高等数学 上册

河北科技大学理学院数学系 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等数学

Gaodeng Shuxue

上　册

河北科技大学理学院数学系　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书是为了适应应用型人才培养的需要，根据非数学类理工科专业的教学要求和教学特点编写而成的。全书分为上、下册。上册内容包括函数、极限、连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程。每节后配有适量的习题，书后附有参考答案。

本书可以作为应用型本科高校非数学类理工科各专业本科生的“高等数学”课程教材，也可以作为独立学院、成教学院理工科各专业学生的数学基础课教材，同时为各类工程技术人员提供参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册／河北科技大学理学院数学系编．
－－北京：高等教育出版社，2012.6
ISBN 978-7-04-034851-4

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①河…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 081647 号

策划编辑　贾翠萍　　责任编辑　贾翠萍　　封面设计　王　睢　　版式设计　于　婕
插图绘制　郝　林　　责任校对　金　辉　　责任印刷　尤　静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京市昌平百善印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	14.75	版　　次	2012 年 6 月第 1 版
字　　数	260 千字	印　　次	2012 年 6 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	22.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物料号　34851-00

前　言

本书是根据最新的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，并汲取近年来我国关于应用型人才培养的高等数学教学改革的经验和成果编写而成。针对应用型本科高校的实际教学情况，本书适当降低了一些内容的理论深度，在文字表述上尽量做到通俗易懂、详尽畅通，更便于学生学习使用。本书力求突出以下特点：

1. 体现应用型人才培养的宗旨，在引入概念和计算上，注重实际背景、几何意义和理论知识的应用，以提高学生的学习兴趣和解决实际问题的能力。

2. 遵循少而精的原则，对基本内容做到写清楚、透彻、详细，对一些枝节问题避免冗长的叙述，以后继课程够用为度。

3. 在总体上把握高等数学的基本思想和基本方法，对抽象程度较高和理论性较强的内容，采用描述性和讲解其思想方法的形式加以处理，使得学生更易理解和掌握。

4. 选配的例题和习题紧密配合教学基本要求，加强基本知识和基本方法的训练。例题的数量较多，在解法上有较详细的论述，便于学生熟悉运算过程，掌握解题技巧，提高解题能力。习题的难易程度适当，书后配有参考答案。

5. 考虑到有部分学生参加全国硕士研究生入学统一考试，编写时参照了相关的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，本书能满足其基本要求。

本书分为上、下册，上册内容包括一元函数微积分学和常微分方程，下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学和级数。教学时数不少于180学时。

参加本书编写工作的有刘秀君（第一章至第五章），索秀云（第六章至第七章），李秀敏（第八章至第十一章）。仇计清教授审阅了全书内容，参加审阅的还有郭彦平教授和苏连青教授。纪玉德、王菊芳、李海萍、禹长龙、张金星、王琦、孙宗剑、董丽霞、左春艳、李占稳和杨英审查校对了全部习题和解答，并制作了课件。

编者衷心感谢高等教育出版社的大力支持，感谢河北科技大学数学系全体老师的辛勤工作，本书凝聚了他们的智慧和心血。

由于我们水平所限，书中难免有不当之处，敬请读者批评指正。

编者

2011.12.26

目　　录

第一章　函数　极限　连续

我们生活的这个五彩缤纷的物质世界，每时每刻都处于运动、变化和发展之中，数学一般用函数来刻画运动现象. 函数的概念产生于17世纪，它揭示了在一个研究对象中，各种变量之间的依赖关系. 高等数学研究的对象是函数，而极限是研究函数的基本工具，是微积分的理论基础，连续是函数的一个重要性态. 本章介绍函数与极限的概念，讨论函数的连续性及其性质.

第一节　函　　数

一、常量与变量

在观察自然现象或进行科学研究的过程中，我们会遇到许多用来表示不同事物的量，它们通常可分为两类：一类是在考察过程中始终保持不变，即始终取一个固定值的量，这种量称为常量；另一类是在考察过程中会发生变化，即可以取不同的值的量，这种量称为变量.

