高 等 学 校 教 材

线性代数

南京航空航天大学数学系
主 编 殷洪友
副主编 肖光世 张 娟 袁 泉 朱晓星

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线 性 代 数

Xianxing Daishu

南京航空航天大学数学系
主编 殷洪友
副主编 肖光世 张 娟 袁 泉 朱晓星

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是南京航空航天大学的教师在多年实际教学经验的基础上，根据“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成。

本书以求解线性方程组为切入点，系统地介绍了线性代数的基本理论和方法。书中内容结构紧凑、层次清晰、论证严谨、例题丰富，包括：行列式与线性方程组的 Gauss 消元法、矩阵、n 维向量与线性方程组解的结构、线性空间和线性变换、相似矩阵与矩阵的对角化、二次型，并配有难易适中的习题。

本书可以作为高等学校理、工、经管等专业的教材及参考书，也可以作为研究生入学统一考试的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/殷洪友主编. --北京：高等教育出版社，2012.1

ISBN 978-7-04-034083-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①殷… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 275634 号

策划编辑 王 强　　责任编辑 王 强　　封面设计 王 雎　　版式设计 马敬茹
插图绘制 尹 莉　　责任校对 陈旭颖　　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400—810—0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	保定市中画美凯印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	9.25	版　　次	2012年1月第1版
字　　数	160 千字	印　　次	2012年1月第1次印刷
购书热线	010—58581118	定　　价	14.30元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 34083—00

前　言

线性代数是一门研究有限维空间的线性理论课程，内容有很强的抽象性和逻辑性。线性问题广泛存在于自然科学的各个领域，某些非线性问题常常也可以转化为线性问题来处理，在计算机普遍应用的今天，线性代数的理论和方法已经成为从事自然科学和工程技术工作不可缺少的工具。因此掌握线性代数的基本概念和基本方法对每个科技人员来说是必需的。

本书共分六章。第一章通过求解二元和三元线性方程组引入二阶和三阶行列式，在此基础上，引入 n 阶行列式的概念，介绍行列式计算的基本方法和各种技巧。利用行列式的展开定理，讨论求解线性方程组的 Cramer 法则，介绍求解一般线性方程组的 Gauss 消元法。矩阵是线性代数中最基本的工具，在第二章介绍矩阵的代数运算、矩阵的初等变换和等价标准形、矩阵的秩以及矩阵分块的技巧。第三章引入 n 维向量空间的概念，在 n 维向量空间中，讨论向量组的线性相关性、向量组的秩，并将向量的有关知识应用于线性方程组理论中，给出线性方程组解的结构和通解。第四章引入线性空间的概念，讨论线性空间的维数和基、向量在基下的坐标表示，介绍 Euclid 空间，并介绍线性变换的初步知识，为后两章引入特征向量和二次型的线性变换提供应用背景。第五章讨论在工程计算和工程设计中非常有用的特征值问题，并由此引入矩阵相似的概念，通过讨论矩阵可对角化的条件介绍利用特征值简化矩阵计算的方法。最后，在第六章介绍二次型理论，主要是实二次型的化简及其正定性，并简单介绍二次型化简在讨论二次曲线中的应用。

本书以求解线性方程组为切入点，通过矩阵方法来研究线性代数中的一系列基本问题，不仅使得主线清晰，结构紧凑，而且使得问题处理简洁明了，易于理解，便于自学和把握。本书适当提升了线性空间与线性变换的地位，使得理论更加完整，各部分内容联系更加紧密、合理，也反映了编者对线性代数课程的新思考。另外，本书对一些抽象的概念大都通过具体例子加以说明，增强了抽象概念的实际背景和几何背景。

本书是在南京航空航天大学同名讲义的基础上修改而成的。讲义初稿第一章由袁泉编写，第二章由肖光世编写，第三章由张娟编写，第四章由殷洪友编写，

第五章和第六章由朱晓星编写，全书的修改和定稿由殷洪友完成。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编 者

2011年11月于南京航空航天大学

目　　录

第一章　行列式与线性方程组的 Gauss 消元法

行列式的概念最早在 17 世纪由日本数学家关孝和提出，他在 1683 年的著作《解伏题之法》中清楚地叙述了行列式的概念及其展开. 随着线性代数理论的发展，行列式已成为求解线性方程组的有力工具之一. 本章首先介绍行列式的定义、性质和计算方法，在此基础上，推导求解线性方程组的 Cramer 法则，最后介绍求解一般线性方程组的 Gauss 消元法.

1.1　n 阶行列式的定义

1.1.1　二阶和三阶行列式

考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 和 b_1, b_2 均为常数，x_1, x_2 为未知量. 利用消元法可知，若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则二元线性方程组(1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

显然，由(1.2)给出的二元线性方程组的求解公式，从形式上看，不利于记忆. 为方便记忆，引入记号 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，并规定

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.3}$$

称由(1.3)定义的 D 为**二阶行列式**.

