大學用書

統計學(二)——推理統計學

韋從序編著

正中書局印行

大　學　用　書

統計學(2)

推理統計學

(Inferential Statistics)

韋從序　編著

正中書局印行

中華民國六十二年十月臺初版

大學用書　統計學(二)—推理統計學

全一册　基本定價　平二元八角
精三元八角

(外埠酌加運費匯費)

編著者　韋從序
發行人　李潔
發行印刷　正中書局
(臺灣臺北市衡陽路二十號)
暫遷臺北市南昌路一段十二號

海外總經銷　集成圖書公司
(香港九龍旺角洗衣街一五三號地下)
海風書店
(日本東京都千代田區神田神保町一丁目五六番地)
東海書店
(日本京都市左京區田中門前町九八番地)

內政部登記證　內版臺業字第〇六七八號（6835）大興
(1000)

前　言

統計學爲一切研究的工具，其主要功能爲根據樣本資料以推論其所自來之母全體的一般性狀。科學家爲謀增進人類幸福，恆亟亟於研究自然事象和社會事象，俾得明瞭其性狀，以資因應或利用；但其經由實驗或調查所得的資料，常爲部分事象，祇能提供信息（Information）而不能顯示全部事象的眞實性狀，故必須借重統計方法予以推論。

本書係就在政大商學院主講統計學(二)所擬敎材大綱整編而成。其主題爲推理統計，卽介紹由樣本推論母體之方法，以備商學院學生研習之後可以參與各項研究工作，並可供有意從事研究工作者用作參考。

本書旨在應用，以介紹方法爲主，對於基本觀念雖屢作說明，但不作純理論之深入探討。例如樣本的出現是隨機的，不確定的；在不確定的情況下作論斷，必有風險；計算風險須以決策理論爲依據，而決策理論又脫胎於賽局理論，但本書則祇簡略介紹決策的概念。對於公式原則上不予證明，間或有所證明，亦可略而不讀，故初學者除初等微積分外，不須有高深之數學基礎。

本書共分十章。第五章至第十章介紹推論的方法，隨時列舉例證，不厭求詳。例如第六章假設檢定，根據敎學經驗，學生對於假設之建立及推翻域之認定，易滋錯誤，故於反覆解說外，更多舉例證，增其了解。前四章意在爲以後各章作準備。因爲一切推論均以機率爲基礎，而機率理論又脫離不了集合（set），故開宗明義第一章爲機率概論，接着介紹隨機變數的機率分配及樣本統計量的抽樣分配。若對機率分配及抽樣分配一無所知，則無法進行推論。學者對前四章也許

有空洞之感，但若略而不讀，雖亦可仿以後各章之例進行推論，必致觀念不淸，致滋惶惑。

敎學用書編撰，甚感取材困難，且統計學範圍廣大，本人學識淺陋，疏謬必多。敬祈方家，惠賜敎正，無任感荷。

本書各章初稿承蒙祁富生敎授精心核校，並因其指正而得減少疏失，至深銘謝。本書之付梓承梁悅蘭女士、楊漢堃先生鼎力校對暨協助整理習題，謹於此併致謝忱。

韋從序

中華民國六十一年十月於政大

統計學(二)

推理統計學

目　　次

第一章　機率概論

第二章　隨機變數與機率分配

第三章　幾種主要機率分配

第四章　抽樣分配

第五章　估　　計

第六章 假設檢定

第七章 變異數分析

第八章 共變數分析

第九章 迴歸分析

第十章 無母數統計方法

附 錄

索 引

第一章
機率概論

§1-1 機率與統計

機率理論 (Theory of Probability) 是統計學的主要基礎。我們可以說：無機率理論，則統計學無由建立，尤其是推理統計學（Inferential Statistics)。人類之注意機率，始自遊戲，繼及賭博。參與遊戲或賭博的人，莫不注意其勝利的機會 (Chance)。所謂機率在一般人的常識裏叫做機會。

統計方法主要的功能爲由樣本推測母全體（以下簡稱母體）之性狀。因統計資料常爲自母體抽出之部分資料，統計學術語稱爲樣本，而統計研究之目的則在瞭解樣本所屬之母體。根據以往統計學家實驗和經驗的結果，凡由一極大之事實羣（母體）內，隨機抽出相當大的樣本，則所抽得之樣本的性狀常接近於母體，因此當我們對於某一母體之性狀無所知時，可用合理方法抽取樣本，用以推測母體。

