变分法——理论与应用

Variational Methods — Theory and Applications

宣本金 编著

中国科学技术大学研究生教材

ZHONGGUO KEXUE JISHU DAXUE YANJIUSHENG JIAOCAI

中国科学技术大学出版社

中 国 科 学 技 术 大 学 研 究 生 教 材

Variational Methods — Theory and Applications

变分法——理论与应用

责任编辑：张 斌

封面设计：书衣坊

ISBN 7-312-01836-X

9 787312 018367 >

ISBN 7-312-01836-X/O · 338

定价：30.00元

变分法——理论与应用

宣本金 编著

出版社

中国科学技术大学研究生教材

变分法 —— 理论与应用

Variational Methods — Theory and Applications

宣本金 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书不仅对变分法的基本概念、理论和方法作了严谨的介绍和论述，而且特别注重介绍变分法在解决椭圆型方程中的应用。本书中的许多证明都被有意识地分解成几个步骤，每个步骤都给出子目标，这样不仅利于读者理解证明思路和过程，而且更便于总结命题条件与结论之间的因果关系。本书在内容上尽量做到自封，只是在极少数地方引用了代数拓扑和泛函分析中的命题，也尽量给出参考文献，以便读者查阅。

本书可作为数学系分析类研究生专业教材，也可作为数学系高年级本科生选修课教材。

图书在版编目(CIP)数据

变分法：理论与应用 = Variational Methods: Theory and Applications/宣本金编著. —合肥:中国科学技术大学出版社，2006.8

ISBN 7-312-01836-X

Ⅰ. 变… Ⅱ. 宣… Ⅲ. 变分法—高等教育—教材—英文 Ⅳ. O176

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 076527 号

Variational Methods — Theory and Applications *Benjin Xuan*

变分法 —— 理论与应用 宣本金 编著

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编：230026
网址：http://press.ustc.edu.cn

印刷 合肥学苑印务有限公司

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 710 mm × 960 mm 1/16

印张 20.25

字数 420 千

版次 2006 年 8 月第 1 版

印次 2006 年 8 月第 1 次印刷

书号 ISBN 7-312-01836-X/O•338

定价 30.00 元

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

Variational Methods

— Theory and Applications

Benjin Xuan

University of Science and Technology of China Press

前　言

自 1998 年以来，作者在中国科学技术大学数学系和哥伦比亚国立大学(Universidad Nacional de Colombia)数学系多次讲授研究生课程“变分法”。虽然在变分理论方面有好几部专著，如本书参考文献中所列，有 M. Struwe 编著的《Variational Methods》、M. Willem 编著的《Minimax Theorems》、张恭庆院士编著的《临界点理论及其应用》、陆文端编著的《微分方程中的变分法》、沈尧天和严树森编著的《拟线性椭圆型方程的变分法》等等，但是作者在科研和教学中总感觉到上述专著要么起点太高、内容没有自封性，要么体系庞大、内容过于烦杂。在教学中，为了做到理论体系相对完整、自封，证明脉络清晰，需要查阅许多文献资料；同时，为了使学生尽快接触到科研前沿，我们也有意识地增加最新的科研成果的介绍。经过几轮讲授，现将讲稿整理出版，希望对以后的教学有所帮助。

为了提高学生的专业英语水平和国际竞争力，教育部教高[2001]4 号文件明确指出：高校教育应采用双语教学，尤其是被列入“211”重点工程的各高校，要创造使用英语等外语进行公共课和专业课教学的气氛。结合现在研究生教学的实际情况，本书采用英语编写。

本书主要内容安排如下：

第 1 章概述变分理论的主要思想、基本概念和术语。通过广义解将微分方程的求解与泛函极值问题的求解联系起来，提出了现代变分理论的中心任务：通过寻求适当泛函的临界点求解微分方程的解。最后介绍了几个源自物理和几何的具体例子，首先利用物理定律或几何性质，给出适当的能量泛函，再导出欧拉-拉格朗日(Euler-Lagrange)方程。

