

Number Array and Applications



数学·统计学系列

数阵及其应用

杨世明 王雪芹 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

Number Array and Applications 数阵及其应用

杨世明 王雪芹 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

“数阵”是数列的高维推广,数表的正名和对多元函数值域的排布.本书除比较完整地奠定数阵的基本概念和基本理论之外,还从等差、等比、几何数阵出发,赏析了递归数阵,自然数阵(如平方筛选数阵),类杨辉数阵,小非元数阵,等等,它们个个构造奇巧优雅,令人赏心悦目;本书还介绍了数阵在转化数论难题、剖析“余新河猜想”、揭示集合论中“对角线法则”之奥妙等方面的重要应用.从而展示给读者一个别样的数学世界.

本书适于高中、大学师生和数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

数阵及其应用/杨世明,王雪芹著. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2012.2
ISBN 978-7-5603-3480-6

I. ①数… II. ①杨… ②王… III. ①矩阵 IV.
①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 012701 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 王勇钢 李 慧
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 15 字数 300 千字
版 次 2012 年 2 月第 1 版 2012 年 2 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3480-6
定 价 28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

序

言

本书的作者是一位年近八旬的老者，一生痴迷于初等数学研究。这样的人生选择，不禁让人想起美国诗人弗罗斯特的那首著名的诗歌《未选择的路》，在诗中，弗罗斯特这样写道：

黄色的树林里分出两条路，
可惜我不能同时去涉足，
我在那路口久久伫立，
我向着一路极目望去，
直到它消失在丛林深处。
但我却选了另外一条路，
它荒草萋萋，十分幽寂，
显得更诱人，更美丽；
虽然在这条小路上，
很少留下旅人的足迹。
那天清晨落叶满地，
两条路都未经脚印污染。
啊，留下一条路等改日再见！
但我知道路径延绵无尽头，
恐怕我难以再回返。
也许多少年后在某个地方，

我将轻声叹息将往事回顾：
一片树林里分出两条路——
而我选择了人迹更少的一条，
从此决定了我一生的道路。

是的人生只有一次，究竟应该怎样渡过这看似漫长实则短暂的一生，本质上是一个选择的问题。是选择钟鸣鼎食，飞黄腾达，还是选择青灯黄卷，潜心学术，这是一种人生智慧。智德在评介叶辉《香港文学评论精选——新诗地图私绘本》时曾这样说：“香港新诗不论在任何时代，都拥有最多最无名的诗人，或者说在香港写诗，就几乎自动成为无名诗人。”

在内地搞初等数学研究的人命运与香港诗人一样，只要一动笔便自动成为无名作者被除自己外的所有人遗忘。初等数学研究会号称有2万多名会员，但在全国名气很小，杨老先生作为前会长也少被圈外人知晓。用经济学的角度看这里头有一个机会成本问题，如果你选择了初等数学研究就注定与升官发财、出人头地无缘了，所以这一行中大多是“淡定叔”与“淡定哥”。人生的定位其实与企业定位一样，十分困难却十分重要。而且选择的是否正确要多年之后才见分晓，不过那时一切已成定局。以大家都感兴趣的企业为例，定位问题也是一个企业的关键问题。最早由美国人杰克·特劳特（Jack Trout）在40多年前提出，定位准确这是一个成功企业的必要条件，有之未必行，无之必不行。一个案例是在2008年金融风暴中险些破产的美国国际集团（AIG）就是没有听从特劳特的建议将自己定位成“美国劳合社”（劳合社（Lloyd's）是英国最大的保险组织，也是世界最大的保险交易市场），而是试图为所有客户提供所有产品——这是定位理论的大忌，从此埋下祸根。

除了目标笃定，内心淡定之外，杨老的另一个品质是“认真”。

中国第一个拿到哈佛大学经济学博士的张培刚先生曾写过一副对联，展示了自己微妙的处世哲学“认真，但不能太认真，应适时而止；看透，岂可以全看透，要有所作为”。但对杨老来说，优点是认真，“缺点”是太认真，本书中的很多成果已经研究出来很多年了，但却是第一次整理出版。大有“十年磨一剑”之势，这其中既反映出目前出版的不畅，同时也体现了杨老一丝不苟、认真细致的治学态度。并且我们可以从中发现身处其中的杨老的幸福感。

