que sais-je ?

# MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

*MAURICE SAADA*

le point des connaissances actuelles

RESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

# TABLE DES MATIÈRES




Imprimé en France
Imprimerie des Presses Universitaires de France
73, avenue Ronsard, 41100 Vendôme
Mars 1985 — N° 30 171

QUE SAIS-JE ?

# *Mathématiques financières*

MAURICE SAADA

DU MÊME AUTEUR

*Exercices et problèmes de statistiques et probabilités*, Vuibert, 1970.
*Exercices et problèmes de mathématiques financières*, Vuibert, 1980.

ISBN 2 13 038512 5

Dépôt légal — 1re édition : 1985, mars


108, boulevard Saint-Germain, 75006 Paris

## AVERTISSEMENT

Cet ouvrage traite des mathématiques financières classiques ou « déterministes, et laisse donc de côté toute considération de probabilité qui, associée à la notion d'intérêt, fait l'objet des mathématiques « actuarielles ». Il s'articule en quatre chapitres, débutant par l'étude des procédures fondamentales et des rentes, et se poursuivant par celle des emprunts indivis et obligataires.

La rigueur n'a pas été sacrifiée, contrairement à une tradition constante en France, à des considérations utilitaires. C'est dire que le point de vue mathématique a prévalu sur le point de vue comptable. Les axiomes et hypothèses ont été souvent explicités, et les théorèmes généralement établis. Pour ne pas décourager les lecteurs qui auraient été rebutés par un formalisme excessif, les démonstrations délicates ont été rédigées en petits caractères et peuvent être « sautées », sans nuire à l'intelligence de l'ensemble. J'ai donné quelques indications sur les algorithmes itératifs permettant la résolution des équations, parfois très copieuses, rencontrées dans la détermination des taux de rentabilité. Tous les calculs ont été exécutés à l'aide d'une Hewlett-Packard 34 C.

Mais ce qui fait l'intérêt de ce travail pour un large public, c'est, me semble-t-il, le traitement numérique détaillé de très nombreux exemples puisés dans l'actualité financière : calcul des annuités de remboursement et du taux effectif global (TEG) d'emprunts, compte tenu de diverses modalités : frais, impôts, fractionnement des intérêts, primes, etc., détermination des rentes d'amortissement, incidences de l'inflation, etc. Les références aux formules utilisées sont très abondantes et permettent au lecteur non mathématicien de suivre le détail des solutions, mais calculatrice au poing et vigilance sans défaillance !

Je remercie mon épouse Lucienne et Mlle Anne Letellier de m'avoir puissamment aidé pour la mise au net du manuscrit.

## Chapitre Premier

# PROCÉDURES FONDAMENTALES : CAPITALISATION, ACTUALISATION, ÉQUIVALENCE.

## I. — Terminologie. Généralités

Soit une somme d'argent ou capital, disponible à une date $t_0$ appelée échéance, et notée $C_{t_0}$. Nous désignons par $C_{t_1}$ la valeur de ce capital à une date quelconque $t_1$.

*a)* Si $t_1 > t_0$, $C_{t_1}$ s'appelle valeur acquise ou capitalisée de ce capital au cours de la durée $t = t_1 - t_0$. On a alors $C_{t_1} > C_{t_0}$, et la différence $I_t = C_{t_1} - C_{t_0}$ est l'intérêt produit pendant le temps $t$ $(t > 0)$.

*b)* Si $t_1 < t_0$, le calcul de $C_{t_1}$ s'obtient par l'algorithme de l'actualisation ; on a alors $C_{t_1} < C_{t_0}$, et la différence $E_t = C_{t_0} - C_{t_1}$ s'appelle l'escompte produit pendant le temps $t = t_0 - t_1$ $(t > 0)$. Si $t_1 = 0$ et $t_0 > 0$, la quantité $C_{t_1}$ est la valeur actuelle (à l'origine des temps) d'un capital $C_{t_0}$ venant à échéance à une date postérieure.

Nous poserons que cette valeur $C_{t_1}$ est, d'une part, proportionnelle au capital $C_{t_0}$ et, d'autre part, fonction de la durée d'actualisation ou de capitalisation $t$. D'où la formule : $C_{t_1} = C_{t_0}\, f(t)$, où $f$ est une fonction continue et dérivable. $f(t)$ représente la valeur de l'unité de capital à la date $t_1 = t_0 + t$.

L'un des objets de ce chapitre est d'expliciter la fonction $f$.

