《经济数学》（第二版）
习题解答手册

刘文龙　编

经济科学出版社

《经济数学》

习题解答手册

刘文龙　编

经 济 科 学 出 版 社

目　　录

第一章　函数、极限与连续

1. 试求下列函数的定义域

（1）$y=\dfrac{1}{1+x}$

解：分式的分母不能为0，即$1+x\neq0$，$x\neq-1$，所以定义域为$(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ +\infty)$。

（2）$y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$

解：分式的分母不能为0，但分母$1+x^2$恒正，所以定义域为$(-\infty,\ +\infty)$。

（3）$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

解：要使$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$有意义，应满足$x^2-1>0$，解得$x<-1$，$x>1$

所以定义域为$(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$

（4）$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-4}}$

解：要使$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-4}}$有意义，应满足$x^2-4\neq0$，即$x\neq\pm2$

所以定义域为$(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$

（5）$y=\dfrac{1}{x^2+2x+3}$

解：因为分式的分母$x^2+2x+3=(x+1)^2+2$恒正，所以定义域为$(-\infty,\ +\infty)$。

（6）$y=\sqrt{x^2-4x+3}$

解：因为偶次方根被开方式应非负，即$x^2-4x+3\geqslant0$，解得$x\leqslant1$，$x\geqslant3$

所以定义域为$(-\infty,\ 1]\cup[3,\ +\infty)$

（7）$y=e^x+\sqrt{x}$

解：显然$x\geqslant0$时函数有意义，所以定义域为$[0,\ +\infty)$

（8）$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$

解：由$\begin{cases}1-x^2\neq0\\x-2\geqslant0\end{cases}$　可知$\begin{cases}x\neq\pm1\\x\geqslant-2\end{cases}$

所以定义域为$[-2,\ -1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$

（9）$y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\arcsin\dfrac{x-1}{2}$

解：通过$\begin{cases}\lg(1-x)\neq0\\1-x>0\\\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant1\end{cases}$　可知$\begin{cases}1-x\neq1\\x<1\\-1\leqslant x\leqslant3\end{cases}$

所以定义域为 $[-1, 0)\cup(0, 1)$

(10) $y=\dfrac{1}{1-\tan x}$

解：通过$\begin{cases}1-\tan x\neq 0\\ x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 可知$\begin{cases}x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{4}\\ x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

所以定义域为$\left\{x\ \middle|\ x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{4},\ x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in z\right\}$

2. 试指出下列分段函数的定义域

(1) $f(x)=\begin{cases}-1 & 0<x<1\\ 1 & x>1\end{cases}$

解：定义域为 $(0, 1)\cup(1, +\infty)$

(2) $y=\begin{cases}x^2+1 & -1<x<2\\ x^3-3 & 2<x\leqslant 4\end{cases}$

解：定义域为：$(-1, 2)\cup(2, 4]$

(3) $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x<0\\ x & 0<x<1\\ 2 & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

解：定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, 2]$

3. 作出下列函数图形，并指出它的定义域

$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+3 & 1<x<3\end{cases}$

解：函数图形如图 1－1，定义域为 $[0, 3)$

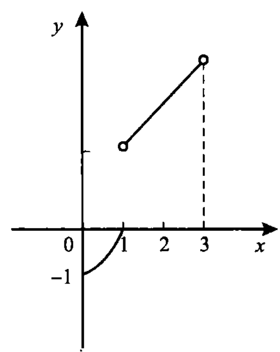

图 1－1

4. 求下列函数值

(1) 已知：$f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求：$f(2)$，$f(-2)$，$f(0)$，$f(a)$ 和 $f(a+b)$

解：$f(2)=0$，$f(-2)=-4$，$f(0)=2$，$f(a)=\dfrac{|a-2|}{a+1}$，$f(a+b)=\dfrac{|a+b-2|}{a+b+1}$

(2) 已知：$\varphi(t)=t^3+1$，求：$\varphi(t^2)$ 和 $[\varphi(t)]^2$

解：$\varphi(t^2)=t^6+1$， $[\varphi(t)]^2=(t^3+1)^2=t^6+2t^3+1$

(3) 已知：$f(x)=x^2-3x+7$，求：$f(x+\Delta x)$ 和 $f(x+\Delta x)-f(x)$

解：$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)+7=x^2-3x+7+(2x-3)\Delta x+(\Delta x)^2$