德国古典哲学家费尔巴哈说：“一切健全的追求都是对于幸福的追求。”

当今社会物质丰富，精神匮乏，在一心追逐财富的道路上全力飞奔的人们终于在精疲力尽之后猛然发现美感的丢失和幸福感的下降。灯红酒绿，纸醉金迷之中人们恍惚还记得曾经有过的恬淡之美、研究之美、专注之美、抽象之美，一个健全的社会，一个洋溢着幸福的社会，一定是一个充满着多样性的社会。

马尔库塞在《单向度的人》中说,发达工业社会成功地压制了人们内心的否定性、批判性、超越性的向度,使社会成为单向度的社会,而生活于其中的人成了单向度的人,这种人丧失了自由和创造力,不再想象或追求与现实生活不同的另一种生活.

杨老既是一位高尚的、纯粹的、脱离了低级趣味的人同时又是充满了人生乐趣,找到了一生挚爱的人.

杨老的这部作品可概括为“数中之型,型中之数”,北京大学江泽涵教授有一句学习数学的箴言,叫不能“得意忘形”,此处的“意”是指数式推导,“形”则是指几何形象,用于评价本书再恰当不过,这本书套用一句官话叫“既有深远的历史意义又有眼前的现实意义”.先说现实意义.一方面教育界对试题创新有着不可遏制的热情,另一方面各地高考自主命题,各名牌大学招生联盟的自主招生命题对创新型试题有海量需求.这本充满原创的著作自然会成为源泉之一.再谈历史意义:

2006年,前美联储理事,哥伦比亚大学教授米什金收了冰岛商务部17万美元,替其撰写了一篇《论冰岛金融的稳定性》,然而不出几年,冰岛政府宣布破产.于是,他便在自己简历里将这一著作改成了《论冰岛金融的不稳定性》.

一切社会科学包括貌似严谨的经济学、金融学都逃脱不了朝秦暮楚式的变来变去,这个时候以超稳定著称的数学便可流芳千古了,但这部书绝不会成为畅销书.

旅居美国60年的文学评论家董鼎山曾发现了一个有趣的现象:连畅销书也不一定有读者,他举例芝加哥大学的哲学教授亚伦·布鲁姆1987年写的《美国思想的封锁》,布鲁姆凭借此书扬名世界,但此书虽畅销国际,但真正读完者却不多.

董鼎山把这种现象归于知识分子读者群(有异于一般读者)对自我形象的抬举.他们购了书在书架上炫耀,却没有时间或耐心通读一本深奥的名著.

这部书也绝不是迎合读者的“媚俗之作”.

台湾著名舞台剧导演赖声川认为,如何准确猜测市场其实是最大的陷阱,创作者内心的那个东西反而是最重要的,“你来看我的戏,并没事先说你要看什么,而是我给你看什么,两者的关系是反过来的.”

这部书就像一座初等数学研究的山峰,不论你读与不读,它都在那里!

刘培杰

2012年1月5日冰雪节

于哈工大



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007-09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007-09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007-09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007-09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010-06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008-01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010-07	38.00	75
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010-01	18.00	61

数学眼光透视	2008-01	38.00	24
数学思想领悟	2008-01	38.00	25
数学应用展观	2008-01	38.00	26
数学建模导引	2008-01	28.00	23
数学方法溯源	2008-01	38.00	27
数学史话览胜	2008-01	28.00	28

从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007-10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008-01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008-05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	2011-08	138.00	136
从比勃巴赫到德·布朗斯	即将出版		

数学解题中的物理方法	2011-06	28.00	114
数学解题的特殊方法	2011-06	48.00	115
中学数学计算技巧	2012-01	48.00	116
中学数学证明方法	2012-01	58.00	117
数学趣题巧解	2012-03	28.00	128

数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006-05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008-01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008-07	58.00	36
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010-01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011-08	58.00	87



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
发展空间想象力	2010-01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010-02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006-12	18.00	10
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010-07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010-06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011-01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011-03	38.00	113
世界著名数论经典著作钩沉(算术卷)	2012-01	28.00	125
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011-02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷I)	2010-06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷II)	2011-01	28.00	78
世界著名初等数论经典著作钩沉(理论和实用算术卷)	2011-07	38.00	126
几何学教程(平面几何卷)	2011-03	68.00	90
几何学教程(立体几何卷)	2011-07	68.00	130
几何变换与几何证题	2010-06	88.00	70
几何瑰宝——平面几何500名题暨1000条定理(上、下)	2010-07	138.00	76,77
三角形的五心	2009-06	28.00	51
俄罗斯平面几何问题集	2009-08	88.00	55
俄罗斯平面几何5000题	2011-03	58.00	89
计算方法与几何证题	2011-06	28.00	129
463个俄罗斯几何老问题	2012-01	28.00	152
近代欧氏几何学	2012-2	38.00	162



