为什么错

——高中数学解题错误剖析

湖北教育出版社

为什么错

——高中数学解题错误剖析

刘汉文 编

湖北教育出版社

为 什 么 错

——高中数学解题错误剖析

刘 汉 文 编

*

湖北教育出版社出版、发行　新华书店湖北发行所经销

湖北教育出版社印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 10印张 210 000字

1988年 3 月第 1 版　1988年 3 月第 1 次印刷

印数：1—26 000

ISBN 7—5351—0166—6／G·147　定价：1.70元

编者的话

数学教学实践证明：学习数学、解答数学题，错误常难避免；发生错误和改正错误贯穿于整个教学过程。我们应善于从各种各样的错误题解中找出错误之所在，分析产生错误的原因，研究纠正和避免错误的方法，以吸取有益的教训。毫无疑问，这对于加深理解基础知识，提高分析问题和解决问题的能力，是非常有效的途径。本书就是基于这样的想法而编写的．

为了紧密配合教学，本书完全按照现行高中数学课本（甲种本）内容和顺序编排，连章节名称也与课本保持一致．每章开头，简要介绍了该章的主要内容，系统地归纳了该章解题中一些常见的错误和应注意的一些问题．书中共有260余道例题，每道例题都给出了较典型的错误解答，并对错误解答作出了较详细的剖析，找出了产生错误的原因，指明了避免或纠正错误的方法和正确解法。在有的例题后面，还总结了有关的解题规律和方法。本书每一章还配有练习题，每道练习题给出的解答都有错误，让读者自己找出错误之所在以及产生错误的原因．书末附有练习题的正确答案或提示。

书中的例题和练习题，绝大部分是从学生的数学作业或试卷中收集筛选出来的，其中百分之六十以上的题目是现行数学课本中的习题、复习题里面的。因此，本书既是一本教学参考书，又是一本课外辅导读物。

本书在编写过程中，得到了不少专家和数学教学工作者的支持和帮助.华中师范大学陈森林副教授、湖北省教学研究室彭咏松副主任分别对本书代数部分和立体几何、解析几何部分作了审阅，参加本书部分章节初稿编写工作的有李家才、瞿汉东、蔡洪杰、陶德浩、林仁斋等老师，还有缪少金、李一挥、余经浓、朱志瀛、刘崇明、陈敢、魏志庆等老师为本书提供了部分素材。笔者对老师们的支持和帮助，在此一并致以深切的感谢!

由于笔者水平所限，书中错误难免，敬请读者指正。

编　者

一九八六年十月

目　　录

第一部分　代　　数

第二部分　立体几何

第三部分　解析几何

练习答案或提示

第一部分 代　数

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

本章主要学习集合的概念及基本运算、映射和一一映射的概念、函数的概念及其图象和性质.

学习集合这一单元时，要正确理解集合、子集、交集、并集、补集等基本概念以及它们相互间的区别与联系，掌握它们的表示方法与符号，不要混淆“属于”与“包含”的涵义，防止把两集合的交集中的元素理解为一集合的元素加另一集合的元素，把既不属于集A又不属于集B的元素，作为集A与集B的并集的元素，或在集A与集B的并集中多次出现A与B的公共元素之类的错误，还要注意集合的表示方法中的每一个细节，不可有任何疏忽.

学习映射这一单元时，要注意映射的定义中的两个集合的先后次序，不要把“集合A中的任何一个元素”中的“任何一个”误认为“某几个”，使得A中有的元素在B中找不到元素或有多个元素与之对应. 关于一一映射容易出现的错误：一是忽视A中的不同元素，在B中应有不同的象；二是忽视B中每一个元素都有原象. 有的同学在研究逆映射时，

忽视了一一映射这个前提。

函数是一个非常重要的概念，为弄清这个概念的实质，应抓住"对应法则"这个核心。不要认为"函数就是一个解析式"，能写出解析式的才是函数，写不出解析式的就不是函数；不要把分段表示的一个函数认作几个函数；也不要把用不同形式的解析式表示的同一函数认为是不同函数。不要忽视定义域、值域在函数概念中的作用：避免把定义域不同但解析式相同的函数误认为是同一函数；不要把函数的定义域混为解析式的允许值范围。