$f(x+\Delta x)-f(x)=(2x-3)\Delta x+(\Delta x)^2$

5. 若 $f(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<1\\ \dfrac{1}{2} & x=1\\ 1 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$　求：$f(0)$、$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$、$f(1)$ 和 $f\left(\dfrac{5}{4}\right)$

解：$f(0)=0$　　$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

$f(1)=\dfrac{1}{2}$　　$f\left(\dfrac{5}{4}\right)=1$

6. 若 $\varphi(x)=\begin{cases}2^x & -1<x<0\\ 2 & 0\leqslant x<1\\ x-1 & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$　求：$\varphi(3)$、$\varphi(2)$、$\varphi(0)$、$\varphi(0.5)$ 和 $\varphi(-0.5)$

解：$\varphi(3)=2$，$\varphi(2)=1$，$\varphi(0)=2$，$\varphi(0.5)=2$，$\varphi(-0.5)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7. 下列各函数中，$f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=1$

解：否！因为定义域不同，前者 $x\neq 0$，而后者定义域为 R

(2) $f(x)=\ln x^2$，$\varphi(x)=2\ln x$

解：否！因为定义域不同，前者定义域为 R，而后者 $x>0$

(3) $f(x)=x$，$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$

解：否！因为对应法则不同，$f(x)=x$，$\varphi(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ -x, & x<0\end{cases}$

8. 讨论下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

解：由 $f(-x)=\dfrac{|-x|}{-x}=-f(x)$，可知 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 为奇函数

(2) $f(x)=\cos(\sin x)$

解：由 $f(-x)=\cos[\sin(-x)]=\cos(-\sin x)=\cos(\sin x)=f(x)$

可知 $f(x)=\cos(\sin x)$ 为偶函数

(3) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

解：由 $f(-x)=\ln[-x+\sqrt{(-x)^2+1}]=\ln\dfrac{x^2+1-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}=\ln(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}$

$$=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

可知 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数

(4) $y=f(x)+f(-x)$

解：令 $F(x)=f(x)+f(-x)$

$F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$，可知 $F(x)=f(x)+f(-x)$ 为偶函数

(5) $v=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$

解：$f(-x)=\begin{cases}-1 & x\geqslant 0\\ 1 & x<0\end{cases}=-f(x)$，可知 $f(x)$ 为奇函数

9. 讨论下列函数的单调性

(1) $y=|x|-x$

解：当 $y=\begin{cases}0 & x\geqslant 0\\ -2x & x<0\end{cases}$ 在 $(-\infty,0)$ 内任取 $x_1<x_2$，则 $f(x_2)-f(x_1)=-2(x_2-x_1)<0$

所以 $f(x_2)<f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内是减函数，在 $(0,+\infty)$ 内函数值恒为 0

故 $y=|x|-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不增不减

(2) $y=1-\ln x$

解：$y=1-\ln x$ 定义域为 $(0,+\infty)$，任取 $x_1<x_2$，则 $f(x_2)-f(x_1)=1-\ln x_2-(1-\ln x_1)=\ln\dfrac{x_1}{x_2}$

由于 $\dfrac{x_1}{x_2}<1$，$\ln\dfrac{x_1}{x_2}<0$，得 $f(x_2)<f(x_1)$

所以函数是减函数

(3) $f(x)=2^{x-1}$

解：$f(x)=2^{x-1}$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$，任取 $x_1<x_2$

则 $\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}=\dfrac{2^{x_2-1}}{2^{x_1-1}}=2^{x_2-x_1}$，由于 $x_2-x_1>0$，所以 $\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}>2^0=1$

故 $f(x_2)>f(x_1)$，函数是增函数。

(4) $f(x)=ax+b$

解：$f(x)=ax+b$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$，任取 $x_1<x_2$

则 $f(x_2)-f(x_1)=(ax_2+b)-(ax_1+b)=a(x_2-x_1)$

当 $a>0$ 时，得 $f(x_2)>f(x_1)$，所以函数是增函数

当 $a<0$ 时，得 $f(x_2)<f(x_1)$，所以函数是减函数

10. 指出下列函数中哪些是周期函数？并求出周期函数的周期。

(1) $y=\sin^2 x$

解：$y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ 是周期函数，周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

