高职高专经管类专业基础课教材系列

GAOZHI GAOZHUAN JINGGUANLEI ZHUANYE JICHUKE JIAOCAI XILIE

JINGJI SHUXUE JICHU

经济数学基础

◎主编：林 娟

厦门大学出版社

JINGJI SHUXUE JICHU

高职高专经管类专业基础课教材系列

经济数学基础

◎主　编：林　娟
编写者：林　娟　陈艳平
陈逢明　陈　希

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础/林娟主编.—厦门:厦门大学出版社,2007.6
(高职高专经管类专业基础课教材系列)
ISBN 978-7-5615-2757-3

Ⅰ.经… Ⅱ.林… Ⅲ.经济数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 087254 号

内容提要

本书是针对高职高专院校经济管理类各专业学生编写的.根据微积分、线性代数、概率统计的基本知识逻辑,在叙述上力求简明、通俗,又不失科学性.本书的习题分成 A 层(加强基础)、B 层(充实提高)、C 层(拓展能力)三层,呈递进关系,读者通过 A 层→B 层→C 层练习,能提高对所学知识点的理解和掌握.

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门大学　邮编:361005)
http://www.xmupress.com
xmup @ public.xm.fj.cn
厦门昕嘉莹印刷有限公司印刷
(地址:厦门市前埔东路 555 号　邮编:361009)
2007 年 6 月第 1 版　2007 年 6 月第 1 次印刷
开本:787×960　1/16　印张:22
字数:400 千字　印数:1～3 000 册
定价:28.00 元

前 言

本书是针对高职高专院校经济管理类各专业学生编写的.本着基础教学为专业服务及注重应用、培养能力的原则，根据微积分、线性代数、概率统计的基本知识逻辑，以知识介绍为重点，详略得当；叙述上力求简明、通俗，又不失科学性.同时，充分考虑高职高专学生的数学素质的差异，将习题分成A层(加强基础)、B层(充实提高)、C层(拓展能力)三层.在与本教材配套的《〈经济数学基础〉学习指导》中，将知识点融入解法中，在夯实基础的同时，给读者提供了拓展能力和挑战自我的空间，为他们留下继续深造与思考的余地.

全书共十二章，第一章"函数的极限与连续"、第二章"导数与微分"、第三章"导数的应用"、第四章"不定积分"、第五章"定积分"、第六章"多元微分初步"、第七章"行列式"、第八章"矩阵"、第九章"线性方程组"、第十章"随机事件及其概率"、第十一章"随机变量的分布及其数字特征"、第十二章"数理统计初步".其中，第一章、第二章、第三章、第五章、第七章、第八章、第九章由林娟(福建商业高等专科学校)编写，第十章至第十二章由陈艳平(福建商业高等专科学校)编写，第四章由陈希(福建商业高等专科学校)编写，第六章由陈逢明(福建商业高等专科学校)编写.由林娟任主编，负责全书的统稿工作.

本书在编写过程中，参阅了许多相关的参考书，谨向这些书的作者表示衷心感谢.同时，在编写过程中得到了福建商业高等专科学校领导和厦门大学出版社的鼎力支持，在此深表感谢.

由于编者水平和学识有限，书中疏漏和错误之处在所难免，恳请同行和广大读者批评指正.欢迎通过邮件与作者联系，电子邮件地址为：ljfjsygdzkxx@yahoo.com.cn.

编者

2007年4月

目　　录

第一章 函数的极限与连续

学习目的：

▲ 理解一元函数的概念及其表示法；理解分段函数、反函数、隐函数的概念；理解复合函数的概念，熟练掌握复合函数的复合过程；熟练掌握基本初等函数及其图形，理解初等函数的概念；掌握建立简单实际问题中的函数关系.

▲ 理解数列极限与函数极限的概念；理解函数左、右极限的概念，掌握函数左、右极限与函数极限的关系.

▲ 熟练掌握极限运算法则及两个重要极限.

▲ 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握运用无穷小量的等价关系求函数极限.

▲ 理解函数连续、间断的概念；理解初等函数的连续性，掌握分段函数连续性的讨论，并会用函数关系描述经济问题.

第一节 函 数

一、函数

1. 函数的概念

在观察各种自然现象或研究实际问题时，我们经常会遇到不同的量，这些

不同的量一般被分成两种:一种是在观察的过程中保持不变的量,我们称之为常量;另一种是在观察过程中会起变化的量,我们称之为变量.

例如,自由落体的下降时间和下降距离是变量,而落体的质量在这一过程中可以看成常量.