二阶行列式由两行两列共四个元素构成，每个元素 a_{ij} 用两个下标表明其在行列式中的具体位置，第一个下标 i 表示该元素所在的行，第二个下标 j 表示该元素所在的列. 在二阶行列式中，称左上角到右下角的连线为主对角线，左下角

到右上角的连线为副对角线. 由式(1.3)可知，二阶行列式是一个数，可以由主对角线上的元素乘积与副对角线上的元素乘积相减而得.

将式(1.3)中定义的二阶行列式的第一列和第二列分别用方程组(1.1)的右端项 b_1, b_2 替换，得到两个新的二阶行列式，记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

由公式(1.2)，若 $D \neq 0$，则二元线性方程组(1.1)的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

注意到行列式 D 中的元素来源于二元线性方程组(1.1)中未知量前面的系数，常将 D 称为线性方程组的系数行列式.

类似地，为求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.4}$$

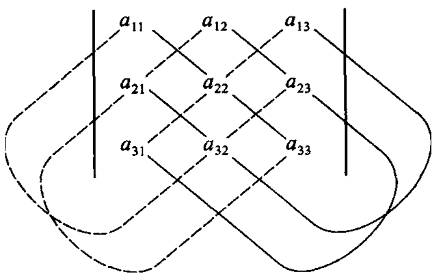
引入由三行三列共九个数构成的**三阶行列式**，仍记为 D，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{1.5}$$

其值定义为

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & \quad a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

三阶行列式的值也可按如下"对角线法则"求出，其中用实线相连的三项乘积在三阶行列式的求值公式中带正号，虚线相连的三项乘积带负号.



为讨论三元线性方程组的解，将行列式(1.5)的第一列，第二列与第三列分别用线性方程组的右端项替换，得到

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

利用消元法容易验证，若 $D\neq 0$，则三元线性方程组(1.4)有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}. \tag{1.8}$$

由以上讨论可知，利用二阶和三阶行列式表示二元和三元线性方程组的解，形式更简单，使用也更方便.

另一方面，实际应用中出现的线性方程组所含有的未知量个数通常多于三个，因此，有必要考虑一般的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的解法. 为此，需要将二阶和三阶行列式加以推广，引入 n 阶行列式的概念.

1.1.2 n 阶排列

为定义 n 阶行列式，首先介绍 n 阶排列的基本知识.

把 n 个不同的元素按一定顺序排成一行，称为这 n 个元素的一个排列. 例如

$$2\ 3\ 1$$

就是自然数 1,2,3 的一个排列.

为方便起见，今后把自然数 $1,2,\cdots,n$ 视为 n 个不同元素的代表.

定义 1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 排成的一个有序数组，称为一个 n **阶排列**.

n 阶排列的一般形式可记为

$$j_1 j_2 \cdots j_n,$$

其中 j_i 为 $1,2,\cdots,n$ 中的某个数，且 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 互不相同.

由排列组合的知识可知，n 阶排列的总数为 $n!$.

例 1.1 写出所有三阶排列.

解 所有三阶排列总数应为 $3!=6$，分别为

$$1\ 2\ 3,\quad 1\ 3\ 2,\quad 2\ 1\ 3,\quad 2\ 3\ 1,\quad 3\ 1\ 2,\quad 3\ 2\ 1.$$

在所有的 n 阶排列中，排列

$$1\ 2\ \cdots\ n$$

具有自然顺序,故称其为自然排列.显然,除自然排列以外,其他 n 阶排列中都会出现某些大数排在小数之前的情形.

定义 1.2　在一个 n 阶排列中,如果一个大数排在小数之前,则称这两个数构成一个**逆序**.一个排列中的逆序总数称为这个排列的**逆序数**.排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数记为 $\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)$.

若排列的逆序数为奇数,则称此排列为奇排列;若排列的逆序数为偶数,则称此排列为偶排列.

显然,自然排列的逆序数为 0,为偶排列.

例 1.2　计算下列排列的逆序数,并说明排列的奇偶性:

(1) 3　2　4　1　5;

(2) 3　2　4　5　1;

(3) n 阶倒序排列 $n\ \ n-1\ \ \cdots\ \ 2\ \ 1$.

解　(1) $\sigma(3\ \ 2\ \ 4\ \ 1\ \ 5)=4$,偶排列.

(2) $\sigma(3\ \ 2\ \ 4\ \ 5\ \ 1)=5$,奇排列.

(3) $\sigma(n\ \ n-1\ \ \cdots\ \ 2\ \ 1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$,当 $n=4k,4k+1$ 时,为偶排列;当 $n=4k+2,4k+3$ 时,为奇排列,其中 k 为任意自然数.