(2) $y=\sin\dfrac{1}{x}$

解：不是周期函数。

(3) $y=1+\cos\dfrac{\pi}{2}x$

解：是周期函数，周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

(4) $y=x\sin x$

解：不是周期函数。

11. 求下列函数的反函数

(1) $y=\dfrac{x}{x+2}(x\neq -2)$

解：根据原题可知 $x=\dfrac{2y}{1-y}$，得反函数 $y=\dfrac{2x}{1-x}$，$(x\neq 1)$

(2) $y=1+\ln(x+2)$，$(x>-2)$

解：根据原题可知 $x=e^{y-1}-2$，得反函数 $y=e^{x-1}-2$，$(x\in R)$

(3) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$，$(x\in R)$

解：当 $x\geqslant 0$ 时，$x=\sqrt{y^3-1}$，得反函数 $y=\sqrt{x^3-1}$，$(x\geqslant 1)$

当 $x<0$ 时，$x=-\sqrt{y^3-1}$，得反函数 $y=-\sqrt{x^3-1}$，$(x\geqslant 1)$

12. 按照下列给出的 $f(x)$ 与 $g(x)$，求复合函数 $f[g(x)]$

(1) $f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=x^2$

解：$f[g(x)]=\sqrt{g(x)}=\sqrt{x^2}$

(2) $f(x)=e^x$，$g(x)=\ln x$

解：$f[g(x)]=e^{g(x)}=e^{\ln x}=x$

(3) $f(x)=e^x$，$g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

解：$f[g(x)]=e^{g(x)}=e^{\frac{1}{f(x)}}=e^{\frac{1}{e^x}}=e^{e^{-x}}$

(4) $f(x)=\begin{cases}2x & x\leqslant 0\\ 0 & x>0\end{cases}$，$g(x)=x^2-1$

解：$f[g(x)]=\begin{cases}2g(x) & x\leqslant 0\\ 0 & x>0\end{cases}=\begin{cases}2(x^2-1), & x\leqslant 0\\ 0, & x>0\end{cases}$

13. 设某一防空洞的截面是矩形上面加半圆，周长为 16 米，试把截面积 S 表示为矩形底宽 x 的函数。

解：设矩形底宽 x，则圆半径为 $\dfrac{x}{2}$，半圆周长为 $\pi\dfrac{x}{2}$，矩形长为 $\dfrac{1}{2}\left(16-x-\pi\dfrac{x}{2}\right)$

矩形面积 $S_1=x\cdot\dfrac{1}{2}\left(16-x-\pi\dfrac{x}{2}\right)$

半圆面积 $S_2=\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

所以截面面积 $S=S_1+S_2=\dfrac{1}{2}\left(16x-x^2-\dfrac{\pi}{4}x^2\right)$

14. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 千克时按基本运费计算，如从上海到某地每千克 0.15 元；当行李超过 50 千克时，超过部分按每千克 0.25 元收费。试求从上海到某地行李费 y（元）与行李重量 x（千克）之间的函数关系，并画出这个函数关系的图形。

解：$y=\begin{cases}0.15x & 0\leqslant x\leqslant 50\\ 0.15\times 50+0.25(x-50) & x>50\end{cases}$

函数关系的图形如图 1-2

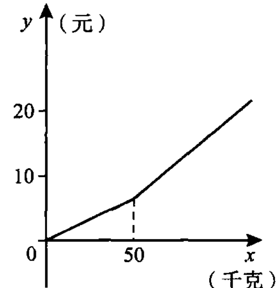

图 1-2

15. 某产品生产量为 x 吨，固定成本为 b 元（$b>0$），每生产一个单位产品总成本增加 a 元（$a>0$）。试将总成本 C 及平均单位成本表示为 x 的函数。

解：总成本 $C=ax+b$　　平均成本 $\bar{C}=a+\dfrac{b}{x}$

16. 某厂生产某产品 1000 吨，每吨定价为 280 元。销售量在 800 吨以内时，按原价出售；超过 800 吨部分按九折出售。试将销售总收入与销售量的函数关系用数学表达式表示出来。

解：设销售量为 x（吨），销售总收入 $R(x)$ 元，则：

$$R(x)=\begin{cases}280x & 0<x\leqslant 800\\ 280\times 800+0.9\times 280\times(x-800) & 800<x\leqslant 1000\end{cases}$$