於此，我們應知從同一母體中，可能抽出若干不同之樣本。如果母體含有 N 個統計單位（個體)，今於其中抽出 n 個單位作爲樣本，則有 $\binom{N}{n}$ 個性狀不盡相同之組合，可能被抽出，且各具有同等機會。但究竟那一個樣本組合被抽出是不確定的 (Uncertain)。因而根據樣本推測母體所得之結果亦爲不確定的推理(Uncertain Inference)。但我們可應用機率原理計算樣本統計量(Statistic)與其母數(Parameter)

之可能的差異和機率。例如，我們可應用機率原理計算樣本均數與其母體均數之差量可能有多大，而且可以計算出其差異大小的機率；同理，我們可以應用機率原理計算樣本標準差與母體標準差之可能差異，樣本相關係數與母體相關係數之可能差異等等。換言之，可以機率表示不確定推理之可靠程度(Coefficient of Reliability)。所以我們仍然可由樣本推測母體。同理，我們也可以應用機率原理作為工具推測兩個或兩個以上母體均數（或其他母數）是否有差異。這種由樣本推測母體的方法，正如理則學中由各個別情形之研究以達一般化結論之歸納推理（Inductive Reasoning），也正是科學家建立科學定律的方法。所以有人說：統計學為一種能在不確定情況下作成決策的科學方法。

§1-2　樣本空間與事象

由母全體中連續抽取一定次數的樣本，稱為抽樣實驗(Sampling Experiment)。抽樣可能出現的結果，稱為成果（Outcome），每一種可能出現的成果，若於相同條件之下可以重複出現，在觀念上稱為樣本點（Sample Point），所有樣本點的集合（Totality of Possible Outcomes）稱為樣本空間（Sampling space）[1]。

樣本空間中具有相同性質之樣本點的部分集合，稱為事象(Event)，但一事象亦可能祇含一個樣本點[2]。由是知事象即數學中的集合(Set)。一個樣本點稱為基本事象或單一事象(Elementary Event or Simple Event)，集合論中稱為元素(Element)。質言之，樣本點、基本事象、元素三者含義相同，可交換使用，事象與集合亦然[3]。茲更舉數例說明其意義：

(1) 參考Mood A. M. Graybill F. A; Introduction to the theory of statistics 1969, p. 12
(2) 參考 Samual S. wilks; Mathematical statistics, 1962, p. 2
(3) 同上。

1. 擲一枚硬幣，若以H表示正面出現，T表示反面出現，則其可能出現的成果有（而且祇有）H及T二種。若將此同一硬幣重複試擲，上述二種成果，均可能重複出現，而且每次試行，二者必有一出現，故每一種成果即爲一樣本點。因爲祇有二個樣本點，這二個樣本點，就構成一個樣本空間。

如果將同一硬幣連續投擲二次，或左右手同時各擲一枚硬幣，則其可能出現的成果有下列四種：

$$HH,\qquad HT,\qquad TH,\qquad TT$$

即四個樣本點。若重複試行，則上列四種成果均可能重複出現，而且必有一種出現。因爲祇有四個樣本點，所以它們構成一個樣本空間。

一般地說，在樣本空間中，一種事象代表一個部分集合。在連續擲兩枚硬幣試驗中，令第一個出現正面者爲事象A，則事象A含有

$$HH,\qquad HT$$

兩個樣本點，如令第一個出現反面者爲事象B，則事象B含有

$$TH,\qquad TT$$

兩個樣本點，若令出現兩個正面爲事象C，則事象C祇含

$$HH$$

一個樣本點。事象A，B，C皆爲部分集合 (Subset)。

2. 擲一粒骰子，其可能出現的點數有下列六種：

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6$$

即共有六個樣本點，構成一個樣本空間。如令偶數點爲事象A，紅點爲事象B，則事象A含2，4，6三個樣本點，事象B含1，4兩個樣本點。

如果將一粒骰子連續擲二次，則其出現之成果如下：

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

上列三十六對數字，各對第一個數字表示第一次擲出的點數，第二個數字表示第二次擲出的點數，每一對數字表示一種成果，即一個樣本點，共有三十六個樣本點構成一個樣本空間，茲再圖示如下：

