詳　解

数値計算演習

戸 川 隼 人
著

共立出版株式会社

詳解

数値計算演習

戸川隼人
著

共立出版株式会社

著者略歴

戸川隼人（とがわ　はやと）

最終学歴　早稲田大学第一理工学部数学科

専　　攻　数値解析，計算機科学

現　　在　日本大学理工学部教授・理学博士

主要著書　数値解析とシミュレーション（共立出版）

数値計算入門（オーム社）

マトリクスの数値計算（オーム社）

微分方程式の数値計算（オーム社）

誤差解析の基礎（サイエンス社）

理論数値解析（訳）（サイエンス社）

数値計算（サイエンス社）

数値計算法（共著）（新曜社）

詳解 数値計算演習

定価 1800 円

1980 年 4 月 15 日　初版 1 刷発行

著　者　戸　川　隼　人

発行者　南　條　正　男

東京都文京区小日向 4 丁目 6 番19号

印刷者　大　久　保　絢　史

東京都新宿区市ケ谷本村町27

NDC 418.1

発行所　東京都文京区小日向 4 丁目 6 番19号
電話　東京　947 局 2511 番(代表)
郵便番号 112／振替東京 1-57035 番
共立出版株式会社

印刷・新日本印刷／製本・中條製本　Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会員

3041-119010-1371

まえがき

「演習の時間は学校生活の中で最も楽しい時間であるはずだ」という意味の御説を森口繁一先生から伺ったことがある．講義の時間はおもに話を聞くだけであるが，演習の時間には，自分で考え，くふうし，発見していく．その過程で，理解が深まり，実力がついていく．それが楽しくないはずがない，というわけだ．理科の実験はおもしろい．自動車教習所に行っても実技は講義よりおもしろい．だから数学の演習も本来ならば楽しいものであるはずなのだ．

しかし，現実には，あまり楽しくない演習が多いようである．創意，くふうの機会ではなしに，単なるシゴキの場になっていることがある．だから「演習が楽しい」などというと，皮肉に聞こえるかもしれない．教師の側からいっても，実際に「楽しい演習」を行なうことは決して容易ではない．うまい題材を見つけて，効果的に展開していくためには，長期間にわたる準備と，かなりのマン・パワーを必要とする．筆者も，教師になったばかりの頃は，いい演習ができなかった．しかし近年になって，ようやく軌道に乗ってきて，かなり楽しい演習をやれるようになったと思う．現在，日本大学と早稲田大学と東京農工大学で教えているが，これを活字にして，より多くの方々に演習を楽しんでいただこう，というのがこの本のねらいである．

演習を楽しくするコツは，問題をやさしくすることだと思う．むずかしすぎると，苦しいばかりで，創意，くふうの余地がなく，能力も育たない．教師にとっては簡単に見える問題も，学生にとっては難問であることが少なくない．だから，最初は思いきってやさしい問題を出し，まず全員に成功させて，そのはずみで少しずつレベルを上げていくのがよい．そんなことは当然のことだ，といわれるであろうが，実際にはあまり行なわれていないようで，先日聞いた話では，入社試験で３元の連立方程式を出題したら，解けない人がずいぶんいたそうである．わが国の教科書の章末の演習問題は，概してむずかしすぎるよ

うに思う．もっと基礎的なドリルをたくさんやらせるほうがよさそうだ．そういう考えから，本書では，やさしい問題をかなり多くしてみた．

演習を楽しくするためのもう一つの要点は，おもしろい題材を選ぶことであろう．それにはいろいろな案が考えられる．たとえば，テレビ・ゲームの戦略を解析する，というような問題でおもしろくさせることもできるし，日食の計算をしてみる，楽器の特性を計算してみる，という手もある．しかし，そういう問題を本当におもしろいと思うか否かについて，かなりの個人差があるし，いろいろな関連知識も必要になろう．そのような事情を考えて本書では具体的問題を避け，なるべく「数学的な意味でおもしろい問題」たとえばホーム・メードのπを作る問題，意外な結果の出る問題，などを入れることにした．

コンピューターや電卓を活用することも，演習を楽しくする上できわめて効果がある．本書では，そのような問題を数多くとりいれた．とくにプログラム電卓は，最近，安くなって誰でも買える価格になり，性能も良くなって，初等数値計算の練習には十分なので，本書では，なるべくこれを活用する方針をとり，コンピューターを使わないでも済む問題に関しては，原則としてプログラム電卓による解答を示した．