在一个排列中,交换其中任意两个数的位置,而保持其他数的位置不变,则得到一个新排列,这种操作称为一个对换.两个相邻数的对换称为相邻对换.上例中的排列(2)是由排列(1)经过对换 1,5 得到的,这是相邻对换.由于排列(1)是偶排列,而排列(2)是奇排列,所以排列(1)经过对换 1,5 改变了奇偶性.

定理 1.1　任一排列经过对换后必改变奇偶性.

证明　先考虑相邻对换的情形.设 n 阶排列

$$\cdots\ k\ l\ \cdots \tag{1.9}$$

经过对换 k,l 变成排列

$$\cdots\ l\ k\ \cdots, \tag{1.10}$$

这里"…"表示那些在对换下位置保持不变的其他数.由于排列中只有 k,l 两个数的位置改变,其他数位置保持不动,因此其他数之间以及其他数与 k,l 之间是否构成逆序在排列(1.9)和排列(1.10)中是相同的.要判定排列(1.9)和排列(1.10)是否有相反的奇偶性,只要考虑数对 k,l 即可.若 k,l 在排列(1.9)中不构成逆序,则它们在排列(1.10)中构成逆序;反之,若 k,l 在排列(1.9)中构成逆序,则它们在排列(1.10)中不构成逆序.由此可见,无论哪种情况,排列(1.9)和

排列(1.10)的逆序数总相差1,故排列(1.9)和排列(1.10)有相反的奇偶性.

再考虑一般情形.设排列

$$\cdots k\ j_1\ \ j_2 \cdots j_s\ l \cdots \tag{1.11}$$

经过对换 k,l 变成排列

$$\cdots l\ j_1\ \ j_2 \cdots j_s\ k \cdots. \tag{1.12}$$

可以看出,k,l 之间的对换可以通过如下 $2s+1$ 次相邻对换来实现:

$$\cdots k\ j_1\ \ j_2 \cdots j_s\ l \cdots \xrightarrow{s+1\text{次相邻对换}} \cdots l\ k\ j_1\ \ j_2 \cdots j_s \cdots$$
$$\xrightarrow{s\text{次相邻对换}} \cdots l\ j_1\ \ j_2 \cdots j_s\ k \cdots.$$

由于相邻对换改变排列的奇偶性,而 $2s+1$ 是奇数,因此排列(1.11)和排列(1.12)也有相反的奇偶性,从而结论成立.

由定理1.1可得如下结论.

推论 1.1 所有 n 阶排列中,奇排列与偶排列各占一半,均为$\frac{n!}{2}$.

推论 1.2 任一 n 阶排列均可通过若干次对换化为自然排列,并且所作对换次数的奇偶性与排列的奇偶性相同.

1.1.3 n 阶行列式

利用排列及逆序的概念,可以对前述二阶和三阶行列式给出新的解释.根据二阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

其值是两项的代数和,每一项是来自于不同行不同列两个元素的乘积,并且每个这样的乘积都出现在右边的展开式中.在展开式中,一项带正号,一项带负号.不难直接验证,当行指标为自然排列时,带正号的项,其列指标构成的排列为偶排列;而带负号的项,其列指标构成的排列为奇排列,因此二阶行列式的值可重新描述为

$$\begin{aligned} D=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \\ &=(-1)^{\sigma(1\ 2)}a_{11}a_{22}+(-1)^{\sigma(2\ 1)}a_{12}a_{21}=\sum_{j_1\ j_2}(-1)^{\sigma(j_1\ j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}, \end{aligned}$$

其中 $\sum\limits_{j_1\ j_2}$ 表示对所有二阶排列求和.

类似地,三阶行列式的值可重新写为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1 j_2 j_3}(-1)^{\sigma(j_1 j_2 j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

上式中，$\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对所有三阶排列求和.

通过以上分析可知，二阶和三阶行列式都是来自于不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和($n=2,3$)，求和总数为 $n!$；每一项乘积前面带有正负号，当该乘积项 n 个元素的行指标成自然排列时，其符号由这些元素的列指标所构成排列的奇偶性确定.

受以上分析的启发，给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.3　n **阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定义为所有取自于不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.13}$$

的代数和，每个项前面带有正负号，式(1.13)所带正负号由 $(-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ 确定，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}(-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.14}$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和.

式(1.14)称为 n 阶行列式的完全展开式，式(1.13)称为完全展开式的一般项.

注　当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$，不要与绝对值记号混淆.

由定义 1.3 和 n 阶排列的性质，式(1.14)中求和的总项数为 $n!$，求和式中带正号与负号的项数相等，均为$\frac{n!}{2}$.

通常用 D 表示 n 阶行列式，在不致引起混淆的情况下，定义 1.3 中的行列式也可简记为 $D=|a_{ij}|$.