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
超越吉米多维奇——数列的极限	2009—11	48.00	58
初等数论难题集(第一卷)	2009—05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011—02	128.00	82,83
谈谈素数	2011—03	18.00	91
平方和	2011—03	18.00	92
数论概貌	2011—03	18.00	93
代数数论	2011—03	48.00	94
初等数论的知识与问题	2011—02	28.00	95
超越数论基础	2011—03	28.00	96
数论初等教程	2011—03	28.00	97
数论基础	2011—03	18.00	98
数论入门	2011—03	38.00	99
解析数论引论	2011—03	48.00	100
基础数论	2011—03	28.00	101
超越数	2011—03	18.00	109
三角和方法	2011—03	18.00	112
谈谈不定方程	2011—05	28.00	119
整数论	2011—05	38.00	120
初等数论 100 例	2011—05	18.00	122
最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题(上、下)	2012—01	138.00	144,145
算术探索	2011—12	158.00	148
初等数论(Ⅰ)	2012—01	18.00	156
初等数论(Ⅱ)	2012—01	18.00	157
初等数论(Ⅲ)	2012—01	28.00	158
组合数学浅谈	2012—02	18.00	159
同余理论	2012—02	38.00	163



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006—05	58.00	5
历届 CMO 试题集	2008—09	28.00	40
历届国际大学生数学竞赛试题集(1994—2010)	2012—01	28.00	143
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007—03	28.00	15
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009—03	88.00	43
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(上)	2012—03	28.00	169
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(下)	2012—03	38.00	170
整函数	2012—1		161
俄罗斯函数问题集	2011—03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011—01	48.00	79
博弈论精粹	2008—03	58.00	30
多项式和无理数	2008—01	68.00	22
模糊数据统计学	2008—03	48.00	31
受控理论与解析不等式	2012—03		165
解析不等式新论	2009—06	68.00	48
反问题的计算方法及应用	2011—11	28.00	147
建立不等式的方法	2011—03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009—08	68.00	56
不等式研究(第二辑)	2012—02	68.00	153
初等数学研究(I)	2008—09	68.00	37
初等数学研究(II)(上、下)	2009—05	118.00	46,47
中国初等数学研究 2009 卷(第 1 辑)	2009—05	20.00	45
中国初等数学研究 2010 卷(第 2 辑)	2010—05	30.00	68
中国初等数学研究 2011 卷(第 3 辑)	2011—07	60.00	127
数阵及其应用	2012—02	28.00	164
不等式的秘密(第一卷)	2012—02	28.00	154
初等不等式的证明方法	2010—06	38.00	123
数学奥林匹克不等式散论	2010—06	38.00	124
数学奥林匹克不等式欣赏	2011—09	38.00	138
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010—01	58.00	66
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(上、下)	2011—08	158.00	134,135



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
500 个最新世界著名数学智力趣题	2008-06	48.00	3
400 个最新世界著名数学最值问题	2008-09	48.00	36
500 个世界著名数学征解问题	2009-06	48.00	52
400 个中国最佳初等数学征解老问题	2010-01	48.00	60
500 个俄罗斯数学经典老题	2011-01	28.00	81
数学 我爱你	2008-01	28.00	20
精神的圣徒 别样的人生——60 位中国数学家成长的历程	2008-09	48.00	39
数学史概论	2009-06	78.00	50
斐波那契数列	2010-02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010-07	38.00	72
斐波那契数列欣赏	2011-01	28.00	160
数学的创造	2011-02	48.00	85
数学中的美	2011-02	38.00	84
最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009-02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009-08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007-04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009-08	28.00	54
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010-01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010-01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011-03	68.00	118
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010-01	28.00	86
数学解题——靠数学思想给力(上)	2011-07	38.00	131
数学解题——靠数学思想给力(中)	2011-07	48.00	132
数学解题——靠数学思想给力(下)	2011-07	38.00	133
2011 年全国及各省市高考数学试题审题要津与解法研究	2011-10	48.00	139
新课标高考数学——五年试题分章详解(2007~2011)(上、下)	2011-10	78.00	140, 141
30 分钟拿下高考数学选择题、填空题	2012-01	48.00	146
高考数学压轴题解题诀窍(上)	2012-02	78.00	166
高考数学压轴题解题诀窍(下)	2012-03	28.00	167
300 个日本高考数学题	2012-03		142