第 2 章研究索伯列夫(Sobolev)空间的基本性质。索伯列夫空间已经成为应用泛函分析知识得到微分方程信息的最合适的工作空间，本章主要介绍后面内容将要用到的主要性质，如基本不等式、嵌入定理，以及各种意义下的强弱收敛关系。关于索伯列夫空间知识的完整介绍，可以参考 R. Adams 和 J. Fournier 编著的《Sobolev Spaces》第 2 版，以及 L. C. Evans 编著的《Partial Differential Equations》的第 5 章。

第 3 章介绍巴拿赫(Banach)空间中的微积分，给出了作为全微分和方向导数推广的弗雷歇(Fréchet)导数和加托(Gâteaux)导数的定义，以及它们之间的相互关系。考察了涅梅茨基(Nemytski)算子的连续性，这在验证泛函满足紧性条件——(PS)条件

时很有用。最后，为了在第 5 章中构造伪梯度向量场，我们介绍了巴拿赫空间中抽象函数初值问题的可解性。

第 4 章讨论求解极值问题的直接方法，以及它在不同情形时的推广。首先导出了求解极值问题最重要的概念——下半连续性。由下半连续性和埃克兰(Ekeland)变分原理，从下有界的泛函中很容易得到(PS)序列。为得到极小值点，我们需要一定的紧性条件，以从(PS)序列中抽取收敛的子列，这就是(PS)条件。(PS)条件在变分理论中起着重要的作用，局部地，它保证(PS)序列中收敛子列的存在性；整体地，它保证泛函水平集在含有临界值的水平之间可以作连续形变。

第 5 章介绍形变原理。为了方便学习，我们首先介绍希尔伯特(Hilbert)空间中的形变原理，因为这时可以运用梯度场这个概念。然后介绍一般巴拿赫空间中的形变原理，这要推广希尔伯特空间中的梯度场，提出伪梯度场这个概念。同时，我们分别介绍不带(PS)条件和带有(PS)条件两种不同情形时的形变原理，以便应用时对不同情形加以选择。

第 6 章介绍极小极大方法。首先，我们叙述一个一般性的极小极大原理，而将山路引理、指标理论和环绕方法作为其推论给出，这样就更能看出这几种方法的统一性。对于每种方法，我们都介绍几个应用实例，以说明如何针对具体问题选择合适的方法。

第 7 章介绍失去紧性的变分问题。我们首先介绍波霍扎叶夫(Pohozaev)型积分恒等式，并由此得出一些不存在性结果，特别是拟线性椭圆型方程在临界增长情形下解的不存在性结果。我们注意到，此时紧性的缺失是由于泛函在某些非紧群作用下所具有的不变性所导致的。为消除这些非紧群作用的影响，我们将求解空间加上某种对称性，从而重新获得紧性。但是，对于一般非紧泛函(可能没有对称性)，由 P. L. Lions 所发展起来的集中紧性原理刻画了泛函极小化序列的收敛性态：紧性、消失性或二分性。而关于一般(PS)序列的收敛性态，Struwe 等给出了全局紧性定理。

第 8 章研究源自水波方程的广义 Kadomtsev-Petviashvili 方程在高维空间中孤波解和稳态解的存在性。这部分综合应用了前面的各种理论方法。

第 9 章介绍索伯列夫不等式中最佳常数的达到函数。在第 7 章中，我们发现达到函数的显式形式在求解具有临界增长的方程时起着重要的作用。由于许多文献中直接给出其显式形式，但是没有具体推导过程，所以在此我们从 1 维情形的 Bliss 引理开始，推导出一般情形时达到函数的显式形式，并综述了它在求解 Yamabe 问题中的应用。

在附录中，我们简单介绍了椭圆型方程的正则性结果。为叙述方便起见，我们只考虑了简单的线性情形。

在行文中，我们力求叙述准确，重点突出。每个证明都被有意识地分解成几个小步骤，每步都明确写出子目标，这样更方便读者把握证明思想；同时，也能较清楚地看清条件和结论之间的因果关系。因为在不同的具体问题中，有的是思想框架