理論的な演習問題（公式の導出，収束の証明，誤差評価などに関する問題）は本書の範囲外とした．その理由は，本書の読者の大部分が「数値計算を道具として使う人達」であろうと考えたからである．数値計算に慣れ親しむ，おもな公式を覚えて活用法を身につけるといったことだけでもかなりの分量になるのに，この上さらに理論的な問題を加えたら負担が大きくなりすぎる．理論は理論で別の機会にきちんと勉強するほうがスッキリしてやりやすいと思う．

そういうわけで，本書は要するに「例題集」「ドリル」「教科書ガイド」である．副読本として，演習教材として，あるいは独習書として，お役に立てば幸いである．

1980 年 1 月

著　者

目　　次

第7章　近似と補間

第8章　数値積分

第9章　微分方程式の数値解法

付　録　連立非線形方程式の解法

第1章 計 算 機 械

近年，計算機械が著しく進歩し，数値計算は機械を用いて行なうのがふつうになってきた．第1章では，その基本的な使用法を勉強する．

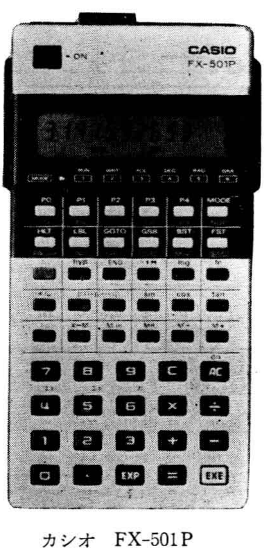
1.1 電 卓

電卓の操作法は機種によって少しずつ異なるが，科学計算用の電卓ならば基本的な操作法はほぼ共通である．例外は YHP（横河ヒューレットパッカード）社の製品で，これだけはあとで別に説明する（11 ページ）．

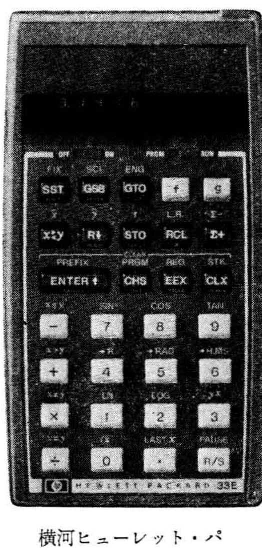
数値の扱い　電卓の内部では数値を，符号，仮数，指数の組，たとえば

$$-0.38435712 \quad \times \quad 10^2$$

の形（これを**浮動小数点**の形という）で扱っている．ただし，このままでは読みにくいので，数値の大きさがふつうの形（上の例でいえば -38.435712）で表示できる範囲にあれば，ふつうの形になおして表示する．数値を電卓に入れるときには原則として



カシオ　FX-501P



横河ヒューレット・パッカード　HP-33E

本書の例題に使用するプログラム電卓

整数部 小数点 小数部 負数の場合は +/− EXP 指数 負の場合は +/−
(またはその一部を省略した形) の順にキーを押す. たとえば前記の数ならば

38.435712 +/− (または 0.38435712 +/− EXP 2)

とする. +/− は符号を反転するキーである (機種により名称は多少異なるが, たいていこのようなキーがある). ふつうの書き方のとおりに

−38.435712

とすると, ふつうと同じ意味に扱われることもあるが, ふつうとは違う結果になることもあるので注意を要する (問題 [10]).

加減乗除 電卓の最も基本的な使い方は

第1被演算数を入れる	(例)	3.1
演算子のキーを押す		+
第2被演算数を入れる		2.75
=を押す (答が表示される)		= 答 5.85 が表示される

である. この場合は, ふつうの式と全く同じ形であり, 誰がやってもまちがえる危険はない.

(備考) 第1被演算数を入れる前に, AC (accumulator clear の略) キーを押して, 前の計算の結果を消しておけば, なおいっそう安全である. そのようにすれば, たとえば「−2+5=」としてもふつうと同じ答3が得られる.

2乗の計算 2乗の計算の際には第2被演算数の入力を省略できる. すなわち

数値 × =

の順にキーを押せば, その数値の2乗が計算される.

(例) 3 × = 3^2 が計算され結果9が表示される.