*c)* Soit deux capitaux de montants A et B et venant respectivement à échéance aux dates $a$ et $b$. Si les valeurs de ces capitaux à la date $t$ sont égaux, nous dirons qu'ils sont équivalents à cette date.

Ces notions de capitalisation, d'actualisation, et d'équivalence, s'étendent à un système de capitaux, en posant très naturellement que la valeur de ce système est égale à la somme des valeurs des capitaux composant le système.

## II. — Intérêts simples (utilisés dans le court terme)

Soit $i$ un réel positif donné, appelé taux d'intérêt relatif à une période de référence (en général l'année).

1. **Capitalisation.** — Le calcul de l'intérêt s'effectue une seule fois en fin de la durée $t$ de capitalisation. On pose :

$$I_t = C_{t_0} \times i \times t \quad \text{avec } t = t_1 - t_0 > 0$$

d'où :

$$C_{t_1} = C_{t_0} + I_t = C_{t_0}(1 + it).$$

Si l'on pose $t_0 = 0$, on a $t_1 = t$, d'où :

$$C_t = C_0(1 + it) \quad \text{et} \quad I_t = C_0\, it \tag{1}$$

On en déduit immédiatement :

$$C_0 = \frac{C_t}{1 + it}, \quad t = \frac{1}{i}\left(\frac{C_t}{C_0} - 1\right),$$

$$i = \frac{1}{t}\left(\frac{C_t}{C_0} - 1\right) \tag{2}$$

*Remarque importante.* — Il n'est pas légitime de calculer la valeur acquise à une date intermédiaire $t' < t$ et d'appliquer les formules (1) à la valeur acquise à la date $t'$. En effet, on a : $C_{t'} = C_0(1 + it')$. Cette valeur $C_{t'}$ capitalisée à la date postérieure $t$ devient $C_{t'}[1 + i(t - t')]$, soit $C_0(1 + it')(1 + it - it')$. En développant, elle s'écrit : $C_0[1 + it + i^2(t - t')t']$. Nous voyons que ce résultat majore la valeur acquise exacte, soit $C_0(1 + it)$. Répétons que le calcul de l'intérêt doit s'effectuer une seule fois en fin de durée.

2. **Actualisation.** — Soit $C_0$ un capital venant à échéance à la date zéro, et $i$ le taux d'intérêt. Recherchons la valeur de $C_{-t}$ de ce capital à une date antérieure $-t$ $(t > 0)$.

*a) Actualisation rationnelle.* — Nous écrivons que $C_0$ est la valeur acquise par $C_{-t}$ pendant la durée $t$, soit $C_0 = C_{-t}(1 + it)$. On en déduit :

$$C_{-t} = \frac{C_0}{1 + it} \tag{3}$$

L'escompte rationnel correspondant $E_r$ a pour expression :

$$E_r = C_0 - C_{-t} = \frac{C_0\, it}{1 + it} \tag{4}$$

*b) Actualisation commerciale.* — Nous confondons abusivement escompte et intérêt et nous écrivons que l'escompte commercial $E_c$ est égal à l'intérêt que produirait $C_0$ pendant la durée $t$. Soit : $E_c = C_0\, it$, d'où :

$$C_{-t} = C_0 - E_c = C_0(1 - it) \tag{5}$$

La formule (5) avantage celui qui escompte, c'est-à-dire, le banquier. En effet on a :

$$E_c - E_r = C_0\, it - \frac{C_0\, it}{1 + it} = C_0 \frac{i^2 t^2}{1 + it} > 0.$$

Il est important de remarquer que (5) se ramène à la première formule (1) pour $t$ négatif, et qu'elle n'a un sens que si $1 - it > 0$, soit $t < i^{-1}$.

En définitive, si on actualise commercialement on a pour $t$ réel arbitraire :

$$C_t = C_0(1 + it) \tag{6}$$

Si on actualise rationnellement, on a pour expression de la valeur $C_t$ :

$$\begin{aligned} C_t &= C_0(1 + it) \quad \text{pour } t \geqslant 0 \\ C_t &= \frac{C_0}{1 - it} \quad \text{pour } t \leqslant 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Le graphe de la fonction $C_t$ de $t$, définie par (6), est la droite (D) de coefficient directeur $C_0\, i$ ; le graphe de $C_t$ définie par (7) se compose d'une partie de (D) pour $t \geqslant 0$, et pour $t \leqslant 0$ d'un fragment d'hyperbole qui se raccorde à (D) en $t = 0$.