在运用幂函数性质解题时，要注意区别 $n>0$ 与 $n<0$ 两种情况下幂函数的不同性质，课本中列举的性质是对"在第一象限内"这个条件而言的，不要忘记这一点。要注意奇函数与偶函数的定义域关于原点对称这一特点。作图时，要充分利用奇函数与偶函数各自的性质，但不要混淆。

学习指数函数与对数函数时，关键在于弄清楚底数 a 对于函数的图象和性质的影响，不要混淆 $a>1$ 与 $0<a<1$ 时的不同情况，不要忘记底数 a 必须满足 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 的条件。在解对数方程时，一要尽可能避免失根(不要缩小定义域)，二要进行验根，舍去增根。

一、集　合

例 1　用列举法表示由数 1,2,3,4,5 组成的集合。

解　由数 1,2,3,4,5 组成的集合可表示为$\{1\ 2\ 3\ 4\ 5\}$或(1,2,3,4,5)。

剖析　列举法是把给定集合中的元素不重复、不计次

序、不遗漏地一一列出放在符号"{ }"内，元素之间用符号"，"隔开。上面解答的错误就是没有遵循这些规定。正确解答是：由数 1, 2, 3, 4, 5 组成的集合表示为$\{1,2,3,4,5\}$。

例 2 用描述法表示不超过20的非负偶数集。

解 不超过20的非负偶数集表示为

$$\{x\mid x=2k,\ 0\leqslant k\leqslant 10\}\text{或}\{x\mid x=2k,\ k\leqslant 10,\ k\in Z\}$$

剖析 以上解答均有错误，前者漏写了条件$k\in Z$，后者忽视了"非负"这个条件。正确解答是：$\{x\mid x=2k,\ 0\leqslant k\leqslant 10,\ k\in Z\}$。也可表示为$\{x\mid x=2(k-1),\ k\leqslant 11,\ k\in N\}$或$\{2k\mid 0\leqslant k\leqslant 10,\ k\in Z\}$等形式。

例 3 用数学符号填空：1____$\{1,2\}$；$\{1\}$____$\{1,2\}$；$\{1,2\}$____$\{2,1\}$。

解 $1\subseteq\{1,2\}$；$\{1\}\in\{1,2\}$；$\{1,2\}\in\{2,1\}$

剖析 上述解答都是错误的。其原因是没有理解"属于"与"包含"之符号的涵义与区别。正确解答是：$1\in\{1,2\}$；$\{1\}\subset\{1,2\}$；$\{1,2\}=\{2,1\}$。

例 4 学校里开运动会，设$A=$\{参加百米赛跑的同学\}，$B=$\{参加跳高比赛的同学\}，求$A\cap B$。

解 $A\cap B=$\{参加百米赛跑的同学和参加跳高比赛的同学\}，或$A\cap B=$\{参加百米赛跑的同学＋参加跳高比赛的同学\}。

剖析 本题解法错在把集合A与B的交集中的元素理解为集合A的元素与集合B的元素之和。实际上，A与B的交集中的元素，既属于A，又属于B，也就是A与B的公共元素，且仅有这些元素。

因此，本题正确解答为：

$A\cap B=\{$参加百米赛跑的同学且又参加跳高比赛的同学$\}$.

例 5 设 $A=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}$，$B=\{(x,y)\mid 3x+2y=7\}$，求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}4x+y=6\\3x+2y=7\end{cases}\right.\right\}$

$=\{x=1,\ y=2\}=\{1,2\}$

剖析 上述解答错误在于，将集合$\{(x,\ y)\}$与集合$\{x,\ y\}$，混为一谈. 要知道，$\{(x,y)\}$表示以 x 为横坐标、y 为纵坐标的点(x,y)的集合，而$\{x,y\}$则是以 x 与 y 分别为元素的集合. 本题正确解答应是:

$A\cap B=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}\cap\{(x,y)\mid 3x+2y=7\}$

$=\left\{(x,\ y)\left|\begin{cases}4x+y=6\\3x+2y=7\end{cases}\right.\right\}=\{(1,\ 2)\}$

例 6 写出集合$\{a,b,c\}$的所有子集.

解 $\{a,b,c\}$的子集有:

$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$

剖析 我们知道，空集是任何集合的子集，任何一个集合是它本身的子集. 可见，以上解答漏写了集合$\{a,\ b,\ c\}$与空集 ϕ.

例 7 设 $A=\{f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}$ 的定义域$\}$，$B=\{$绝对值不超过 1 的实数集$\}$，求 $A\cup B$.

解 $A\cup B=R$.