累算の方法 いま得られた答を, すぐつぎの計算の第1被演算数として用いる場合は,

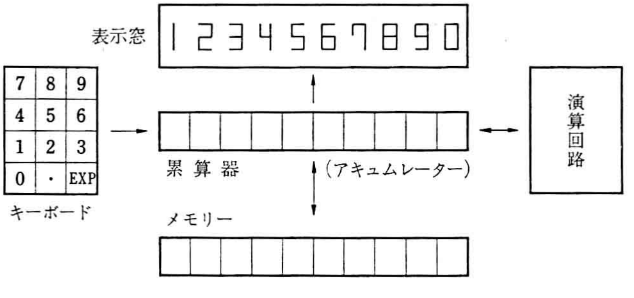


図 1.1

第1被演算数の入力を省略できる.

前の計算式		(例)	$1+2$
=	(前の計算の答が出る)		=　(答 3)
演算子	(第1被演算数としては前の答が用いられる)		×
第2被演算数			5
=			=　(答 15)

省略形　上記が累算の基本形であるが，長い計算の各段階で毎回＝を押すのはめんどうなので，累算の途中の＝は省略してもよいことになっている.

(例)　$1+2+3+4+5=$　　$1\times2\times3\times4\times5=$　　$1\div2\div3\div4\div5=$

この例のように演算子が全部同じならば，ふつうの数式のとおりであるが，加減算と乗除算を混用すると，ふつうの数式どおりではなくなり，機種によっては扱い方の違うものもあるので注意を要する（したがって初心者は，演算子を混用する場合，なるべく＝記号を省略しないほうが安全である).

(例)　$1+2\times5=$　の答は15になる．ただし機種によっては答が11になる.

例題【1】 多項式

$$x^5+3x^4+7x^3+6x^2+2x+10$$

に $x=8$ を入れたときの値を計算せよ.

解　まともに $x^5, x^4, x^3, x^2, x^1, x^0$ を計算し，1, 3, 7, 6, 2, 10 を掛けて加える，という方法は非常に手間がかかるのでよくない．そこで，この式を

$$((((x+3)x+7)x+6)x+2)x+10$$

と変形する．こうすれば「前の結果に x を掛ける」「その結果にある数を加える」という操作のくりかえしによって計算できて便利である．$x=8$ の場合の操作法は

$$8+3= \quad \times8+7= \quad \times8+6= \quad \times8+2= \quad \times8+10=$$

で答は49050になる．これが電卓における**多項式の計算の定石**である．この途中の＝を省略してもよいが，機種によっては，そうすると正しい答の得られないことがある.

メモリーの使用法　いま得られた結果を，何段階かあとの計算に使いたいとき，結果を書きうつしてあとでまたキーボードから入れるのはめんどうなので，その手間を省くため，結果を一時的に電卓の中に記憶させておいて，あとで取りだして使用することができる．そのための記憶場所を**メモリー**という（ふつうの電卓にはメモリーが1個だけしかついていないから，番地などはついていない)．メモリーへの書きこみ，読みだし，その他は，ふつう，つぎのキーにより行なう.

MC　メモリー・クリアー† (それまでに入っていた内容を消す)

† 機種によってはMCのかわりに「前の内容を消して新しい内容を書きこむ」というキーを設けているものもある.

M＋ メモリー・プラス（いまの計算の結果†をメモリーに加える）
MR メモリー・リード††（メモリーの内容を読みだして表示する）

読みだした数値は，つぎの計算の被演算数として使用できる†††．なお，読みだしても，メモリーの内容はそのまま残っている．またM＋の際も，前の計算の結果はそのまま残り，つぎの計算に使用することができる．

例題【2】 2組のデーター
[8.15 6.33 5.29]
[4.25 7.23 6.57]
の積和を求めよ．

解 まずMCによってメモリーをクリアーし
8.15 × 4.25 ＝ M＋
6.33 × 7.23 ＝ M＋
5.29 × 6.57 ＝ M＋
としてMRで読みだす．答は115.1587．これが電卓における**積和の計算の定石**である．

（備考） 高級機だと，ふつうの式と同じ形
8.15×4.25＋6.33×7.23＋5.29×6.57＝
で積和の計算ができる．この場合は上記の定石にこだわる必要はない．