例如体育馆里跑道的长度、运动场的面积、旗杆的高度等在一段时间中保持不变，相对于这段时间而言是常量；而馆内的温度、湿度、风速、运动员和观众的人数则会随时间发生变化，因而相对于时间是变量. 值得注意的是，一个量是常量还是变量是相对的. 如重力加速度 g，从地球表面各点分布的值来看，它是变量；而在考察其在某一较小范围内的情况时，则可将它看作一个常量. 通常用 x,y,z,t 等表示变量，用 a,b,c 等表示常量.

二、集合与区间

1. 集合

我们将具有某种性质的研究对象的全体称为**集合**，记作 $A,B,\cdots$. 一个集合中的某个特定的研究对象称为该集合的**元素**，记为 $x,y,\cdots$. 对于某一个研究对象 α，要么是某个集合 M 的元素，记作 $\alpha\in M$；要么不是集合 M 的元素，记作 $\alpha\notin M$.

如果一个集合 A 中元素的个数是有限个，则称该集合为**有限集合**，可用列举法表示为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. 如果一个集合 B 由无穷多个元素组成，则称其

为**无限集合**,可表示为 $M=\{x|x$ 所具有的性质$\}$.

如设 A 为由方程 $x^3-2x=0$ 的根所组成的集合,则 $A=\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$. 设 M 为 xOy 坐标面上适合方程 $y=x^2+1$ 的点组成的集合,则 $M=\{(x,y)|y=x^2+1\}$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即当 $x\in A$ 时必有 $x\in B$,则称 A 是 B 的**子集**,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A). 如果 $A\subset B$,且 $B\subset A$,则称集合 A 与 B **相等**,记作 $A=B$. 例如,设 $A=\{-1,1\}$,$B=\{1,-1\}$,$C=\{-1,0,1,2\}$,$D=\{x|x^2-1=0\}$,则 $A=B=D$,$A\subset C$,$B\subset C$,$D\subset C$. 不含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$. 例如 $\varnothing=\{x|x^2+1=0,x$ 为实数$\}$.

常用的集合是实数集合. 全体自然数组成的集合记作 $\mathbf{N}$,全体整数组成的集合记作 $\mathbf{Z}$,全体有理数组成的集合记作 $\mathbf{Q}$,全体实数组成的集合记作 $\mathbf{R}$,且 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

2. 区间

区间是较为常用的一类数集,指的是由数轴上某一段连续的点组成的集合,根据端点的隶属关系分为以下几种:

设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$.

(1) 开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$;

(2) 闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$;

(3) 半开半闭区间 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$,$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$;

(4) 无穷区间 $(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}$,$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}$,$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}$,$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\}$,$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$.

以上(1),(2),(3) 表示的区间统称为**有限区间**,区间的长度均为 $b-a$,a 称为区间的左端点,b 称为区间的右端点.

3. 邻域

邻域是一种特殊的区间. 设 $a,\delta\in\mathbf{R}$,$\delta>0$,则

(1) 称 $U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$ 为**点 a 的 δ 邻域**,点 a 称为**邻域的中心**,δ 称为**邻域的半径**,几何上表示以点 a 为中心、δ 为半径的开区间(见图 1.1).

(2) 称 $\dot{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}=\{x|a-\delta<x<a,a<x<a+\delta\}$ 为点 a 的**去心 δ 邻域**(见图 1.2).

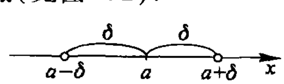

图 1.1

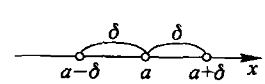

图 1.2

(3) 称$\{x|a-\delta<x<a\}$为点 a 的**左 δ 邻域**,$\{x|a<x<a+\delta\}$为点 a 的**右 δ 邻域**.

三、函数的概念

在对一个问题的考察过程中,常常有几个变量同时出现,这些变量之间相互联系,并且遵循一定的变化规律.相互联系的变量可以是两个,也可以是多个,我们先从两个变量入手讨论,为此看以下几个实例.