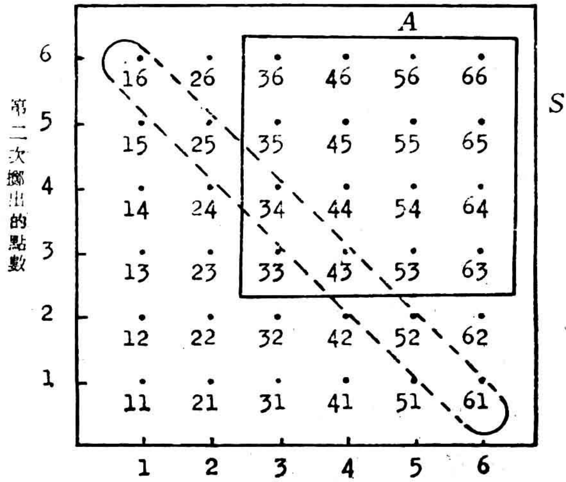


圖　1.1

上圖方形代表樣本空間 S，含三十六個樣本點。取兩次擲出的點數均不小於 3 爲事象 A，則 A 含十六個樣本點（見圖）；取兩次擲出的點數之和等於 7 爲事象 B，則 B 含六個樣本點（見圖）。A，B 均爲 S 之部分集合。

由上述兩例，可知所謂事象乃實驗者依其興趣所認定。在擲一枚硬幣連續兩次之實驗中，我們可以認定第一個出現正面爲事象A，也可以認定兩次出現之結果不同爲事象A，在連續擲一粒骰子兩次之實驗中，可以取兩次擲出的點數均小於3爲事象A，也可取兩次點數均不小於4爲事象A，可以取兩次點數之和等於7爲事象B，也可取兩次點數之和等於6爲事象B。

事象有多種，茲分別說明其意義如次：

1. 部分事象 (Sub-Event)

設事象A之各元素均具有B之性質，則稱A爲B之部分事象。在前述擲兩枚硬幣之實驗中，取不少於一個正面爲事象B，則B包含HH，HT，TH三個樣本點；取出現兩個正面爲事象A，則A祇含HH一個樣本點；而A爲B之部分事象。以

$A\subset B$或$B\supset A$表示之

若令$H=1$，$T=2$，則可作圖如下：

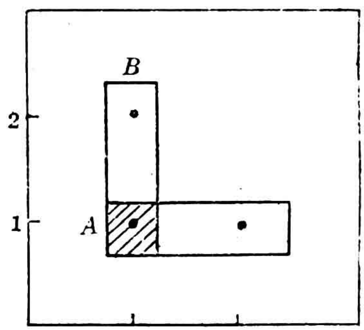


圖 1.2

2. 相等事象 (Equal Events)

若$A\subset B$且$B\subset A$，卽A及B均由完全相同之樣本點所組成的事象，則稱A與B爲相等事象，以$A=B$表示之。

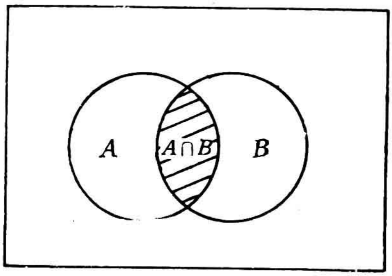
3. 交事象 (Intersection of Events)

設A與B兩事象之關係如圖 1.3，事象A與事象B有若干共同元素，即有若干元素同時具有性質A及性質B，則此等兼具性質A及B之元素的集合，稱爲A與B之交事象 (Intersecton of A and B)，以

$$A \cap B \quad (\text{或} A \cdot B)$$

表示之。A_1，A_2，……，A_k 等 k 個事象之共同部份則以

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots\cdots \cap A_k \text{ 或 } \bigcap_{i=1}^{k} A_i \text{ 表示之。}$$



※ 圖內原有若干個點，但通常均予省略，以下將仿此。

圖 1.3

擲兩粒骰子，如前述以其出現點數均不小於 3 爲事象A，兩粒骰子之點數和等於 7 爲事象B，則由圖 1.1 可察知 34 及 43 爲A與B之共有元素 (樣本點)，即$A \cap B$含有 34，43 兩個樣本點。

4. 和事象 (Union of Events)

設一事象至少具有事象A或事象B性質之一，如圖 1.4 中陰影部分，則該一事象稱爲A與B之和事象 (Union of A and B)。以

$A \cup B$表示之。

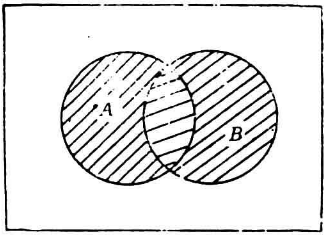


圖 1.4 (a)

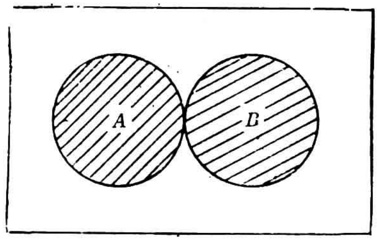


圖 1.4 (b)