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00	13
统计学专业英语	2007-03	28.00	16

方程式论	2011-03	38.00	105
初级方程式论	2011-03	28.00	106
Galois 理论	2011-03	18.00	107
代数方程的根式解及伽罗瓦理论	2011-03	28.00	108
线性偏微分方程讲义	2011-03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011-03	28.00	111
代数方程式论	2011-05	28.00	121
动力系统的不变量与函数方程	2011-07	48.00	137
基于短语评价的翻译知识获取	2012-02	48.00	168

闵嗣鹤文集	2011-03	98.00	102
吴从玢数学活动三十年(1951~1980)	2010-07	99.00	32

吴振奎高等数学解题真经(概率统计卷)	2012-01	38.00	149
吴振奎高等数学解题真经(微积分卷)	2012-01	68.00	150
吴振奎高等数学解题真经(线性代数卷)	2012-01	58.00	151
钱昌本教你快乐学数学(上)	2011-12	48.00	155

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

网 址:<http://lpj.hit.edu.cn/>

邮 编:150006

联系电话:0451-86281378 13904613167

E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn

第1章 什么是数阵	(1)
1.1 背景问题	(1)
1.1.1 来自“挂历”的问题	(1)
1.1.2 扩大乘法表	(2)
1.1.3 杨辉三角	(3)
1.2 数阵的基本概念	(5)
1.2.1 平面数阵	(5)
1.2.2 n 维数阵	(6)
1.3 数阵运算与数阵群	(7)
1.3.1 数阵间的相等关系	(7)
1.3.2 数阵运算	(8)
1.3.3 数阵群	(8)
习题、问题与课题	(9)
部分问题的分析、解答	(9)
第2章 等差与等比数阵	(13)
2.1 等差数阵的基本性质	(13)
2.1.1 面积分布问题	(13)
2.1.2 等差数阵的基本性质	(15)

2.2	等差数阵的进一步性质	(18)
2.3	等比数阵	(22)
2.3.1	定义和性质	(22)
2.3.2	无穷递缩数阵	(23)
2.4	等差 - 等比数阵	(26)
2.4.1	一阶等差 - 等比数阵	(26)
2.4.2	高阶等差 - 等比数阵	(27)
2.4.3	高价差等比数阵	(30)
	习题、问题与课题	(33)
	部分问题的分析、解答	(33)
第3章	(m,n)阶等差数阵	(35)
3.1	$(1,2)$ 阶等差数阵	(35)
3.1.1	多边形数	(35)
3.1.2	$(1,2)$ 阶等差数阵	(36)
3.1.3	通项公式	(37)
3.1.4	判定问题	(38)
3.1.5	高阶等差子数列	(39)
3.2	预备知识	(39)
3.2.1	数列的差分	(40)
3.2.2	高阶等差数列	(41)
3.2.3	二元多项式的偏差分	(42)
3.3	(m,n) 阶等差数阵	(42)
3.3.1	定义及基本性质	(42)
3.3.2	通项公式与判定定理	(43)
3.3.3	对角线数列	(44)
3.4	数阵的划分	(45)
3.4.1	数列的划分	(45)
3.4.2	高阶等差数阵的划分	(46)
	习题、问题与课题	(49)
	部分问题的分析、解答	(49)
第4章	几何数阵	(52)
4.1	面积分布数阵	(52)
4.2	多边形数阵	(53)
4.2.1	棱锥数阵	(53)
4.3	空间分割问题	(54)