例 1 考察半径为 r 的球的体积 V,它们两者之间的关系为

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

当 r 在$(0,+\infty)$内任意取定一个数值时,由上述公式可以确定 V 的相应值.

例 2 心理学研究表明,小学生对新概念的接受能力 G(即对学习的兴趣、注意力、理解力的某种量度)随时间 t 的变化规律为

$$G(t)=-0.1t^2+2.6t+43,t\in[0,30],$$

此曲线称为接受能力曲线(图 1.3).通过对上述曲线的分析,可以了解儿童的接受能力 $G(t)$随着时间 t 的变化规律.

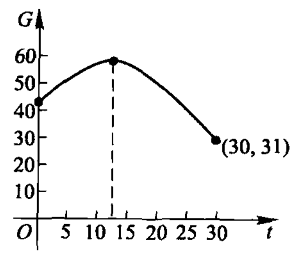

图 1.3

如果我们不考虑上述两个例子的实际背景,就会发现,它们都表达了两个变量之间的依赖关系,而这种依赖关系是通过一种对应法则给出的.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集.如果对于每个变量 $x\in D$,变量 y 按照一定的法则总有唯一确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$,数集 D 叫做这个函数的定义域,x 叫做自变量,y 叫做因变量.

对任意的 $x_0\in D$,对应的数值 $y_0=f(x_0)$叫做函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$处的函数值,此时,也说函数 $y=f(x)$在点 x_0处有定义,有时也记作 $y_0=f(x)|_{x=x_0}=y|_{x=x_0}$.如果函数 $y=f(x)$在某个区间上每一点都有定义,则称这个函数在该区间上有定义.函数值的集合 W 叫做该函数的**值域**.

注 1 函数的概念包括两个要素:定义域和对应法则.当两个函数的定义域和对应法则分别相同时,这两个函数就是同一个函数.

例如 $y=x$ 与 $y=|x|$不是同一个函数,$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 不是同一个函数.而 $s=t^2$与 $y=x^2$是同一个函数.一般地,$y=\varphi(x)(x\in D)$与 $s=\varphi(t)(t\in D)$是同一个函数,这叫做函数与符号表示的无关性.

注 2 定义域的求法:当 $y=f(x)$为一个纯数学式子时,约定其定义域是使表达式有意义的 x 的全体值,称为自然定义域;当 $y=f(x)$是由一个实际问题得

到时,其定义域由 x 的实际意义来确定.

注 3 函数的表示法:公式法(解析法)、图像法、表格法等.公式法(解析法)便于对函数 $y=f(x)$ 进行理论研究与数值计算,图像法便于直观了解函数的形态及整体性质,表格法则使得函数值一查即得,便于应用.本课程中函数的表示将以公式法(解析法)为主,并尽量辅以图像说明.

注 4 函数的几何意义:在平面直角坐标系下,称点的集合

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

为函数 $y=f(x)$ 的图形(图 1.4).

以下是几个函数的例子.

例 3 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

它的定义域是 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$,值域是 $W=[0,+\infty)$,其图形如图 1.5 所示.

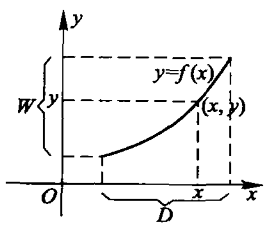

图 1.4

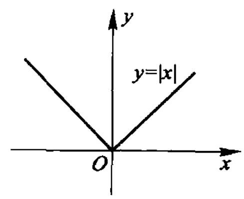

图 1.5

例 4 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

它的定义域是 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{-1,0,1\}$,其图形如图 1.6 所示.

例 5 取整函数 $y=[x]$,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,如 $[-\sqrt{2}]=-2$, $[\mathrm{e}]=2$,它的定义域为 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$,值域为 $\mathbf{Z}$,其图形如图 1.7 所示.