例題【3】 つぎの計算をせよ．
（i） (51＋28)×(132−96)
（ii） $\dfrac{316-79}{62+17}$

解 （i） まず 51＋28＝ で第1項を計算し，MC，M＋によってメモリーに入れ，つぎに 132−96 で第2項を計算し，×MRによって第1項を掛けあわせる．
51＋28＝ MC M＋ 132−96＝ × MR ＝ 答は2844
（ii） このような問題では分母を先に計算し，メモリーに入れておいて，つぎに分子を計算し，メモリーに入れておいた分母で割る．
62＋17＝ MC M＋ 316−79＝ ÷ MR ＝ 答は3

関数キー 関数電卓には
$\sqrt{\ }$ e^x 10^x $\sin x$ $\cos x$ $\tan x$ x^y
x^2 $\ln x$ $\log x$ $\sin^{-1}x$ $\cos^{-1}x$ $\tan^{-1}x$ $1/x$
などのキーがある．操作法は，ふつうの数式とは逆順で

† ただし 5 ＋ 2 M＋ としたとき，メモリーに7が入る機種と2が入る機種がある．
†† 正式には memory recall というようであるが，read の方が覚えやすい．
††† たとえば MR×3＝ あるいは 7÷MR＝ のように使うことができる．

引数を先に入れる（または計算して求める）
関数キーを押す（＝を押す必要なし）

により答が出る．

（注意1）三角関数，逆三角関数の角度の単位は，度とラジアンの2種類（機種によってはそのほか直角単位 GRAD）があり，中級機以上ならばスイッチで切りかえができる．その設定を忘れると，おかしな計算になる．

（注意2）関数計算の場合の結合順序はふつうの計算（加減乗除）と少し違う場合がある．たとえば，$\sin(\alpha+\beta)$ を計算したい場合

$\alpha \quad + \quad \beta \quad \sin$

と入力すると，期待どおり $\sin(\alpha+\beta)$ の得られる機種もあるが，$\alpha+\sin\beta$ が計算される機種もあるから，自分の機械のくせをよく調べておく必要がある．後者のような機種は，$\sin\alpha+\sin\beta$ などの計算に便利である（たとえば，スイッチを度にして 30 SIN＋30 SIN ＝とすれば答は1になる）．いずれにしても

$\alpha \quad + \quad \beta \quad = \quad \sin$

とすれば確実に $\sin(\alpha+\beta)$ を計算することができる．

（注意3）x^y の計算はつぎのようにする．

x を入れる　x^y のキーを押す　y を入れる　＝を押す

y は整数でなくてもよい．n 乗根の計算の際には y として $1/n$ を使うが，機種によっては，これを $x^{(1/n)}$ の形，すなわち

x を入れる　x^y のキーを押す　n を入れる　$1/x$ を押す　＝を押す

により計算できる．たとえば

8　x^y　3　$1/x$　＝　答は2

（注意4）キーの個数が多くなるのを避けるため，一つ一つのキーに2重，3重の意味をもたせている機種が多い．たいていは $\sin x$ と $\sin^{-1}x$，10^x と $\log x$ などをペアにして，一方を逆関数キー（INV，ARC などの名前がついている）の前置（先に押す）で区別する．たとえば

x　SIN　とすれば　$\sin x$，　x　INV　SIN　とすれば　$\sin^{-1}x$

が計算される．

（注意5）関数計算には少し時間がかかる．その演算中につぎの操作を始めると（機種によっては）入力が無視されたりして，正しく計算されないことがあるから，表示窓の文字の動きが止まるまで待つ．

プログラム電卓　数値計算においては，同じ計算手続きを何回も何回もくりかえすことがよくある．その場合，全く同じ操作を何度もくりかえすのはめんどうであるから，計算の手続きを電卓に記憶させ，実行させることができれば便利であろう．そのような機能をもっているのが**プログラム電卓**（プログラマブル電卓）である．これは，手でキーを押すかわりに，記憶していた手順に従ってキーを押す，というだけのことであるから，「プ

ログラム」といっても，基本的には，ふつうの操作と全く同じである．少しだけ違う点は

1)　中間結果を紙に書きうつし，あとで再入力，というようなことをしないで済むように，複数個のメモリーをもっている．一つ一つのメモリーは番地（番号）をもっていて，メモリーの操作をするときには必ず番地を指定する