相似，局部细节不同；有的是局部细节可以应用到不同情形等情况，所以对证明的框架和细节都必须熟练掌握。在每个理论方法之后，我们都介绍几个应用实例，有的是直接验证定理中的条件，以显示如何去验证条件；有的是正文定理证明中某些与前面步骤类似的地方，留作习题，让读者自己补上，以强化理解。

本书适合高等院校数学系微分方程、微分几何以及数学物理等专业的研究生学习变分法理论，前半部分也可以作为数学系高年级本科生的选修课教材，特别是有关 Sobolev 空间的知识、Banach 空间微积分以及变分法的直接方法。

本书的编写得到国家自然科学青年基金（No. 10101024）和中国科学技术大学研究生教材出版基金的资助。在编写和教学过程中，班上同学曾提出过许多宝贵的意见和建议，在此一并致谢。由于作者学识所限而导致的错误和不足在所难免，望读者批评指正。

宣本金

2006 年 5 月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

Preface

This book is intended to be as a textbook for graduate students or undergraduate students for their last year. The guiding principle followed is that all definitions, theorems, etc., should be clearly and precisely stated. Proofs are given with the student in mind. Most are presented in detail and step by step, indicated the sub-goal for each step if possible. When this is not the case, the reader is told precisely what is missing and asked to fill in the gap as exercise which is meant to fix the ideas of the section in the reader's mind.

This book is organized as follows:

In Chapter 1, we give the fundamental questions and basic ideas of variational method.

In Chapter 2, we recall some basic definitions and useful inequalities of Sobolev spaces, which turn out to be the proper setting in which to apply ideas of functional analysis to get information concerning partial differential equations.

Chapter 3 is concerned with calculus in Banach space, various derivatives of functionals defined on Banach space and critical points of differentiable functionals regarded as the weak solutions of PDE are introduced.

In Chapter 4, we study the direct methods to solve extremal problems. Some variants of direct methods, such as Lagrange multiplier method, weak sub- and super-solutions method and Nehari manifolds, are presented with examples.

In Chapter 5, we established some deformation theorems with or without (PS) condition, which will be the base-stone for minimax theorems.

In Chapter 6, we first present a somewhat general minimax principle, then study the Mountain Pass Lemma and its variants, the Index Theory and the Linking Argument as the consequences of the general principle. Several applications to semilinear or quasilinear elliptic equations are given.

In Chapter 7, using the Pohozaev type variational identity and the concentration compactness principle, we study the nonexistence and existence of noncompact variational problems, which include problems involving critical Sobolev exponents and the problems on unbounded domain as examples.

Chapter 8 includes the newly obtained results about the existence and nonexistence of solitary solutions to the Generalized Kadomtsev-Petviashvili (GKP)

Contents

Preface v

1 Introduction 1
- 1.1 Basic ideas of variational methods . . . 1
- 1.2 Classical solution and generalized solution . . . 4
- 1.3 First variation, Euler-Lagrange equation . . . 6
- 1.4 Second variation . . . 14
- 1.5 Systems . . . 14

2 Sobolev Spaces 21
- 2.1 Hölder spaces . . . 21
- 2.2 L^p spaces . . . 23
  - 2.2.1 Useful inequalities . . . 25
  - 2.2.2 Completeness of $L^p(\Omega)$ . . . 28
  - 2.2.3 Dual space of $L^p(\Omega)$ . . . 29
  - 2.2.4 Topologies in $L^p(\Omega)$ space . . . 31
  - 2.2.5 Convolution . . . 36
  - 2.2.6 Mollifier . . . 41
- 2.3 Sobolev spaces . . . 43
  - 2.3.1 Weak derivatives . . . 43
  - 2.3.2 Definition of Sobolev spaces . . . 45
  - 2.3.3 Inequalities . . . 50
  - 2.3.4 Embedding theorems and trace theorems . . . 55