在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中，称左上角到右下角的连线(即过元素 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 的直线)为主对角线，左下角到右上角的连线(即过元素 a_{n1}，$a_{n-1,2}$，…，

a_{1n}的直线)为副对角线. 主对角线以下(上)的元素都是零的行列式称为**上(下)三角形行列式**.

例 1.3 计算 n 阶上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由 n 阶行列式的定义可知,行列式的值为所有来自于不同行与不同列的 n 个元素乘积的代数和,如果构成某一项乘积的 n 个元素中有一个元素为零,则此项乘积的结果为零. 由此,考虑如下取法:第一列中可能不为零的元素只有 a_{11},其余取法均得到为零的结果,一旦取了 a_{11},则第一行和第一列中的元素均不会出现在此项乘积中,故第二列中可能非零的元素只有 a_{22} 可供选择,一旦取了 a_{22},则第二行、第二列中的元素均不能再取,如此继续下去,最后一列可供选择的元素只有 a_{nn},因此,按定义 1.3 需考虑的所有 $n!$ 项中,可能不为零的只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,其符号为$(-1)^{\sigma(1\ 2\ \cdots\ n)}=1$,从而行列式的值为

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii},$$

其中"$\prod$"为连乘符号.

n 阶上三角形行列式通常省去左下角的零元素,简记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

沿用二阶和三阶行列式中主对角线的术语,上例结果可表述为 n 阶上三角形行列式的值为其主对角线上 n 个元素的连乘积,此结论应当牢记并熟练使用.

类似地,可求得 n 阶**下三角形行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

例 1.4 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 此行列式中完全展开式中可能不为零的项只有 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$，其符号为 $(-1)^{\sigma(n\ n-1\ \cdots\ 1)}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，因此 $D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

最后给出 n 阶行列式的另一等价定义.

事实上，由于数的乘法满足交换律，所以一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中 n 个元素的次序可以任意排列，特别地，可以通过适当调换将 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 改写成

$$a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}.$$

在调换过程中，一般项的列指标所构成的排列 $j_1\ j_2\ \cdots\ j_n$ 通过若干次对换变成了自然排列，而行指标所构成的自然排列通过同样次数的对换变成排列 $i_1\ i_2\ \cdots\ i_n$. 易知

$$(-1)^{\sigma(j_1\ j_2\ \cdots\ j_n)}=(-1)^{\sigma(i_1\ i_2\ \cdots\ i_n)},$$

因此 n 阶行列式的完全展开式(1.14)又可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1\ i_2\ \cdots\ i_n}(-1)^{\sigma(i_1\ i_2\ \cdots\ i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}. \tag{1.15}$$

1.2 n 阶行列式的性质

对任给的 n 阶行列式，若其不具有特殊形状，如上三角形行列式或者下三角形行列式，利用定义求值会非常繁琐. 例如对于五阶行列式，若利用五阶行列式的定义求值，求和符号中共需计算 $5!=120$ 项，每一项都是五个数的连乘积，工作量比较大. 因此，需要讨论 n 阶行列式性质，以达到简化计算的目的，这是本节讨论的主要内容.

定义 1.4 设有 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 D 的**转置行列式**,记为 D^{T} 或者 D'.

上述定义中转置行列式可视为将 D 的第 i 行作为一个新行列式的第 i 列得到,称这种操作为转置.

性质 1 行列式的值等于其转置行列式的值,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证明 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则由 D 和 D^{T} 元素间的关系可知

$$b_{ij}=a_{ji}, i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,n.$$

对 D^{T} 按(1.15)展开得

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\sigma(i_1 i_2 \cdots i_n)} b_{i_1 1} b_{i_1 2} \cdots b_{i_n n} \\ &= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\sigma(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} = D. \end{aligned}$$

性质 1 表明,在行列式中,行和列的地位是对称的,对于行成立的性质,对于列也同样成立,反之亦然.

性质 2 将行列式中任意两行(列)位置互换,行列式的值反号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 由行列式的定义可知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n} (-1)^{\sigma(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n}$$

$$= -\sum_{j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n} (-1)^{\sigma(j_1 \cdots j_t \cdots j_s \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

对互换两列的情形可类似地证明.

性质 3 若行列式中两行(列)对应元素相同,则行列式的值为零.

证明 记行列式为 D,将其对应元素相同的行(列)互换得到的行列式记为 D_1,则由性质 2 可知,$D=-D_1$. 另一方面,由于互换的两行(列)元素相同,故 $D=D_1$,因此 $D=0$.

性质 4 若行列式中某一行(列)有公因子 k,则公因子 k 可提取到行列式符号外,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 由行列式的定义,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (ka_{sj_s}) \cdots a_{nj_n}$$