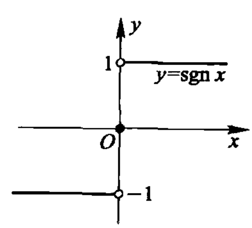

图 1.6

例 6 在统计学上,饮食消费占日常支出的比例称为恩格尔系数,它反映了一个国家或地区富裕的程度,是国际通用的一项重要经济指标.恩格尔系数小于 20% 为绝对富裕,20% 以上(含 20%)小于 40% 属于比

较富裕,40%以上(含40%)小于50%属于小康水平,50%以上(含50%)小于60%属于温饱,60%以上(含60%)则为贫困.一个国家国民富裕的程度如图1.8所示.

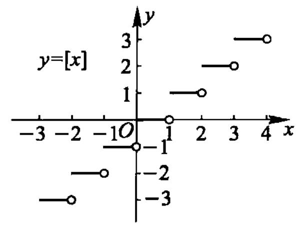

图1.7

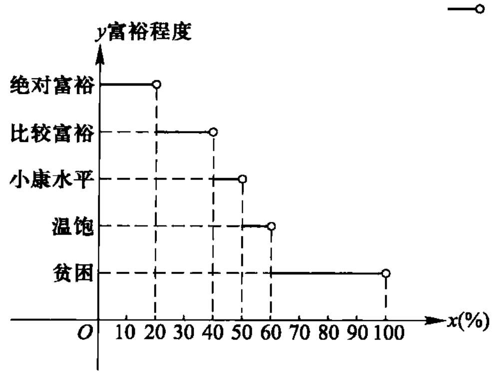

图1.8

例7　狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$$

它的定义域是$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$,值域是$W=\{0,1\}$.其图形是由分布在直线$y=0$及$y=1$上的无限多个点构成的,如图1.9所示,无法准确画出来.

以上几个函数与初等数学中常见的函数,如$y=x^2$,$y=\sin x$在表达方式上有所不同.$y=x^2$及$y=\sin x$都是由一个解析式给出x与y的对应规则,而上述几个函数则是针对x的不同取值范围,用不同的解析式表示x与y的对应规则,用这种方式定义的函数通常称为**分段函数**,在以后的讨论中会经常用到.

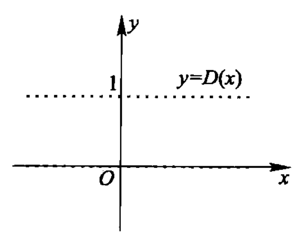

图1.9

四、函数的特性

函数的特性主要包括有界性、单调性、奇偶性和周期性,它们都具有明显的几何特征,是了解函数性态的重要内容.

1. 函数的有界性

定义 2 设函数$f(x)$的定义域为D,区间$I\subset D$.若存在正常数M,使得对任一$x\in I$,都有$|f(x)|\leqslant M$,则称$f(x)$在I上有界.

例如$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,因为对任何实数x,均有$|\sin x|\leqslant 1$,这里取$M=1$(也可以取任何大于1的数作为M).函数$y=\frac{1}{x}$在$(1,3)$内是有界的,例如可取$M=1$,从而使$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$对$(1,3)$内的一切$x$都成立.但$y=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内是无界的,这可以用反证法来说明.假设$y=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内有界,则存在正数$M$,使得对任何$x\in(0,1)$,均有$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$,但可以取$x_1=\frac{1}{M+1}\in(0,1)$,使得$\left|\frac{1}{x_1}\right|=M+1>M$,这与前面的结论相矛盾,故$y=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内无界.

函数的有界性有时用以下形式表述:如果存在常数M_1和$M_2(M_1<M_2)$,使得对任一$x\in I$,均有$M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$,则称$f(x)$在$I$上有界,并称$M_1$与$M_2$分别为$f(x)$在$I$上的一个下界和一个上界.这种有界性的表述与前面有界性的定义是等价的,请读者自行证明.

在几何上,有界函数$y=f(x)$表现为曲线$y=f(x)$始终落在由直线$y=-M$与$y=M$所构成的带形区域内,如图1.10所示.