2)　中間結果の大小その他を見て処理内容を変えることができるように

　　　二つの数値の大小の比較　　その結果によるプログラムの分岐

　のための機能がある

3)　くりかえし計算の制御のための機能がある

などである．このほかにも各種の機能があるが，最低限これだけ知っていれば大部分の用途には十分である．

その仕様（文法，操作法など）は機種によってかなり異なるが，一つをマスターすれば他機種への乗りかえは簡単にできるから，以下では代表的な機種2機について，基本的な使用法を説明する．

［カシオ FX-501P の場合］

1)　メモリーの番地の指定法

メモリーは0番地から9番地までとF番地の計 11 個ある．番地の指定は

Min	n	いま表示されている数をn番地に書きこむ（以前の内容は消える）
M+	n	いま表示されている数をn番地に加えこむ（表示数値は不変）
MR	n	n番地の内容を読みだす（被演算数として使用できる）

とする．nは1桁の数字またはFである†．

なお特殊な指定法として**間接アドレス**（indirect addressing）というのがあり，番地

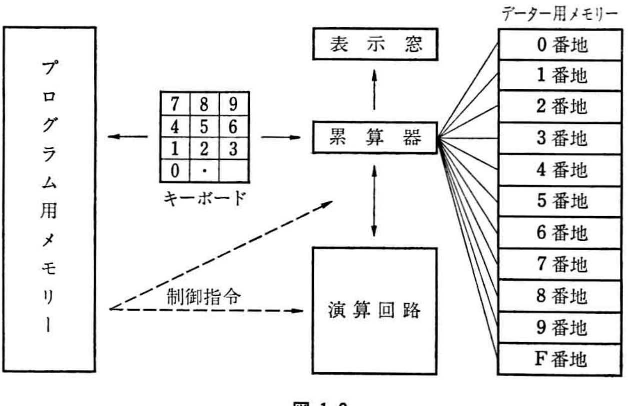


図 1.2

† Fというキーがある．このキーは EXP やπと共通であるが，メモリー関係のキーのつぎに押された場合は番地Fの意味になる．

nを固定せずに変数のように扱うことができる．それには

IND Min k　　IND M+ k　　IND MR k

のように頭に IND (indirect の略，間接番地指定のこと) をつける．そうすると，その時にk番地に入っている数nが有効番地になり

Min n　　M+ n　　MR n

の意味になって実行される（nは1桁の整数に限る)．

（例） 1番地に 7，2番地に 5，3番地に 8，5番地に 3，7番地に6が入っているとき

IND MR 1 ÷ IND MR 2 = IND Min 3

を実行すると

MR 7 ÷ MR 5 = Min 8

と解釈され，6÷3 の答2が8番地に書きこまれる．

2） プログラムの流れの制御

基本的なものとしては，GOTO と LBL がある．プログラムは原則として先頭から順番に実行されるが，GOTO はその順番の飛びこし（またはもとにもどること）を指示するもので

GOTO n　　（nは0～9の数字1桁）

とすれば，プログラムの中の

LBL n

のところにとんで，以後はそこから順番に実行される．GOTO は英語の命令文 "Go to ～" の意味．LBL は label（ラベル，名札）の略で，プログラムの中の位置を示すためのものである．ラベルは1桁の数字に限る．

プログラムの実行を**一時停止**するには，つぎの二つの命令（キー）がある．

HLT　停止する．そのあと EXE キーを押せば続きの部分の実行が始まる．

PAUSE　停止する．約1秒後に続きの部分の実行が自動再開される．

停止中は自由に手動操作が可能なので，メモリーにデーターを入れたり，計算結果をメモリーから読みだしたりすることができる．HLT は halt の略である．

例題【4】 2のべき乗 ($2^2, 2^3, \cdots$) を計算するプログラムを作れ．

解 2を2倍，2倍，… していけばよい．

2	初期値2を入れる
LBL 5	もどる場所にラベルをつけておく
×2=	2倍する
HLT	結果を読むために停止（答が表示されている）
GOTO 5	ラベル5にもどる

（操作法） 電源スイッチを ON にし

MODE 3 P0 AC　　以前に書かれていたプログラムを消す

MODE 2 P0	書きこみモードにする．プログラム番号0をつける
プログラムを入れる	(左記のとおりにキーを押していけばよい)
MODE 1 P0	実行モードに切りかえる．プログラム番号0を選択

