | 81 |
| 3.7      | Forces exercées par un fluide parfait .....                        | 84 |

|          |                                                                                        |    |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>4</b> | <b>Les écoulements tourbillonnaires</b> .....                                          | 91 |
| 4.1      | La dynamique de la vorticité                                                           | 91 |
| 4.2      |  coulement généré par une distribution de vorticité : analogie avec le magnétisme..... | 93 |
| 4.3      | Exemples d'écoulements tourbillonnaires.....                                           | 94 |

## Chapitre 4 écoulement des fluides visqueux incompressibles

|          |                                                               |     |
|----------|---------------------------------------------------------------|-----|
| <b>1</b> | <b>Quelques propriétés générales</b> .....                    | 107 |
| 1.1      | Rappel des équations du mouvement.....                        | 107 |
| 1.2      | Le transport par la viscosité.....                            | 108 |
| 1.3      | Loi de similitude.....                                        | 111 |
| <b>2</b> | <b>Les écoulements rampants</b> .....                         | 112 |
| 2.1      | L'équation de Stokes.....                                     | 112 |
| 2.2      | Principe variationnel ♠.....                                  | 113 |
| 2.3      |  coulement autour d'une sphère.....                           | 115 |
| 2.4      |  quation d'Oseen.....                                         | 118 |
| 2.5      | Applications.....                                             | 119 |
| <b>3</b> | <b>La théorie de la couche limite</b> .....                   | 121 |
| 3.1      | Fluides parfaits et fluides visqueux.....                     | 121 |
| 3.2      | Méthode de résolution.....                                    | 122 |
| 3.3      | L'écoulement hors couche limite.....                          | 123 |
| 3.4      | L'écoulement dans la couche limite.....                       | 124 |
| 3.5      | Décollement de la couche limite.....                          | 126 |
| 3.6      | Exemple de couche limite laminaire :  quation de Blasius..... | 127 |
| <b>4</b> | <b>Quelques exemples classiques</b> .....                     | 129 |
| 4.1      |  coulements de Poiseuille.....                                | 129 |
| 4.2      | Pertes de charge dans une conduite.....                       | 133 |
| 4.3      |  coulements autour d'un solide.....                           | 135 |
| <b>5</b> | <b>Forces exercées sur un solide</b> .....                    | 136 |
| 5.1      | Expression générale de la résultante des forces.....          | 136 |
| 5.2      | Coefficient de traînée et de portance.....                    | 137 |
| 5.3      | Exemple : la force de Stokes.....                             | 138 |

## Chapitre 5 Les ondes dans les fluides

|          |                                                |     |
|----------|------------------------------------------------|-----|
| <b>1</b> | <b>Notions sur les perturbations</b> .....     | 145 |
| 1.1      |  quation d'une perturbation.....               | 145 |
| 1.2      | Analyse d'une perturbation infinitésimale..... | 146 |
| 1.3      | Les perturbations d'amplitudes finies.....     | 148 |
| 1.4      | Ondes et instabilités.....                     | 149 |

|          |                                                                           |     |
|----------|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>2</b> | <b>Le son</b> .....                                                       | 149 |
| 2.1      | Équation de propagation .....                                             | 149 |
| 2.2      | Relation de dispersion .....                                              | 150 |
| 2.3      | Exemples de modes acoustiques dans les instruments à vent .....           | 151 |
| <b>3</b> | <b>Les ondes de surface</b> .....                                         | 152 |
| 3.1      | Les ondes de gravité superficielles .....                                 | 153 |
| 3.2      | Les ondes capillaires .....                                               | 155 |
| <b>4</b> | <b>Les ondes internes de gravité</b> ♣ .....                              | 156 |
| <b>5</b> | <b>Les ondes de discontinuité</b> .....                                   | 158 |
| 5.1      | Propagation d'une perturbation en fonction du nombre de Mach .....        | 159 |
| 5.2      | Équations d'une onde sonore d'amplitude finie .....                       | 160 |
| 5.3      | Équations des caractéristiques .....                                      | 161 |
| 5.4      | Exemple : l'onde de compression .....                                     | 162 |
| 5.5      | Conditions de passage .....                                               | 164 |
| 5.6      | Relations entre les quantités à l'amont et à l'aval d'un choc droit ..... | 165 |
| 5.7      | Chocs forts et faibles .....                                              | 168 |
| 5.8      | Chocs radiatifs .....                                                     | 169 |
| 5.9      | Ressaut hydraulique .....                                                 | 170 |
| <b>6</b> | <b>Les ondes solitaires</b> ♣ .....                                       | 172 |
| 6.1      | L'équation de Korteweg et de Vries .....                                  | 173 |
| 6.2      | L'onde solitaire .....                                                    | 176 |
| 6.3      | Analyse élémentaire de l'équation de Korteweg et de Vries .....           | 178 |
| 6.4      | Exemples .....                                                            | 181 |
| <b>7</b> | <b>Exercices</b> .....                                                    | 182 |
| <b>8</b> | <b>Appendice : conditions de passage</b> .....                            | 184 |