17. 已知 $y=\sqrt{1+u^2}$，$u=\sin v$，$v=\ln x$，将 y 表示为 x 的函数。

解：$y=\sqrt{1+\sin^2(\ln x)}$

18. 将下列函数分解为基本初等函数的复合形式

(1) $y=(e^x)^2$ 是由幂函数 $y=u^2$ 及指数函数 $u=e^x$ 复合而成。

(2) $y=e^{x^2}$ 是由指数函数 $y=e^u$ 及幂函数 $u=x^2$ 复合而成。

(3) $y=e^{2^x}$ 是由 $y=e^u$，$u=2^x$ 复合而成。

(4) $y=(\ln x^2)^3$ 是由 $y=u^3$，$u=\ln v$，$v=x^2$ 复合而成。

(5) $y=3^{\ln(x^2)}$ 是由 $y=3^u$，$u=\ln v$，$v=x^2$ 复合而成。

(6) $y=\ln\tan 2x$ 是由 $y=\ln u$，$u=\tan v$，$v=2x$ 复合而成。

(7) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=\sqrt{x}$ 复合而成。

(8) $y=\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=e^v$，$v=\sqrt{x}$ 复合而成。

(9) $y=a^{\ln\sqrt{e^x+1}}$ 是由 $y=a^u$，$u=\ln v$，$v=\sqrt{t}$，$t=e^x+1$ 复合而成。

(10) $y=a^{\sqrt[3]{x^2+1}}$ 是由 $y=a^u$，$u=\sqrt[3]{v}$，$v=x^2+1$ 复合而成。

(11) $y=\ln[\ln(1+x^2)]$ 是由 $y=\ln u$，$u=\ln v$，$v=1+x^2$ 复合而成。

(12) $y=1+\sin^2x$ 是由 $y=1+u$，$u=v^2$，$v=\sin x$ 复合而成。

19. 试求下列各式的极限

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}=\dfrac{8}{2}=4$（本题可直接将 $x=1$ 代入即可求得极值）

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)=-\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{3}{4}$（本题可直接将 $x=0$ 代入即可求得极值）

(3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x+5}$

解：由于分母$\lim\limits_{x\to2}(x+5)=7\neq0$；分子$\lim\limits_{x\to2}(x^2-4)=0$

所以$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x+5}=0$

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$

解：由于分母$\lim\limits_{x\to1}(x^2-5x+4)=0$；分子$\lim\limits_{x\to1}(2x-3)=-1\neq0$，所以$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{2x-3}=0$

故$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$

解：将分子、分母分别因式分解：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)}$ 消去 0 因子

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x-3}=-\dfrac{2}{2}=-1$

(6) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-x+1-3}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-2}{x^2-x+1}=-1$

(7) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-3}{x-10}=\dfrac{1}{8}$

(8) $\lim\limits_{n\to0}\dfrac{(x+n)^3-x^3}{n}$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to0}\dfrac{x^3+3x^2n+3xn^2+n^3-x^3}{n}=\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2+3xn+n^2)=3x^2$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-5}=\dfrac{1}{2}$（当 $x\to\infty$ 时，分子、分母同次极限值等于次项系数比）

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2-1}{x^5-x}=0$（当 $x\to\infty$ 时，分母次高于分子次数极限值等 0）

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}=\infty$（当 $x\to\infty$ 时，分母次低于分子次数极限值等 ∞）

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

解：将分子、分母同乘分子的有理化因子（$\sqrt{x+1}+1$）

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$

解：将分子、分母同乘分子的有理化因子（$\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}$）

$$\lim_{x\to 1}\frac{3-x-1-x}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$

解：将分子、分母同乘分子、分母的有理化因子

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+p^2-p^2)(\sqrt{x^2+q^2}+q)}{(x^2+q^2-q^2)(\sqrt{x^2+p^2}+p)}=\frac{q}{p}$$

(15) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$

解：乘分子的有理化因子

则$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+ax+bx+ab-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\dfrac{a+b}{2}$

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$

解：利用 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{(n+1)n}{2}$

则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n(n+1)}{2(n+2)}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n-n^2-2n}{2(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n}{2n+4}=-\dfrac{1}{2}$