剖析 以上解答显然是错误的. 因为 2 既不属于 A，又不属于 B. 自然 2 也就不属于 A 与B的并集. 本题正确解答是:

∵ $A=\{x|x\neq -1$ 且 $x\neq 2,\ x\in R\}$，$B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1,\ x\in R\}$

∴ $A\cup B=\{x|\ x\neq 2,\ x\in R\}$

二、映射与函数

例 8 由图1—1—1，判定这种对应是否为 A 到 B 的映射。

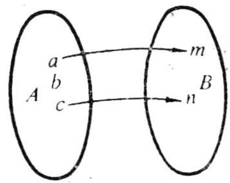

图 1—1—1

解 如图1—1—1，集合 A 中的元素 a, c，在集合 B 中分别有唯一的元素 m，n 与之对应，这样的对应是从 A 到 B 的映射.

剖析 A 中的元素 b 在 B 中找不到元素与之对应，即不是 A 中任何一个元素在 B 中都有唯一的元素和它对应。因此，图1—1—1中的对应，不是从 A 到 B 的映射。

例 9 试判断下列解析式是否表示函数，其中有没有相同的函数：

(1) $y=\lg(x-2)+\lg(1-x)$

(2) $y=\pm\sqrt{x-1}$

(3) $y=\dfrac{x^2}{x}$　　　　(4) $y=2^{\log_2 x}$

解 (1)、(2)、(3)、(4)式表示函数。

(3) 式实际上为 $y=x$，(4)式变形亦为 $y=x$，所以(3)式与(4)式表示相同的函数。

剖析 以上判断都是错误的。实际上，(1)式不表示函

数，因 x 的允许值集为空集；(2)式也不表示函数，因它不表示单值对应关系；(3)式、(4)式表示函数．尽管(3)式与(4)式的对应关系相同，但(3)的定义域为 $x\neq 0$ 的实数，(4)的定义域为 $x>0$ 的实数，就是说，它们的定义域不同，所以它们是不同的函数．

例 10 画出下列函数的图象：

(1) $f(x)=x+2$，$x\in Z$，且 $|x|\leqslant 3$

(2) $f(x)=2x^2-3x-2$，$x\in\left(-\frac{1}{2},2\right)$

解 这两个函数的图象，如图 1—1—2 所示．

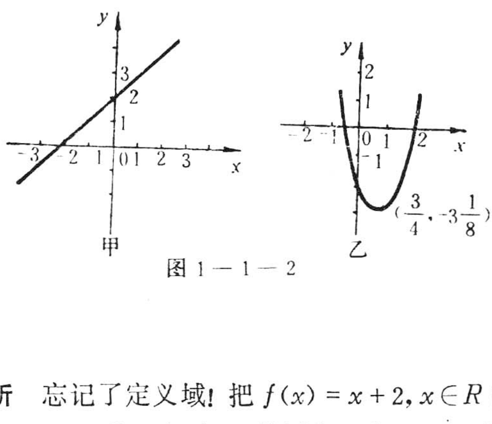

图 1—1—2

剖析 忘记了定义域！把 $f(x)=x+2, x\in R$ 的图象与 $f(x)=x+2$，$x\in Z$ 且 $|x|\leqslant 3$ 的图象，$f(x)=2x^2-3x-2$ 的图象与 $f(x)=2x^2-3x-2$，$x\in\left(-\frac{1}{2},2\right)$的图象混为一谈．事实上，解析式相同而定义域不同的函数是不同的函数，它们的图象也不同．本题正确图象如图 1—1—3 所示．

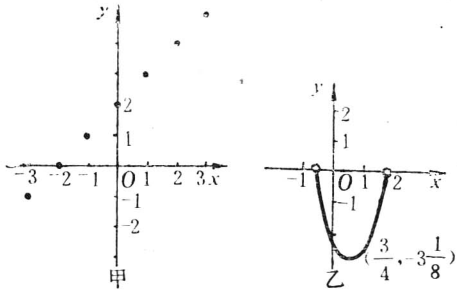

图 1—1—3

例 11　投寄本埠平信，每 20 克重应贴邮票 4 分，不足20克重的以20克重计算．写出邮资（分）与信件重量（在 60 克重以内）的函数关系式，并画出函数的图象．