A_1，A_2，……，A_k 等 k 個事象之和事象，則以

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_k \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{k} A_i \text{ 表示之。}$$

在連續擲一枚硬幣兩次之實驗中，設取出現二個正面爲事象 A，出現一個正面爲事象 B，則 $A \cup B$ 含有 HH，HT，TH 三個樣本點。

5. 全事象 (Universal Event)

一定出現之事象稱爲全事象，擲一粒骰子出現小於7點之事象爲全事象。換言之，全事象爲包含樣本空間中全部樣本點之事象，通常以 S 表示之。

6. 空事象 (Null Event)

空事象爲不含任何樣本點之事象。也是一定不會出現之事象。通常以 ϕ 表示之。

7. 互斥事象 (Mutually Exclusive Events)

不含共同樣本點之兩事象，稱爲互斥事象，圖 1.4(b) 內 A 與 B 即爲互斥事象 $A \cap B = \phi$。擲一粒骰子以出現紅點爲事象 A，出現黑點爲事象 B，則 A 與 B 爲互斥事象。

8. 餘事象 (Complementary Events)

設事象 A 爲樣本空間中一事象，則所有不含性質 A 之事象，稱爲餘事象，通常以 $\overline{A}$ 或 A' 表示之。如圖 1.5 之陰影部分。擲一粒骰

子，取紅點為事象A，則

$$A=\{1, 4\}, \overline{A}=\{2, 3, 5, 6\}, \quad A\cup\overline{A}=S$$

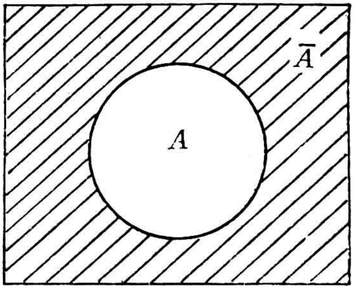


圖 1.5

依據此一概念，我們可用下圖，表示各種事象。

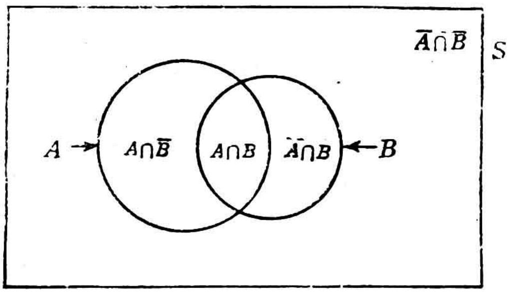


圖 1.6

上圖長方形代表樣本空間S，大圓代表事象A，小圓代表事象B。圖中共有四個交事象：

(1) $A\cap\overline{B}$ 表示A與非B之交事象。

(2) $A\cap B$ 表示A與B之交事象。

(3) $\overline{A}\cap B$ 表示非A與B之交事象。

(4) $\overline{A}\cap\overline{B}$ 表示非A與非B之交事象。

由是得：

(1) $A\cup B=(A\cap\overline{B})+(A\cap B)+(\overline{A}\cap B)$

$=[(A\cap\overline{B})+(A\cap B)]+[(\overline{A}\cap B)+(A\cap B)]$

$-(A\cap B)$

$=A+B-(A\cap B)$

若A與B為互斥事象，$A\cap B=0$，則$A\cup B=A+B$

(2) $\overline{A}\cap\overline{B}=S-[(A\cap\overline{B})+(A\cap B)+(\overline{A}\cap B)]$

$=S-(A\cup B)$

9. 獨立事象 (Independent Events)

設A事象之出現，不影響B事象出現的機會，B事象之出現，亦不影響A事象出現之機會，稱A與B為互相獨立之事象。

§1-3 事象之運算

事象為具有相同性質之樣本點的集合，其運算法則與普通代數相似，稱為事象代數或集合代數 (Algebra of Events or Algebra of Sets)。茲列舉其運算如次：

(1) 同一律 (Identity Laws)

$A\cup\phi=A$，　$A\cap S=A$，

$A\cup S=S$，　$A\cap\phi=\phi$。

(2) 不變律 (Idempotent Laws)

$A\cup A=A$，　$A\cap A=A$。

(3) 餘補律 (Complement Laws)

$A\cup\overline{A}=S$，　$A\cap\overline{A}=\phi$

$\overline{\overline{A}}=A$。

(4) 交換律 (Commutative Laws)

$A\cup B=B\cup A$，　$A\cap B=B\cap A$。