これで実行が始まり，4を表示して止まる．EXE キーを押すと計算が再開され，つぎは8を表示して止まる．また EXE を押すとつぎは 16 を表示して止まる．以下同様である．

3) 大小の比較

数値の大小によってプログラムの流れを分岐させることができる．このためには，つぎの4種類の扱いが可能である．

キーの押し方	意 味
$x=0$ GOTO n	x が 0 ならばラベル n にとぶ
$x\geqq 0$ GOTO n	$x\geqq 0$ ならばラベル n にとぶ
$x=$F GOTO n	$x=f$ ならばラベル n にとぶ
$x\geqq$F GOTO n	$x\geqq f$ ならばラベル n にとぶ

ただし x は「最新の計算結果」，いいかえれば「その時点で表示されている数」のこと．また f は「F 番地の内容」である．これらの文は

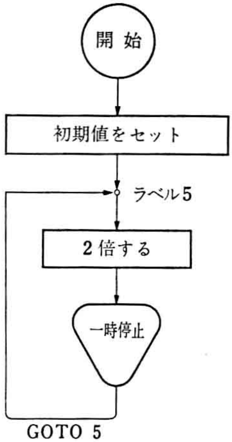


図 1.3 例題【4】の流れ図

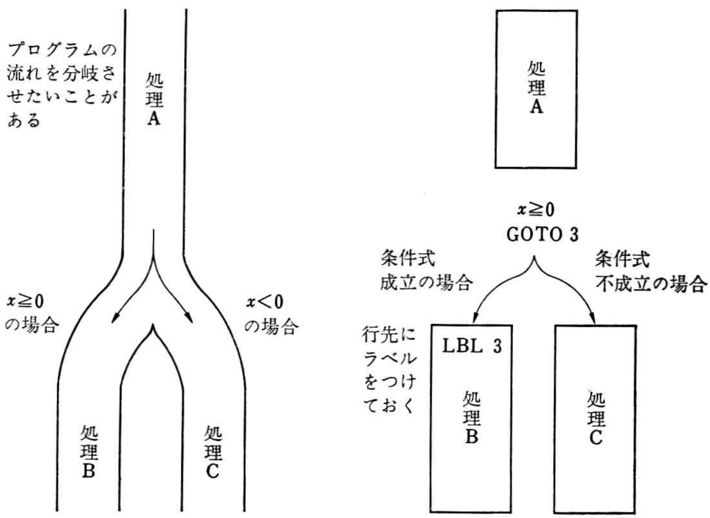


図 1.4 比較キーの使用例

IF　$x=0$　THEN　GOTO　n

というように，IF と THEN を付けて読めば，FORTRAN や PASCAL などと似た感じになる．

4)　一定回数のくりかえし

プログラムの一部を m 回くりかえして実行させるには，つぎのようにする．

m　Min 0	回数 m を 0 番地に入れる
LBL　n	反復部分の先頭にラベルをつける
反復実行すべきプログラム	
DSZ　GOTO　n	0 番地の内容を 1 だけ減らし，結果が 0 でなければラベル n のところにもどる

あるいは，つぎのようにしてもよい．

m　$^+/_-$　Min　0	0 番地に $-m$ を入れる
LBL　n	反復部分の先頭にラベルをつける
反復実行すべきプログラム	
ISZ　GOTO　n	0 番地の内容を 1 だけふやし，結果が 0 でなければラベル n のところにもどる

5)　サブルーティン

一つのプログラムの途中で他のプログラムを呼びだして実行し，それが終ったらまたもとのプログラムの続きを実行することができる．これにより

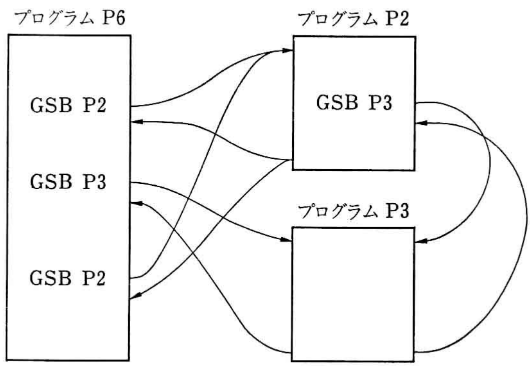


図 1.5　サブルーティンの使用例