(17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$

解：因为$\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$

则$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\dfrac{\sin 4x}{4x}}{3\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{4}{3}$

(19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

利用无穷小代换 $1-\cos x$ 等价于$\dfrac{x^2}{2}$，$\sin x$ 等价于 x

则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

此题也可这样解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}$$

或$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2}{x^2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

(20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$

解：利用无穷小代换 $\tan 2x$ 等价于 $2x$，$\sin 5x$ 等价于 $5x$

则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$

此题也可这样解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\frac{1}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}=\frac{2}{5}$$

(21) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\cdot x=x\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}=x$

(22) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\sin x+\sin a)(\sin x-\sin a)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}\cdot 2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\sin(x+a)\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}=\sin 2a$$

(23) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{k}{x})^x$

解：原式$=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k=e^k$

(24) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{x}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left\{[1+(-x)]^{\frac{1}{-x}}\right\}^{-3}=e^{-3}$

(25) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{2}\cdot\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)=e^{2}$

(26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}+\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}=e$

(27) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(1+\cos)^{\sec x}$

解：原式 $=\ln\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}=\ln e=1$

(28) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]\right\}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\ln e=1$

(29) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1}{x}$

令 $e^{x}-1=y$，得 $x=\ln(1+y)$且 $x\to0$ 时 $y\to0$

则$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{y}{\ln(1+y)}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\dfrac{1}{\ln e}=1$

(30) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}\cdot\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{\left(5+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\dfrac{2^{20}3^{30}}{5^{50}}$

20. 先画出函数图形，再用左、右极限讨论下列定点极限

(1) $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leqslant0\\ x+1 & x>0\end{cases}$ 　求：$\lim\limits_{x\to0}f(x)$

解：见图 1－3

$\lim\limits_{x\to0^{+}}f(x)=\lim\limits_{x\to0^{+}}(x+1)=1$

$\lim\limits_{x\to0^{-}}f(x)=\lim\limits_{x\to0^{-}}(x-1)=-1$

因为 $\lim\limits_{x\to0^{+}}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^{-}}f(x)$

所以极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在

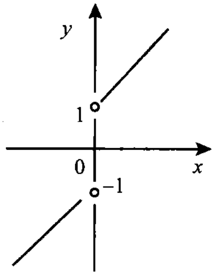

图 1－3

(2) $f(x)=\begin{cases}x^{2} & x\leqslant0\\ x+1 & x>0\end{cases}$ 　求：$\lim\limits_{x\to0}f(x)$

解：见图 1－4

$\lim\limits_{x\to0^{+}}f(x)=1$

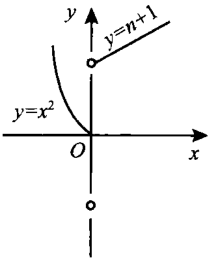

图 1－4

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

因为 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

所以极限 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在

(3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x-1} & x<0 \\ x & 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & 1 \leqslant x < 2 \end{cases}$

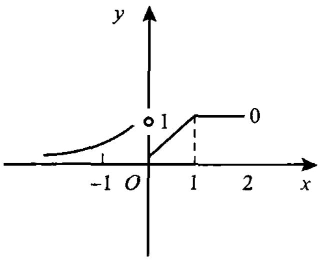

图 1-5

解：见图 1-5

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$；$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$

因为 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$，所以极限 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$，所以极限 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$。

21. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x<0 \\ k & x=0 \\ x\sin \dfrac{1}{x} + 1 & x>0 \end{cases}$　求：k 取何值时函数 $f(x)$ 在其定义域内连续？为什么？

解：$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$，　$\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x\sin \dfrac{1}{x} + 1 \right) = 1$

由连续定义知 $f(x)$ 在 $x<0$ 内连续，在 $x>0$ 内连续

又 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0) = k$ 时在其定义域内连续

22. 求下列函数的间断点

(1) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

解：在 $x=2$ 处无定义，故间断

(2) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

解：在 $x=1$，$x=2$ 处无定义，故间断

(3) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

解：在 $x=0$ 处无定义，故间断

(4) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

解：在 $x=-1$，$x=-2$ 处无定义，故间断

(5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$

解：$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x(x-1)}{x-1}=1=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x(x-1)}{x-1}$

但$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{x-1}=1\neq f(0)=0$，故间断

(6) $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x\geqslant 1\\ \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}, & x<1\end{cases}$