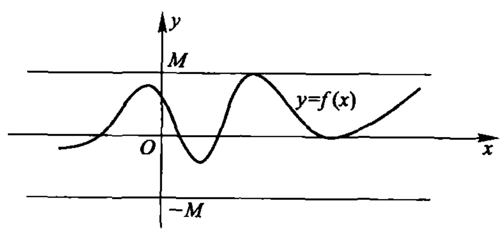

图 1.10

2. 函数的单调性

定义 3 设函数$f(x)$的定义域为D,区间$I\subset D$.如果对于I内任意两点x_1及x_2,当$x_1<x_2$时,恒有$f(x_1)<f(x_2)$,则称函数$f(x)$在I内是单调增加(递增)的;如果对于I内任意两点x_1及x_2,当$x_1<x_2$时,恒有$f(x_1)>f(x_2)$,则称函数$f(x)$在I内是单调减少(递减)的.

例如函数$y=x^2$在$(-\infty,0]$内是单调减少的,在$[0,+\infty)$内是单调增加的,在$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数.

在几何上,$f(x)$在区间I上单调递增表现为$y=f(x)$的图形沿着x轴的正方向逐渐上升,如图1.11(a)所示;$f(x)$在区间I上单调递减表现为$y=f(x)$的图形沿着x轴的正方向逐渐下降,如图1.11(b)所示.

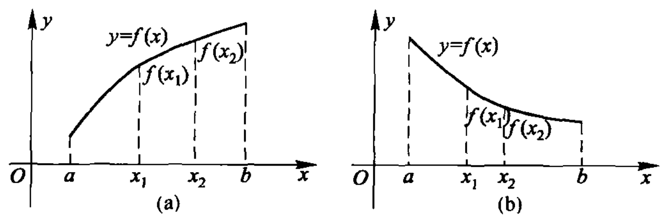

图1.11

3. 函数的奇偶性

定义4 设D为关于原点对称的区间(即若$x\in D$,则$-x\in D$),若对任意的$x\in I$,都有$f(-x)=f(x)$,则称$f(x)$为偶函数;若$f(-x)=-f(x)$,则称$f(x)$为奇函数.

例如$y=x^2$,$y=\cos x$等函数是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数,$y=x^3$,$y=\sin x$,$y=\operatorname{sgn} x$等函数是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数.

在几何上,奇函数$f(x)$的图形表现为关于原点对称,偶函数$f(x)$的图形表现为关于y轴对称,如图1.12所示.

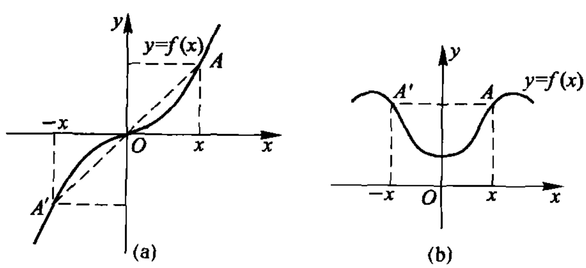

图1.12

4. 函数的周期性

定义5 设函数$f(x)$的定义域为D.如果存在数$T\neq 0$,使得对于任何$x\in D$均有$x\pm T\in D$,且$f(x+T)=f(x)$,则称$f(x)$为周期函数,并称T为$f(x)$的一个周期.

通常情况下,我们所说的周期函数的周期是指其最小正周期.

例如$y=\sin x$,$y=\cos x$是以$T=2\pi$为周期的周期函数,$y=\tan x$,$y=\cot x$是

以 $T=\pi$ 为周期的周期函数.

在几何上,以 T 为周期的函数 $y=f(x)$ 的图形表现为每一个周期长度上的图形的形状都是一样的,如图 1.13 所示.