*Exemple.* — Soit $C_0 = 1\,000$, $i = 1{,}5\ \%$ par mois. Calculons $C_t$ pour quelques valeurs de $t$ exprimées en mois. Nous obtenons les résultats suivants :

| $t$ | *— 10* | *— 3* | *0* | *3* | *10* |
|---|---|---|---|---|---|
| Actualisation rationnelle | 869,57 | 956,94 | 1 000 | 1 045 | 1 150 |
| Actualisation commerciale | 850 | 955 | 1 000 | 1 045 | 1 150 |

Nous voyons que, pour $t = -10$, la différence n'est pas négligeable.

3. **Equivalence.** — Soit deux capitaux de montant A et B venant respectivement à échéance aux dates $a$ et $b$. Recherchons à quelle date ils sont équivalents. Il vient en utilisant la formule (6) de l'actualisation commerciale, et en supposant que les deux couples (A, $a$) et (B, $b$) sont distincts :

$$A[1 + i(t - a)] = B[1 + i(t - b)]$$
$$\Leftrightarrow i(A - B)\,t = B(1 - ib) - A(1 - ia).$$

Si $A \neq B$, il y a une solution et une seule :

$$t = \frac{B(1 - ib) - A(1 - ia)}{i(A - B)}.$$

Si $A = B$ avec $a \neq b$, l'équation est impossible.

*Conclusion.* — La date d'équivalence, si elle existe, est unique. Il en résulte que si deux capitaux sont équivalents à une date $t$, ils ne sont plus équivalents à une date distincte de $t$.

Nous donnerons un exemple numérique à la page 22.

## III. — Intérêts composés

Ce mode de calcul fondamental, utilisé dans les moyen et long termes, suppose que l'on évalue l'intérêt à chaque fin de période par (6), intérêt qui s'ajoute au capital.

Soit $C_0$ le capital initial supposé placé à la date origine et soit $i$ le taux relatif à la période de référence.

1. **Capitalisation.** — Soit $C_n$ la valeur acquise à la date $n$ ($n$ entier naturel). On a : $C_1 = C_0(1 + i)$, $C_2 = C_1(1 + i) = C_0 = (1 + i)^2$, etc., et d'une manière générale :

$$C_n = C_0(1 + i)^n \qquad (8)$$

On en déduit le montant de l'intérêt $I_n$ produit pendant la durée $n$ du placement :

$$I_n = C_n - C_0 = C_0[(1 + i)^n - 1].$$

On peut écrire à partir de (8) les formules dérivées suivantes :

$$C_0 = C_n(1 + i)^{-n} \qquad i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{1/n} - 1$$

$$n = \frac{1}{\text{Log}\,(1 + i)}\,\text{Log}\,\frac{C_n}{C_0}.$$

*1er exemple.* — Quel est le taux $i$ permettant de doubler un capital donné $C_0$ pendant une durée donnée $n$ ? On a :

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{1/n} - 1 = 2^{1/n} - 1.$$

Voici quelques résultats :

| $n$ | *2* | *5* | *10* | *15* |
|---|---|---|---|---|
| $100i$ | 41,42 | 14,87 | 7,18 | 4,73 |

Ainsi la valeur acquise par un capital placé pendant dix ans au taux de 7,18 % est le double de ce capital.

*2e exemple.* — Au bout de combien d'années un capital placé à 10 % double ? On a :

$$n = \frac{1}{\text{Log}\,(1 + i)}\,\text{Log}\,\frac{C_n}{C_0} = \frac{\text{Log}\,2}{\text{Log}\,(1{,}10)} = 7{,}27.$$

Pour le moment cette réponse est à rejeter puisque $n$ n'est pas un entier. Pour $n = 7$, le capital a moins que doublé $\left(\frac{C_7}{C_0} = 1{,}1^7 = 1{,}95\right)$, et pour $n = 8$, le capital a plus que doublé $\left(\frac{C_8}{C_0} = 1{,}1^8 = 2{,}14\right)$. Nous interpréterons ci-dessous les valeurs non entières de $n$.