解：$\lim\limits_{x\to 1^+}(3x-1)=2\neq\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=1$

即函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处极限不存在，故间断

23. 验证方程 $x^4-x^2-1=0$ 在 (1，2) 内至少有一个实根。

证明：设 $f(x)=x^4-x^2-1$

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，显然在 $[1,2]$ 上连续，且

$f(1)=-1<0$，$f(2)=11>0$

由零值定理可知，在 (1，2) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$

即方程 $x^4-x^2-1=0$ 在 (1，2) 内至少有一个实根

24. 证明曲线 $y=x^4-3x^2+7x-10$ 在 (1，2) 内与 X 轴至少有一个交点。

证明：由于 $y=x^4-3x^2+7x-10$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，显然在 $[1,2]$ 上连续

$y(1)=-5<0$，$y(2)=8>0$

由零值定理可知，在 (1，2) 内至少存在一点 ξ，使 $y(\xi)=0$

即在 (1，2) 内与 X 轴至少有一个交点

第二章　导数与微分

1. 若质点作直线运动，已知路程 S 与时间 t 的关系是 $S=3t^2+2t+1$，计算从 $t=2$ 到 $t=2+\Delta t$ 之间的平均速度，并计算 $\Delta t=1$、$\Delta t=0$ 与 $\Delta t=0.01$ 的平均速度，再计算 $t=2$ 的瞬时速度。

解：因为 $S=3t^2+2t+1$

所以$S(2)=3\times2^2+2\times2+1=17$

$$\begin{aligned}S(2+\Delta t)&=3\times(2+\Delta t)^2+2\times(2+\Delta t)+1\\&=12+12\Delta t+3(\Delta t)^2+4+2\Delta t+1\\&=17+14\Delta t+3(\Delta t)^2\end{aligned}$$

$$\Delta S=S(2+\Delta t)-S(2)=14\Delta t+3(\Delta t)^2$$

于是平均速度 $\bar{v}=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=14+3\Delta t$

当 $\Delta t=1$ 时，$\bar{v}(1)=17$

当 $\Delta t=0$ 时，$\bar{v}(0)=14$

当 $\Delta t=0.01$ 时，$\bar{v}(0.01)=14.03$

由于瞬时速度 $v=S'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$

所以 $v(2)=S'(2)=\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{14\Delta t+3(\Delta t)^2}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0}(14+3\Delta t)=14$

2. 用导数定义求下列函数的导数

(1) $y=x^2+3x-1$

解：因为 $\Delta y=[(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)-1]-(x^2+3x-1)$

$$\begin{aligned}&=x^2+2x\Delta x+(\Delta t)^2+3x+3\Delta x-1-x^2-3x+1\\&=\Delta x(2x+\Delta x+3)\end{aligned}$$

所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=(2x+\Delta x+3)=2x+3$

(2) $y=ax+b$（a，b 为常数）

解：因为 $\Delta y=[a(x+\Delta x)+b]-(ax+b)=a\Delta x$

所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{a\Delta x}{\Delta x}=a$

(3) $y=\sqrt{x+1}$

解：因为 $\Delta y=\sqrt{(x+\Delta x)+1}-\sqrt{x+1}$

所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x+}-\sqrt{x+1}}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x+1)-(x+1)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x+}+\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

3. 求下列函数在指定点的导数

(1) $f(x)=\frac{1}{x}$，在 $x=1$，$x=-2$ 处

解：因为 $\Delta f=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

所以 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2}$

于是 $f'(1)=-1$，$f'(-2)=-\frac{1}{4}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\ln x & x\geqslant 1\\ x-1 & x<1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处

解：因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\ln x-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\ln x$

$$=\lim_{x\to 1^+}\ln x^{\frac{1}{x-1}}=\ln\lim_{x\to 1^+}[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}}$$

$$=\ln e=1$$

$\lim\limits_{x\to 1^-}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-1-0}{x-1}=1$

所以 $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$

于是 $f'(1)=1$

4. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处可导，且 $f(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

解：因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处可导，且 $f(0)=0$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

5. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\leqslant 1\\ 3x-1 & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处是否可导？

解：因为 $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{3x-1-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{3(x-1)}{x-1}=3$

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=2$

所以 $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

于是 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 不存在，即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导