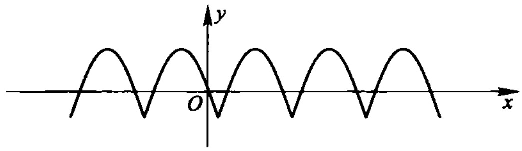

图 1.13

五、反函数

函数 $y=f(x)(x\in D,y\in W)$ 反映了变量 y 与 x 之间的对应关系,当自变量 x 在 D 内任意取定一个值后,因变量 y 的值也随之被唯一地确定下来. 但是变量 x 与 y 的这种因果关系并不是绝对的. 例如,圆的面积 S 与圆的半径 r 之间,若已知 r 的值,则 S 由 $S=\pi r^2(r>0)$ 确定,这里 r 是自变量,S 是因变量;若已知 S 的值,则 r 由 $r=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}(S>0)$ 确定,这里 S 是自变量,r 是因变量. 我们称函数 $r=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$ 为函数 $S=\pi r^2$ 的反函数.

定义 6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是数集 D,值域是数集 W. 若对每一个 $y\in W$,都有唯一的 $x\in D$ 满足 $f(x)=y$,则称 x 为 y 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$. 这个函数的定义域为 W,值域为 D. 相应于反函数 $x=f^{-1}(y)$,称 $y=f(x)$ 为直接函数.

习惯上,我们用 x 表示自变量,y 表示因变量,所以常将 $x=f^{-1}(y)(y\in W,x\in D)$ 表示为 $y=f^{-1}(x)(x\in W,y\in D)$. 如函数 $y=\sqrt{x+1}(x\geqslant -1)$ 的反函数是 $x=y^2-1(y\geqslant 0)$,也可以改写为 $y=x^2-1(x\geqslant 0)$.

在同一个坐标系下,$x=f^{-1}(y)(y\in W,x\in D)$ 与 $y=f(x)(x\in D,y\in W)$ 表示同一条曲线,而 $y=f^{-1}(x)(x\in W,y\in D)$ 与 $y=f(x)(x\in D,y\in W)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称,如图 1.14 所示.

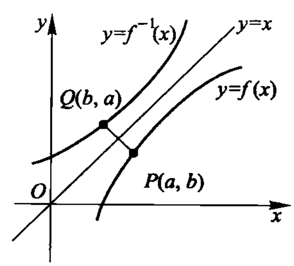

图 1.14

例 8 求下列各函数的反函数：

(1) $y=e^x-1$； (2) $y=\begin{cases}x, & x<1,\\ 2^x, & x\geqslant 1.\end{cases}$

解 (1) 由 $y=e^x-1$ 解出 x，得 $x=\ln(1+y)$，$y\in(-1,+\infty)$. 将 x 与 y 互换位置，得反函数 $y=\ln(1+x)$，$x\in(-1,+\infty)$.

(2) 因为当 $x<1$ 时，$y=x$，所以 $x=y$，$y<1$；因为当 $x\geqslant 1$ 时，$y=2^x$，所以 $x=\log_2 y$，$y\geqslant 2$. 将 x 与 y 互换位置，得反函数

$$y=\begin{cases}x, & x<1,\\ \log_2 x, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

关于反函数的存在性，可以证明下述结论：

定理 *设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域是 W. 若 $y=f(x)$ 在 D 上严格单调递增（或严格单调递减），则在 W 上 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 一定存在，并且 $y=f^{-1}(x)$ 在 W 上也是严格单调递增（或严格单调递减）的.*

证明从略.

六、初等函数

高等数学研究的主要对象是初等函数，而初等函数是由基本初等函数构成的.

1. 基本初等函数

以下五类函数称为基本初等函数：

幂函数 $y=x^\mu$ （μ 为常数）；

指数函数 $y=a^x$ （$a>0$，$a\neq 1$，a 为常数）；

对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0$，$a\neq 1$，a 为常数）；

三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

以上函数的性质及图形已在中学进行过系统的讨论，以后将经常使用.

2. 复合函数

考虑两个函数 $y=\sin u\,(u\in\mathbf{R})$，$u=x^2+1\,(x\in\mathbf{R})$. 若将 $u=x^2+1$ 代入 $y=\sin u$ 中，则得函数 $y=\sin(x^2+1)\,(x\in\mathbf{R})$.