如果用 s 表示下降距离,用 t 表示下降时间,g 表示重力加速度,那么自由落体公式可表示为

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

从这个公式可以看出,在物体自由降落的过程中,给定一个 t 值就有一个确定的值与 s 对应,即距离 s 随时间 t 的变化而变化,我们说距离 s 与时间 t 存在依赖关系.

再例如,如果用 C 表示一个圆的周长,r 表示该圆的半径,那么 C 与 r 存在关系

$$C = 2\pi r,$$

在这个公式中,2π 是常量,C 与 r 是变量.像这种变量之间的依赖关系,在现实世界中广泛存在着,通常我们把这种依赖关系称为函数关系.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集,如果 D 中的每一个 x,按照某一确定的对应法则 f,变量 y 总有唯一确定的值与之对应,则称 f 是 D 上的函数.

给定 D 中的一个值 x,由对应法则 f 确定的值,记为 $f(x)$,即

$$y = f(x), x \in D,$$

称 x 为自变量,y 为因变量,D 为函数 f 的定义域,记为 D_f. $\{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$ 为函数 f 的值域,记为 R_f,即 $R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$.

上述定义中的记号 f 表示 $f: D_f \to R_f$,$f(x)$ 表示与 x 对应的函数值,为了便于叙述,习惯上,常用 $f(x)$ 或 $y = f(x)$ 来表示函数.

函数是由定义域与对应法则确定的,只有当两个函数具有相同的定义域和对应法则时,它们才是相同的函数.

例 1 设有两个函数

$$y = \cos x \text{ 与 } y = \frac{x\cos x}{x},$$

试问这两个函数相同吗?

解 由于 $y = \cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,而 $y = \dfrac{x\cos x}{x}$ 的定义域为

$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，因此 $y=\cos x$ 与 $y=\frac{x\cos x}{x}$ 不是相同的函数.

例 2 已知 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求 $f(2)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 $f(2)=\frac{1}{1-2}=-1$，$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}$.

例 3 求下列函数的定义域：

(1) $y=\ln(x+1)$；(2) $y=\frac{1}{x-1}+\sqrt{3-x}$.

解 (1) 该函数的定义域应满足不等式

$$x+1>0,$$

解得 $x>-1$，即该函数的定义域为 $(-1,+\infty)$.

(2) 该函数的定义域应满足不等式组

$$\begin{cases}x-1\neq 0\\3-x\geqslant 0\end{cases},$$

解得 $x\leqslant 3$ 且 $x\neq 1$，所以该函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,3]$.

2. 函数的表示法

通常地，函数有三种表示法：解析法、图示法与表格法.

(1) 解析法（公式法） 解析法（又称公式法）是指用数学表达式（解析表达式）来表示函数关系.

例如，函数 $y=\sin x+\sqrt{1-x^2}$，$y=x^3+\tan x-1$ 等，在此类函数中因变量 y 可以用自变量 x 的明显解析表达式表示出函数关系，即 $y=f(x)$，这类函数称为显函数. 但有时因变量 y 不能直接用自变量 x 的明显解析式表示，例如 $y-x-\sin y=0$，$x+y^2-1=0$ 等. 一般地，凡是能够由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数关系，称为隐函数.

(2) 图示法 图示法是用图形来表示函数关系.

例如某产品的销售收入 R 与产量 q 的关系见图 1-1，其定义域为 (q_1,q_2).

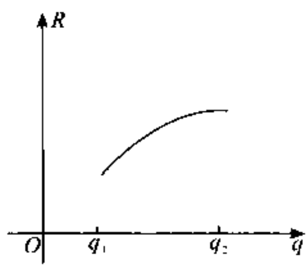


图 1-1

(3) 表格法 表格法是用列表的方法表示函数关系.

例如，某品牌手机上半年在某商场的销售量（单位：部）与时间的函数关系如表 1-1 所示.

表 1-1

月份	1月	2月	3月	4月	5月	6月
销售量	350	180	200	220	160	160

3. 分段函数

有些函数在其定义域的不同部分，对应法则由不同的解析式表示，这种函数称为分段函数.

例 4 在某市乘坐出租车，3 公里以内均为 7 元，3 至 5 公里之间 1.5 元 / 公里，5 公里以上 2.25 元 / 公里，求车费 y(元) 与路程 x(公里) 之间的函数关系.