3 Calculus in Banach Spaces 63
- 3.1 Frechet-derivatives . . . 63
- 3.2 Nemyski operator . . . 67
- 3.3 Gateaux-derivatives . . . 70
- 3.4 Calculus of abstract functions . . . 74
- 3.5 Initial value problem in Banach space . . . 76

4 Direct Methods **78**
4.1 Lower semi-continuity 78
4.2 A general lower semi-continuity result 83
4.3 Ekeland variational principle 87
4.4 Palais-Smale condition 90
4.5 Constrained variational problems 100
4.5.1 Lagrange multiplier method 100
4.5.2 Weak sub- and super-solutions 104
4.5.3 Nehari manifold 107

5 Deformation Theorems **112**
5.1 Deformations in Hilbert space 112
5.2 Pseudo-gradient vector field 118
5.3 Deformations in Banach space 122

6 Minimax Methods **135**
6.1 General minimax principle 135
6.2 Mountain pass lemma 139
6.3 $\mathcal{Z}_2$ index theory 145
6.3.1 Minimax principles for even functionals 148
6.3.2 Symmetric mountain pass lemma 150
6.4 Linking argument 157
6.5 p-Laplacian with indefinite weights 162
6.5.1 Linking results 163
6.5.2 Existence results 165

7 Noncompact Variational Problems **169**
7.1 Pohozaev type identities 169
7.2 Symmetry and compactness 174
7.3 Concentration compactness principles 181
7.3.1 The locally compact case 181
7.3.2 The limit case 191
7.4 Unconstrained problems involving critical Sobolev exponent . . . 197
7.4.1 Local compactness 197
7.4.2 Nonhomogeneous problem 208
7.4.3 Global compactness 216

8 Generalized K-P Equation **224**
8.1 Solitary waves 224
8.1.1 Existence of nontrivial solitary waves 228
8.1.2 Nonexistence of nontrivial solitary waves 231
8.2 Stationary solutions to GKP equation in bounded domain 236
8.2.1 Existence results 238
8.2.2 Nonexistence results 240

9 Best Constants in Sobolev Inequalities **245**
9.1 Best constants 245
9.1.1 1-dimensional case, Bliss Lemma 246
9.1.2 m-dimensional case, symmetrization 252
9.2 Applications 254
9.2.1 Yamabe problem 254
9.2.2 Problems with critical Sobolev exponents 256
9.2.3 Global compactness 259
9.3 Extensions 260
9.3.1 Gagliardo-Nirenberg inequality 260
9.3.2 The Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities 262

Appendix A Elliptic Regularity **272**
A.1 Local boundedness 273
A.2 Hölder continuity 283

Bibliography **297**

Index **305**

Chapter 1

Introduction

1.1 Basic ideas of variational methods

What is the variational method, or the calculus of variations? This is a method to select the best among a variety of objects, it is the following process:

(1) Gather all relevant objects into a space X; (For P.D.E., we will appeal to some appropriate Sobolev space. See Chapter 2 for Sobolev space.)

(2) Take an appropriate function (or functional) E on X. If E is appropriate for the purpose, then the minima or maxima of E in X are the best objects.

It has a long history and refreshes its face according to the developments of mathematics and other sciences. Laws in astronomy, mechanics, physics, all nature sciences and technologies as well as in the economy behavior obey variational principles. From the time of Newton, Leibnitz, Euler and Lagrange, the variational method has been carried out as follows:

(1) On the space X, one may consider the concept of the *differential* E' of E; (See Chapter 3, the calculus in Banach space.)

(2) If $x_0 \in X$ is *best*, then it should attain the maximum or minimum of E. So the *derivative* of E vanishes at x_0, i.e.,

$$E'(x_0) = 0.$$

(3) The point x_0 satisfying $E'(x_0) = 0$ (called a critical point of E) could be written and characterized in term of some differential equation (called the Euler-Lagrange equation).

(4) Thus, it remains only to solve this differential equation.

This is the classical process of variational method, which deals with minima or maxima by solving the Euler-Lagrange equation. Since the Euler-Lagrange

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com