2. **Actualisation.** — Nous raisonnons comme dans le II, 2, *a*. $C_0$ est la valeur acquise par $C_{-n}$. D'où d'après (8) :

$$C_0 = C_{-n}(1 + i)^n \quad \text{et} \quad C_{-n} = C_0(1 + i)^{-n} \tag{9}$$

En réunissant (8) et (9), on trouve que la valeur acquise à une date entière quelconque $n$ s'écrit :

$$C_n = C_0(1 + i)^n \quad (n \in \mathbf{Z}) \tag{10}$$

3. **Capitalisation et actualisation continues.** — Dans la suite de l'ouvrage nous étendrons l'égalité (10) à toute durée $t$ réelle arbitraire :

$$C_t = C_0(1 + i)^t \quad (t \in \mathbf{R}) \tag{11}$$

Pour justifier cette extension, nous supposerons que la variation du capital $C_t$ pendant la durée infiniment petite $dt$ est de la forme : $dC_t = C_t\, j\, dt$, où $j$ est un paramètre positif appelé taux continu et pouvant dépendre de $t$. Intégrons. Il vient :

$$\frac{dC_t}{C} = j\, dt, \quad \text{d'où } C_t = C_0\, e^{\int_0^t j\, dx}.$$

Si $j$ est constant, on a :

$$C_t = C_0\, e^{jt} \tag{12}$$

En posant $e^j = 1 + i$, la formule précédente s'écrit :

$$C_t = C_0(1 + i)^t \quad (\text{CQFD})$$

$i$ s'appelle taux discret équivalent au taux continu $j$. On a les approximations classiques :

$$i = e^j - 1 \simeq j + 0{,}5\,j^2 \tag{13}$$

$$j = \text{Log}\,(1 + i) \simeq i - 0{,}5\,i^2 \tag{14}$$

Effectuons quelques calculs :

| $100i$ | *5* | *10* | *15* | $100j$ | *5* | *10* | *15* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $100j$ | 4,88 | 9,53 | 13,98 | $100i$ | 5,13 | 10,52 | 16,18 |

*Exemple.* — Soit $C_0 = 1\,000$ et $j = 0{,}10 + 0{,}02 \sin t$ où $t$ est la date exprimée en radians. Calculons $C_5$ :

$$\int_0^5 j\,dx = \int_0^5 (0{,}10 + 0{,}02 \sin x)\,dx$$

$$= 0{,}5 + 0{,}02(1 - \cos 5) = 0{,}52 - 0{,}02 \cos 5.$$

D'où :

$$C_5 = C_0\, e^{\int_0^5 j\,dx} = 1\,000\, e^{0{,}52 - 0{,}02 \cos 5} = 1\,672{,}51.$$

**4. Propriété caractéristique de la formule à intérêts composés. Théorème du transport.** — Soit $C_0$ un capital disponible à la date origine. On a $C_{t'} = C_0(1 + i)^{t'}$. Cette valeur acquise $C_{t'}$ devient à la date $t$ : $C_{t'}(1 + i)^{t-t'}$, soit :

$$C_0(1 + i)^{t' + t - t'} = C_0(1 + i)^t.$$

C'est précisément la valeur acquise par $C_0$ à la date $t$.

Ainsi la connaissance de la valeur d'un capital à une date de référence arbitraire $t'$ permet de calculer la valeur de ce capital à une date quelconque $t$ par introduction du facteur $(1 + i)^{t-t'}$.

*Exemple.* — Une banque prête à un particulier une somme de 10 000 F versée en deux fractions :

la moitié à la date origine et l'autre moitié six mois après. Que doit rembourser l'emprunteur au taux annuel $i$ de 20 % à la date 2 ? A la date 4 ? (durées exprimées en années).

La valeur acquise $V_2$ par le prêt à la date 2 est égal en vertu de (11) à :

$$V_2 = 5\,000(1 + i)^2 + 5\,000(1 + i)^{1,5} = 13\,772{,}67.$$

La valeur acquise $V_4$ à la date 4 est, en vertu du théorème du transport, la valeur acquise par $V_2$ pendant deux ans, soit :

$$V_4 = V_2(1 + i)^2 = 19\,832{,}65.$$

Réciproquement, soit $f(t)$ la valeur acquise par un capital pendant $t$ périodes au taux $i$ par période. Le théorème du transport se traduit par l'équation fonctionnelle :

$$f(t) = f(t')\,f(t - t')$$

et en posant $t - t' = u$, cette équation s'écrit :

$$f(u + t') = f(u)\,f(t').$$

On sait que les seules fonctions dérivables solutions de cette équation sont les fonctions exponentielles de la forme $f(t) = Ke^{jt}$ où K et $j$ sont des constantes arbitraires. On a évidemment $K = f(0) = C_0$, et, pour $t$ positif, $f(t)$ représente la valeur capitalisée du capital ; donc $e^{jt} > 1$ et donc $j > 0$. En posant $e^j = 1 + i$ $(i > 0)$, on obtient :

$$f(t) = C_0(1 + i)^t.$$

Il en résulte que le théorème du transport caractérise le mode de calcul à intérêt composé (cf. p. 6, remarque).