解 由已知可得

$$y=\begin{cases}7 & 0<x\leqslant 3\\ 7+1.5(x-3) & 3<x\leqslant 5\\ 7+1.5(5-3)+2.25(x-5) & 5<x<+\infty\end{cases}.$$

即

$$y=\begin{cases}7 & 0<x\leqslant 3\\ 2.5+1.5x & 3<x\leqslant 5\\ -1.25+2.25x & 5<x<+\infty\end{cases}.$$

例 5 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<10\\ 1+2x & 10\leqslant x<20,\\ x-10 & 20\leqslant x\leqslant 30\end{cases}$$

求 $f(0)$，$f(2)$，$f(10)$，$f(20)$，$f(28)$.

解 因为 $0=0<10$，所以 $f(0)=0$.

因为 $0<2<10$，所以 $f(2)=0$.

同理判断 10、20、28 所在的范围，即可求得 $f(10)=1+2\times 10=21$，$f(20)=20-10=10$，$f(28)=28-10=18$.

虽然分段函数在不同的定义域范围用不同的函数表达式表示，但它仍然是一个函数而不是几个函数.

4. 函数的几种性质

(1) 函数的奇偶性

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称，如果任给 $x\in D_f$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果任给 $x\in D_f$，都有 $f(-x)$

$= f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图像关于原点对称(如图 1-2 所示)，偶函数的图像关于 y 轴对称(如图 1-3 所示).

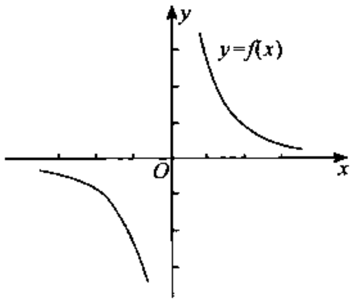


图 1-2

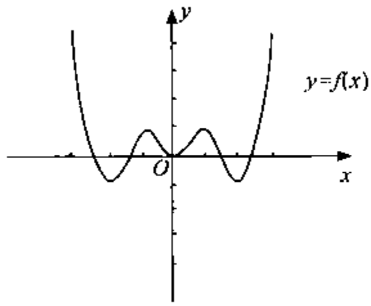


图 1-3

例 6 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x) = x^2 + \cos x$；(2) $f(x) = \ln \dfrac{2-x}{2+x}$；(3) $f(x) = e^x + 1$.

解 (1) 因为

$$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x),$$

所以函数 $f(x) = x^2 + \cos x$ 为偶函数.

(2) 因为

$$f(-x) = \ln \frac{2-(-x)}{2+(-x)} = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1} = -\ln \frac{2-x}{2+x} = -f(x),$$

所以函数 $f(x) = \ln \dfrac{2-x}{2+x}$ 为奇函数.

(3) 因为

$$f(-x) = e^{-x} + 1 \neq f(x)，而且\ f(-x) = e^{-x} + 1 \neq -f(x),$$

所以函数 $f(x) = e^x + 1$ 是非奇非偶函数.

(2) 函数的单调性

定义 3 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果任给 $x_1, x_2 \in (a,b)$，当 $x_1 < x_2$ 时，总有 $f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$），则称函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的(或单调减少的). 它们的图像如图 1-4 所示.

例如，函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内严格单调增加，在区间

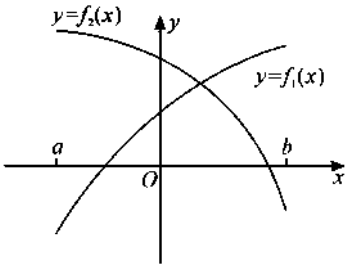


图 1-4

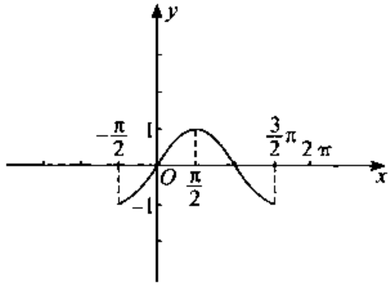


图 1-5

$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$内严格单调减少,如图 1-5 所示.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.单调函数是对区间而言的,就如上例函数 $y=\sin x$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内严格单调增加,在区间$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$内严格单调减少.但函数 $y=\sin x$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$内不是单调函数.

(3) 函数的周期性

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f,如果存在一个不为零的常数 T,使得对任意 $x\in D_f$,恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数,T 称为函数 $y=f(x)$ 的周期,通常函数的周期指它的最小正周期.

例如 $y=\sin(x+2k\pi)=\sin x,k\in\mathbf{Z}$,其中最小的正周期为 2π,我们就称函数 $y=\sin x$ 的周期为 2π.