4.4	立方体元素计数问题	(56)
4.5	单纯形元素计数问题	(58)
4.6	平面格图中的计数问题	(59)
4.7	三维格图中的计数问题	(60)
4.8	n 维格图中的计数问题	(60)
	习题、问题与课题	(61)
	部分问题的分析、解答	(62)
第5章	数论数阵	(64)
5.1	素筛数阵	(64)
5.1.1	一个命题	(64)
5.1.2	研究哥德巴赫猜想的一种思路	(66)
5.2	余新河数学题	(67)
5.2.1	余题概观	(67)
5.2.2	问题变换	(68)
5.2.3	公式赏析	(70)
5.3	余新河数学题(续)	(72)
5.3.1	问题探幽	(72)
5.3.2	百万港元巨奖欲领不能	(73)
5.4	方螺旋数阵	(76)
5.4.1	方螺旋阵	(76)
5.4.2	性质	(76)
5.4.3	简单应用	(78)
5.5	自然数阵	(80)
5.5.1	斜-直自然数阵	(80)
5.5.2	半方螺旋数阵	(83)
5.6	平方筛选数阵	(84)
5.6.1	背景问题	(84)
5.6.2	平方(位)筛选数阵	(85)
5.6.3	数阵 A 的通项公式	(86)
5.6.4	数阵 A 性质的证明	(89)
5.6.5	说明与反思	(90)
	习题、问题与课题	(92)
	部分问题的分析、解答	(92)
第6章	平面递归数阵	(95)
6.1	两个实例	(95)

6.1.1	杨辉阵	(95)
6.1.2	空间分割数阵	(96)
6.2	斐波那契数阵	(96)
6.2.1	一个跳格问题	(96)
6.2.2	母函数	(97)
6.2.3	通项公式	(100)
6.2.4	几条推论	(102)
6.3	二元线性递归数阵	(103)
6.4	周期数阵	(105)
6.4.1	关于周期数阵的定义	(105)
6.4.2	正规周期数阵	(107)
6.4.3	通项公式	(108)
6.4.4	一个有趣的周期数阵	(110)
	习题、问题与课题	(111)
	部分问题的分析、解答	(112)
第7章	类杨辉数阵	(114)
7.1	类杨辉等比数阵	(115)
7.1.1	一道高考题	(115)
7.1.2	类杨辉数阵	(116)
7.2	奇边类杨辉数阵	(118)
7.2.1	从一道奥林匹克训练题谈起	(118)
7.2.2	奇边类杨辉数阵	(118)
7.2.3	奇边类杨辉数阵的通项公式	(120)
7.3	类杨辉数阵	(121)
7.3.1	斜通项公式的推导	(121)
7.3.2	直通项公式	(124)
7.3.3	几点应用	(124)
7.3.4	待研究的课题	(127)
7.4	数阵的一种迭代	(127)
7.4.1	问题	(128)
7.4.2	归纳研究	(128)
7.4.3	定理的证明	(129)
7.4.4	$X_0^{(n)}$ 的几条性质	(131)
	习题、问题与课题	(131)
	部分问题的分析、解答	(131)

第8章 小非元——一个博弈数阵	(134)
8.1 从抽象出发	(134)
8.1.1 最小非元素问题	(134)
8.1.2 小非元阵的结构	(136)
8.1.3 小非元阵的其他性质	(137)
8.2 小非元阵的通项公式	(137)
8.2.1 观察、猜想、实验	(138)
8.2.2 通项公式	(139)
8.2.3 应用举例	(140)
8.3 Me 的尼姆博弈性质	(141)
8.3.1 何为尼姆博弈	(141)
8.3.2 战胜策略	(142)
8.3.3 几种变形和推广	(144)
8.3.4 Me 的尼姆性质	(145)
8.4 数学模型	(146)
8.4.1 四种模型	(146)
8.4.2 Me 尼姆性质的证明	(146)
8.4.3 Me 的使用方法	(148)
8.4.4 一点想法	(148)
习题、问题与课题	(148)
部分问题的分析、解答	(149)
第9章 数阵对角线的功能	(151)
9.1 从奇数的多少谈起	(151)
9.1.1 关于奇数与自然数孰多孰少的争论	(151)
9.1.2 等势的性质	(152)
9.1.3 对“无穷集合”的认识	(152)
9.2 可数集——与自然数集等势的集合	(153)
9.2.1 “个数”概念的扩充	(153)
9.2.2 可数集	(154)
9.2.3 可数势 a 的几条性质	(157)
9.3 连续统势	(157)
9.3.1 a 是最小的超限数	(157)
9.3.2 连续统势 c 的几条性质	(159)
9.3.3 连续集	(159)
9.4 越来越稠密的集合	(160)