5. **Equivalence.** — Soit deux capitaux de montant A et B, venant respectivement à échéance aux dates $a$ et $b$. Ecrivons qu'ils sont équivalents à la date $t$. Il vient :

$$A(1+i)^{t-a} = B(1+i)^{t-b}$$
$$\Leftrightarrow A(1+i)^{-a} = B(1+i)^{-b}.$$

*1er cas.* — On a :

$$A(1+i)^{-a} = B(1+i)^{-b} \tag{15}$$

L'équation précédente en $t$ est indéterminée.

*2e cas.* — On a $A(1+i)^{-a} \neq B(1+i)^{-b}$. L'équation en $t$ est impossible.

*Conclusion.* — La date $t$ d'équivalence est donc impossible ou indéterminée ; l'existence d'une solution implique son indétermination. Pour exprimer que deux capitaux (où deux systèmes de capitaux) sont équivalents à une date quelconque, il est nécessaire et suffisant d'exprimer cette équivalence à une date de référence arbitraire, choisie souvent à la date origine. C'est ce que traduit notamment (15). On sait que cette conclusion ne s'applique pas aux intérêts simples (cf. p. 6, remarque).

*Exemple.* — Un particulier emprunte à une banque un capital $V_0$ payable en deux fractions : 2/3 à la date 0, et le dernier tiers deux mois après. Il s'engage à la rembourser en deux versements égaux à l'issue du quatrième mois et à l'issue du dixième mois. Calculons leur montant commun X en fonction de $V_0$ et du taux annuel $i$.

Actualisons : la valeur actuelle $V_1$ du prêt est : $2/3V_0 + 1/3V_0(1+i)^{-2/12}$ ; la valeur actuelle $V_2$ des deux versements est : $X(1+i)^{-4/12} + X(1+i)^{-10/12}$.

Les deux systèmes (prêt et remboursement) sont équivalents si et seulement si $V_1 = V_2$. D'où :

$$X = \frac{V_0}{3} \frac{2 + (1+i)^{-1/6}}{(1+i)^{-1/3} + (1+i)^{-5/6}}.$$

Par exemple, pour $V_0 = 5\,000$ et $i = 18\,\%$, on trouve : $X = 2\,726{,}11$.

## IV. — Capitalisation mixte

1. **Généralités.** — Nous avons vu qu'en introduisant la notion de capitalisation continue, on pouvait appliquer la formule (11) à toute valeur de $t$. Nous allons donner un autre mode de calcul de $C_t$ pour une valeur positive quelconque de $t$. Soit $n$ la partie entière de $t$, c'est-à-dire le plus grand entier qui lui soit inférieur ou égal. Posons donc :

$$t = n + \alpha \quad (n \in \mathrm{N} \text{ et } 0 \leqslant \alpha < 1).$$

Pour calculer $C_t$, nous allons d'abord évaluer $C_n$ en utilisant la formule à intérêts composés, soit $C_n = C_0(1+i)^n$, et ensuite appliquer la formule (1) de capitalisation à intérêts simples. D'où en définitive :

$$C_t = C_n(1 + \alpha i) = C_0(1+i)^n(1+\alpha i) \tag{16}$$

Interprétons graphiquement (le lecteur est invité à dessiner la figure). Le graphe de la fonction de $t$ : $C_t = (1+i)^t$ est une exponentielle, sur laquelle nous prenons deux points A et B d'abcisses respectives $n$ et $n+1$, et donc d'ordonnées respectives $C_0(1+i)^n$ et $C_0(1+i)^{n+1}$. Le coefficient directeur de la droite AB est : $C_0 \dfrac{(1+i)^{n+1} - (1+i)^n}{n+1-n} = C_0 i(1+i)^n$.

L'équation de cette droite s'écrit :

$$y_t - C_0(1+i)^n = C_0 i(1+i)^n(t-n)$$

et, pour $t = n + \alpha$, il vient :

$$y_{n+\alpha} = C_0(1+i)^n + C_0 i(1+i)^n\alpha = C_0(1+i)^n(1+\alpha i)$$

c'est précisément la valeur $C_{n+\alpha}$ obtenue par capitalisation mixte, et représentée par l'ordonnée du point P du segment AB d'abcisse $n + \alpha$. On voit sur la figure que P est au-dessus du point Q de l'exponentielle de même abcisse. Nous en dédui-