(4) 函数的有界性

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 在区间(a,b)内有定义,如果存在一正数 M,使得对任给 $x\in(a,b)$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在(a,b)内是有界的;如果这样的 M 不存在,就称函数 $y=f(x)$ 在(a,b)内是无界的.

例如,函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的.因为任给 $x\in(-\infty,+\infty)$,恒有 $|f(x)|\leqslant 1$.函数 $y=\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$内无界,但在$(1,2)$内有界.

5. 反函数

在自由落体运动中，如果已知下降的时间 t，求下降的距离 s，那么由自由落体公式，我们知道 $s=\frac{1}{2}gt^2$，在这里 t 是自变量，s 是因变量；但如果知道下降的距离，求下降的时间，那么我们知道 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$，在这里 s 是自变量，t 是因变量. 由于自变量、因变量对换后，对应法则也发生了变化，因此产生了一个新的函数，这个新函数与原函数互为反函数.

定义 6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 R_f，并且对任何一个 $y\in R_f$，都可以由 $y=f(x)$ 在 D_f 内确定唯一的一个 x 与之对应，则得到一个定义域为 R_f，值域为 D_f，以 y 为自变量，以 x 为因变量的函数 $x=\varphi(y)$，我们称这个函数为函数 $y=f(x)$ 的反函数，可记为 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上，我们用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此，函数 $y=f(x)$ 的反函数可记为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-6 所示.

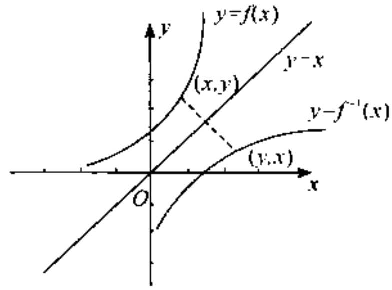


图 1-6

例 7 已知函数 $y=3x+1$，求该函数的反函数，并在同一直角坐标系中，作出它们的图像.

解 由 $y=3x+1$，解得 $x=\frac{y-1}{3}$，所以函数 $y=3x+1$ 的反函数为 $y=\frac{x-1}{3}$.

它们的图像如图 1-7 所示.

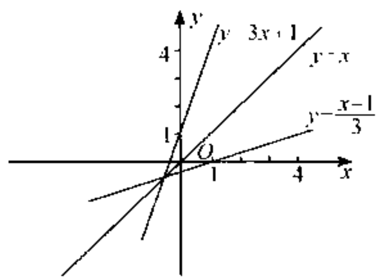


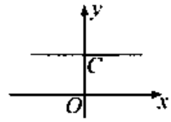
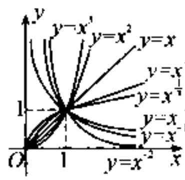
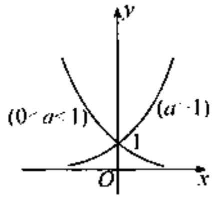
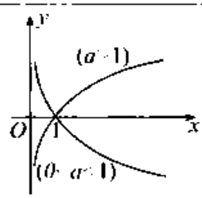
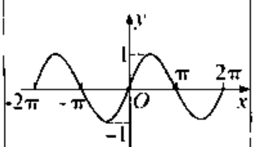
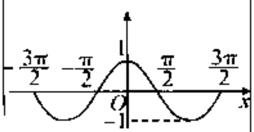
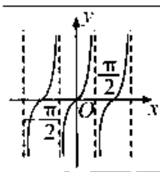
图 1-7

二、初等函数

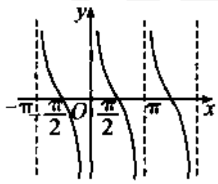
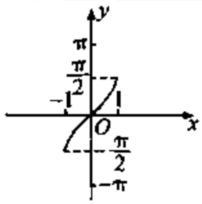
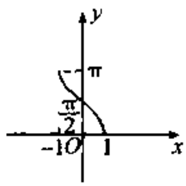
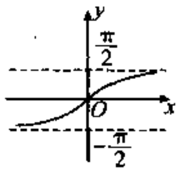
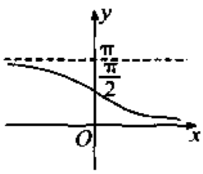
1. 基本初等函数

基本初等函数一般是指常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数. 它们的表达式、定义域、值域、图像、性质见表 1-2.