## Chapitre 6 La stabilité des écoulements

|          |                                                                   |     |
|----------|-------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>1</b> | <b>Instabilité locale</b> .....                                   | 187 |
| 1.1      | Définitions .....                                                 | 187 |
| 1.2      | Exemple : l'instabilité gravitationnelle .....                    | 188 |
| 1.3      | Instabilité spatiale .....                                        | 189 |
| <b>2</b> | <b>Analyse linéaire d'instabilités globales</b> .....             | 190 |
| 2.1      | Instabilité centrifuge : critère de Rayleigh .....                | 190 |
| 2.2      | Instabilité de cisaillement des écoulements plan-parallèles ..... | 192 |
| 2.3      | Équation de Rayleigh .....                                        | 194 |
| 2.4      | Équation d'Orr-Sommerfeld .....                                   | 196 |
| <b>3</b> | <b>Quelques exemples d'instabilités célèbres</b> .....            | 197 |
| 3.1      | Exemple : l'instabilité de Kelvin-Helmholtz .....                 | 197 |
| 3.2      | Instabilités connexes .....                                       | 198 |
| 3.3      | Les perturbations de l'écoulement de Couette plan .....           | 201 |
| 3.4      | Cisaillement et stratification .....                              | 202 |
| 3.5      | L'instabilité de Bénard-Marangoni ♣ .....                         | 204 |

|          |                                                                  |     |
|----------|------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>4</b> | <b>L'interaction d'ondes ♣</b> .....                             | 210 |
| 4.1      | Énergie d'une onde .....                                         | 210 |
| 4.2      | Application à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz .....            | 212 |
| <b>5</b> | <b>Le développement non-linéaire d'une instabilité</b> .....     | 212 |
| 5.1      | Équations d'amplitude .....                                      | 213 |
| 5.2      | Notions sur les bifurcations .....                               | 214 |
| 5.3      | Instabilités d'amplitudes finies ♣ .....                         | 216 |
| <b>6</b> | <b>Les perturbations optimales ♣</b> .....                       | 219 |
| 6.1      | Introduction .....                                               | 219 |
| 6.2      | Les écoulements plan-parallèles .....                            | 220 |
| 6.3      | Etude d'un modèle simplifié .....                                | 221 |
| 6.4      | Retour aux fluides : instabilités à croissance algébriques ..... | 223 |
| 6.5      | Les opérateur non-normaux .....                                  | 224 |
| 6.6      | Spectres, pseudo-spectres et résolvante d'un opérateur .....     | 225 |
| 6.7      | Exemples de perturbations optimales dans les écoulements .....   | 229 |

## Chapitre 7 La convection thermique

|          |                                                                      |     |
|----------|----------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b> .....                                            | 235 |
| <b>2</b> | <b>L'équilibre conductif</b> .....                                   | 236 |
| 2.1      | Équilibre d'un gaz parfait entre deux plaques horizontales .....     | 236 |
| 2.2      | Le gradient adiabatique .....                                        | 237 |
| 2.3      | La température potentielle .....                                     | 238 |
| <b>3</b> | <b>Deux approximations</b> .....                                     | 239 |
| 3.1      | L'approximation de Boussinesq : présentation qualitative .....       | 239 |
| 3.2      | Les développements asymptotiques .....                               | 240 |
| 3.3      | Approximation anélastique ♣ .....                                    | 244 |
| <b>4</b> | <b>L'absence d'équilibre : la baroclinicité</b> .....                | 246 |
| 4.1      | Convection entre deux plaques verticales .....                       | 247 |
| <b>5</b> | <b>L'instabilité de Rayleigh-Bénard</b> .....                        | 250 |
| 5.1      | Analyse qualitative de la stabilité - critère de Schwarzschild ..... | 250 |
| 5.2      | Évolution des perturbations .....                                    | 252 |
| 5.3      | Expression des solutions .....                                       | 253 |
| 5.4      | Critère de stabilité .....                                           | 254 |
| 5.5      | Les autres conditions aux limites .....                              | 256 |
| <b>6</b> | <b>Les figures de convection</b> .....                               | 258 |
| 6.1      | Les perturbations tridimensionnelles .....                           | 260 |
| 6.2      | Les rouleaux de convection .....                                     | 261 |
| 6.3      | Autres figures de convection .....                                   | 261 |
| <b>7</b> | <b>Le domaine faiblement non-linéaire</b> .....                      | 262 |
| 7.1      | Les conditions aux limites périodiques .....                         | 263 |
| 7.2      | Les petites amplitudes .....                                         | 263 |
| 7.3      | Dérivation de l'équation d'amplitude .....                           | 266 |
| 7.4      | Le transport de la chaleur .....                                     | 268 |

## Chapitre 8 Les fluides en rotation

## Chapitre 9 La turbulence