解　设信件的重量为x克重，应贴的邮资为 $f(x)$分，则本埠平信的邮资与信重的函数关系式为

$$f(x)=\frac{4x}{20}(x=20k,\ k\in N \text{ 且 } x\leqslant 60)$$

它的图象如图 1—1—4 甲所示．

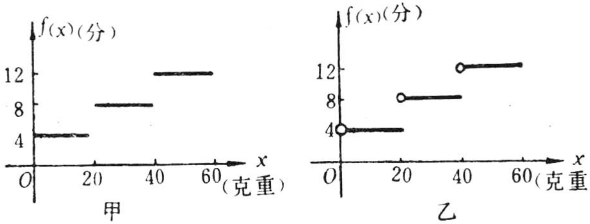

图 1—1—4

剖析 由上面函数式可知，k 只能取 1，2，3，那么平信的重量只能是20克，40克，60克，这与实际情况是不相符的。所以上面函数式是错误的。由图1—1—4甲可知，$f(20)=4$，又 $f(20)=8$，这与题设是相矛盾的。错误原因在于没有根据题意，正确确定每个区间端点处的函数值。本题正确解答是：

$$f(x)=\begin{cases}4, & x\in(0,\ 20]\\ 8, & x\in(20,40]\\ 12, & x\in(40,60]\end{cases}$$

它的图象如图 1—1—4 乙。

三、幂　函　数

例 12 比较$(-2.3)^{-\frac{5}{3}}$与 $(-2)^{-\frac{5}{3}}$的大小。

解 $\because\ \ -2>-2.3$，$\therefore\ \ (-2)^{-\frac{5}{3}}>(-2.3)^{-\frac{5}{3}}$

剖析 我们知道，当 $n<0$ 时，幂函数 $y=x^n$ 性质之一：在第一象限内，函数值随着 x 的增大而减小。上面解答有两处错误：一是忽视了“在第一象限内”这个条件，二是混淆了幂函数在 $n>0$ 与 $n<0$ 时的性质。

本题正确解法应该是：

$$(-2.3)^{-\frac{5}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(-2.3)^5}}=-\frac{1}{\sqrt[3]{(2.3)^5}}=-(2.3)^{-\frac{5}{3}}$$

同理

$$(-2)^{-\frac{5}{3}}=-2^{-\frac{5}{3}}$$

根据幂函数的性质有：$(2.3)^{-\frac{5}{3}}<2^{-\frac{5}{3}}\Rightarrow-(2.3)^{-\frac{5}{3}}>-2^{-\frac{5}{3}}$，

即

$$(-2.3)^{-\frac{5}{3}}>(-2)^{-\frac{5}{3}}$$

例 13 证明函数 $f(x)=x^2+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

证明 $\because$ $f(x_2)-f(x_1)=x_2^2+1-(x_1^2+1)=x_2^2-x_1^2$

设 $x_2>x_1$，则 $x_2^2-x_1^2>0$.

$\therefore$ $f(x_2)-f(x_1)>0$ 即 $f(x_2)>f(x_1)$.

从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

剖析 上面，由 $x_2>x_1$ 得 $x_2^2>x_1^2$，显然是不严密的. 因为当 $x_1<x_2<0$ 时，不等式 $x_2^2>x_1^2$ 是不成立的. 产生这种错误的原因是忽视了题目所给的区间. 本题应该这样证明:

设 $0<x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2+1-(x_1^2+1)=x_2^2-x_1^2$$
$$=(x_2+x_1)(x_2-x_1)$$

由 $0<x_1<x_2$ 知，$x_2+x_1>0$，$x_2-x_1>0$，所以

$$f(x_2)-f(x_1)>0 \text{ 即 } f(x_2)>f(x_1)$$

从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是增函数.

例 14 判断函数 $f(x)=x^2$ 在 $[-2,4]$ 上的奇偶性.

解 因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，所以 $f(x)=x^2$ 是偶函数.

剖析 在 $[-2,4]$ 内作出 $f(x)=x^2$ 的图象，显然这个图象不是关于 y 轴对称的，所以此函数不是偶函数. 问题的关键就在于这个函数的定义域是 $[-2,4]$，对于这个定义域中的任意一个 x，$-x$ 不一定属于这个定义域. 如 $x=3\in[-2,4]$，但 $-x=-3\notin[-2,4]$. 根据偶函数和奇函数的定义可知，$f(x)=x^2$ 在 $[-2,4]$ 上既不是偶函数也不是奇函数.

例 15 证明：不论 $f(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ 上的什么函