表 1-2

函数	定义域 D_f 与值域 R_f	图像	性质
常数函数 $y=C$ (C 为常数)	$D_f=(-\infty,+\infty)$ $R_f=C$		偶函数.
幂函数 $y=x^a$ (a 为任何实数)	由 a 的值确定		当 $a>0$ 时，函数在定义域内是单调增加的；当 $a<0$ 时，函数在定义域内是单调减少的.
指数函数 $y=a^x$ ($a>0,a\neq1$)	$D_f=(-\infty,+\infty)$ $R_f=(0,+\infty)$		图像过点 $(0,1)$. 当 $a>1$ 时，函数是单调增加的；当 $0<a<1$ 时，函数是单调减少的.
对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0,a\neq0$)	$D_f=(0,+\infty)$ $R_f=(-\infty,+\infty)$		图像过点 $(1,0)$. 当 $a>1$ 时，函数是单调增加的；当 $0<a<1$ 时，函数是单调减少的.
正弦函数 $y=\sin x$	$D_f=(-\infty,+\infty)$ $R_f=[-1,1]$		奇函数，周期为 2π，有界. 在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in \mathbf{Z})$ 内单调增加；在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)(k\in \mathbf{Z})$ 内单调减少.
余弦函数 $y=\cos x$	$D_f=(-\infty,+\infty)$ $R_f=[-1,1]$		偶函数，周期为 2π，有界. 在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)(k\in \mathbf{Z})$ 内单调减少；在 $(2k\pi-\pi,2k\pi)(k\in \mathbf{Z})$ 内单调增加.
正切函数 $y=\tan x$	$D_f=\{x\mid x\in \mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}\}$ $R_f=(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π. 在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in \mathbf{Z})$ 内单调增加.

续表

函数	定义域 D_f 与值域 R_f	图像	性质
余切函数 $y=\cot x$	$D_f=\{x\mid x\neq k\pi+\pi\}(k\in\mathbf{Z})$ $R_f=(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π. 在 $(k\pi,k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 内单调减少.
反正弦函数 $y=\arcsin x$	$D_f=[-1,1]$ $R_f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，有界. 在定义域内单调增加.
反余弦函数 $y=\arccos x$	$D_f=[-1,1]$ $R_f=[0,\pi]$		有界. 在定义域内单调减少.
反正切函数 $y=\arctan x$	$D_f=(-\infty,+\infty)$ $R_f=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，有界. 在定义域内单调增加.
反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$D_f=(-\infty,+\infty)$ $R_f=(0,\pi)$		有界. 在定义域内单调减少.

2. 复合函数

定义 7 如果函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ，并且 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$，那么，称 $f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，u 称为中间变量.

例 8 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=e^{x^2}$；(2) $y=\sqrt{1+x}$.

解 (1) 函数 $y=e^{x^2}$ 是由 $y=e^u, u=x^2$ 复合而成的.

(2) 函数 $y=\sqrt{1+x}$ 是由 $y=u^{\frac{1}{2}}, u=1+x$ 复合而成的.

例 9 设 $f(x)=2x^2+1, \varphi(x)=\sin x$，求 $f[\varphi(x)], \varphi[f(x)]$.

解 设 $f(u)=2u^2+1, u=\varphi(x)=\sin x$，那么 $f[\varphi(x)]=2\sin^2 x+1$. 同理可得 $\varphi[f(x)]=\sin(2x^2+1)$.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤得到的，并且只用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\ln x+\dfrac{e^{\sin\sqrt{x}}-1}{x}, y=\sin(\ln 3x)$ 等都是初等函数.

三、常用的经济函数

1. 需求函数

对于某种商品，消费者愿意并有能力购买的商品数量称为需求量，人们对商品的需求量受许多因素的影响，如该商品的价格、购买者的购买力等等，但在诸多因素中，价格起重要作用. 一般情况下，我们不考虑其他因素的影响，在该假设前提下，商品的需求量 Q 可看作是价格 p 的函数，称为需求函数，记为

$$Q=f(p).$$

一般地，需求函数是价格的单调递减函数，即需求量随着价格的上涨而减少，随着价格的下降而增加.

例 10 某地一商场销售某种品牌的手机，当该手机售价为 1100 元 / 部时，每天销量为 20 部，售价每提高 110 元时，销量相应地减少 1 部，试求需求函数.

解 设需求量为 Q，价格为 p，由已知可得

$$Q=20-\frac{p-1100}{110},$$

即需求函数为

$$Q=-\frac{1}{110}p+30.$$

2. 供给函数

假设市场上的每一种商品都是由生产者直接提供的，生产者愿意并能够出售的商品数量称为供给量. 如果忽略其他因素，那么供给量 Q 是价格 p 的函数，称为供给函数，记为