一般地，设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_u，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_x，值域为 W，并且 $W\subset D_u$. 如果对于任意一个值 $x\in D_x$，有唯一确定的值 $u\in D_u$ 与 x 相对应，随之有唯一确定的值 y 与值 u 对应，这样，对于每个值 $x\in D_x$，通过 u 有唯一确定的值 y 与 x 对应，从而得到一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，称这个函数为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)],$$

其中 u 称为中间变量. 将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$ 的运算称为复合运算.

需要注意的是,并非任何两个函数都能复合为一个复合函数,如 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 就不能复合成一个复合函数,因为后者的值域不在前者的定义域内.

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合而构成. 例如由 $y=u^2$, $u=\sin v, v=\sqrt{x}$ 复合而成的复合函数为 $y=\sin^2\sqrt{x}$,其中的 u, v 均称为中间变量.

例 9 将下列各函数拆为几个基本初等函数:

(1) $y=e^{x^2}$; (2) $y=\cos\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)$; (3) $y=\sqrt{\tan\sqrt{x}}$.

解 (1) $y=e^u, u=x^2$.

(2) $y=\cos u, u=\ln v, v=\dfrac{1}{x}$.

(3) $y=\sqrt{u}, u=\tan v, v=\sqrt{x}$.

例 10 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,求 $f(1-x)$ 与 $f[f(x)]$ 的表达式.

解 $$f(1-x)=\frac{1-x}{(1-x)-1}=\frac{1-x}{-x}=\frac{x-1}{x}.$$

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=x.$$

例 11 设 $f(\sin t)=1+\cos 2t$,求 $f(x)(|x|\leqslant 1)$.

解 因为 $f(\sin t)=1+\cos 2t=2(1-\sin^2 t)$,令 $x=\sin t$,则 $|x|\leqslant 1$,于是 $f(x)=2(1-x^2)$.

例 12 设 $f(x+1)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $f(x)$.

解 令 $u=x+1$,则 $x=u-1$,于是

$$f(u)=\begin{cases}(u-1)^2, & 0\leqslant u-1\leqslant 1,\\ 2(u-1), & 1<u-1\leqslant 2,\end{cases}$$

即

$$f(u)=\begin{cases}(u-1)^2, & 1\leqslant u\leqslant 2,\\ 2(u-1), & 2<u\leqslant 3,\end{cases}$$

故

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

3. 初等函数

由常数与基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成，并且能用一个式子表示的函数称为**初等函数**，否则称为非初等函数.

例如 $y=x^2e^{\sin x}+\sqrt{x^2-1}$，$y=\dfrac{x^2+\sin x-1}{2\sqrt{x}\ln(x-2)}$，$y=|x|=\sqrt{x^2}$均为初等函数.

以下初等函数称为双曲函数：

(1) 双曲正弦函数 $y=\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\ (-\infty<x<+\infty)$；

(2) 双曲余弦函数 $y=\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\ (-\infty<x<+\infty)$；

(3) 双曲正切函数 $y=\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\ (-\infty<x<+\infty)$.

在严格单调的区间上，双曲函数的反函数存在，并且可以用对数函数表示如下：

(1) 反双曲正弦函数 $y=\operatorname{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\ (-\infty<x<+\infty)$；

(2) 反双曲余弦函数 $y=\operatorname{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})\ (1\leqslant x<+\infty)$；

(3) 反双曲正切函数 $y=\operatorname{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\ (-1<x<1)$.

双曲函数有类似于三角函数的一些恒等式：

$$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y,\quad \operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x,\quad \operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x,\quad \operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1.$$

高等数学中研究的函数大多数是初等函数，分段函数在一般情况下不是初等函数，但 $y=|x|$是初等函数.

习 题 1－1

1. 求下列各函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$； (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}+\ln\sin x$；

(3) $y=\lg(5-x)+\arcsin\dfrac{x-1}{6}$；

(4) $y=f(x-1)+f(x+1)$，已知$f(u)$的定义域为$(0,3)$.

2. 设$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求$f(x+1)$的表达式.

3. 已知 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，求$f(x)$的表达式.

4. 下列各对函数是否是同一个函数？