初中几何证题能力培养

林益生 编

四川教育出版社

初中几何证题能力培养

林益生　编著

四 川 教 育 出 版 社

一九九一年·成都

初中几何证题能力培养　林益生　编著

四川教育出版社出版发行　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　成都前进印刷厂印刷

开本787×960毫米　1/32　印张　2.375　字数40千
1991年5月第一版　1991年5月第一次印刷
·印数：　1—4660　册

ISBN7—5408—1480—2/G·1431定价：0.87元

前　　言

不少同学在学习初中几何时，都感到上课听得懂，就是习题不会做。这个问题归结起来，属于解题能力还比较弱。应当怎样培养自己的解题能力呢？除了要认真学习几何的基本知识，还必须在学习这些基本知识的同时，注意学好基本的数学思想和方法。只有这样，遇到问题才能思考有路子，解题有方法。

下面将要介绍的内容，都是同学们学习时关心的几个问题，共分三部分，第一部分主要是介绍一些常用的证明思考方法；第二部分将谈谈怎样恰当地添出辅助线证题；第三部分是简要地谈谈应该怎样总结和积累证题的经验。

目　　录

一、怎样思考

对于初中几何题，怎样才能迅速、有效地找到解题的途径呢？当然，首先是要学好几何的基本概念和定理，但是，培养正确的思维习惯，掌握好常用的证题思考方法和基本技巧，同样是十分重要的。

在初中几何证题中，有哪些常用的证明思考方法呢？我们通过具体例子来介绍这个问题。

§1. 从一般到特殊的证明思考方法

所谓从一般到特殊的证明思考方法，是指在考察某一个具体问题的个性时，把一般原理和方法运用到这个具体问题中，从而发现解决这个具体问题的特殊方法。

例1： 已知如图1，在$\triangle ABC$中，$AB=BC=CA$，D是三角形内的任一点，$DE\perp AB$，$DG\perp BC$，$DF\perp CA$，E、F、G为垂足，AP为$\triangle ABC$的高线，求证：$DE+DF+DG=AP$。

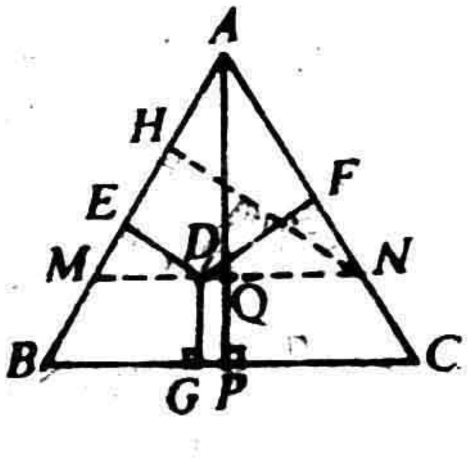

图 1

分析：等边三角形是

特殊的等腰三角形，我们过去已经知道等腰三角形有这样一个性质："等腰三角形底边上任一点与两腰的距离的和等于腰上的高"（《几何》一册P202）．显然，等边三角形也应具有这个性质，由此，可以过D作$MN // BC$进行尝试．

证明：过D作$MN // BC$，分别交AB、AC、AP于M、N、Q，又过N作$NH \perp AB$，交AB于H，则有$DG = QP$

利用等腰三角形上述性质，有

$DE + DF = NH$

又 $AQ = NH$，

$\therefore DE + DF + DG = AQ + QP = AP$

这里，我们把等腰三角形普遍具有的性质，用到了特殊的等边三角形之上，从而得到了此题的证明途径．

例2． 已知如图2，P是正三角形ABC外接圆$\overset{\frown}{BC}$（劣弧）上的任一点，求证：$AP = BP + PC$

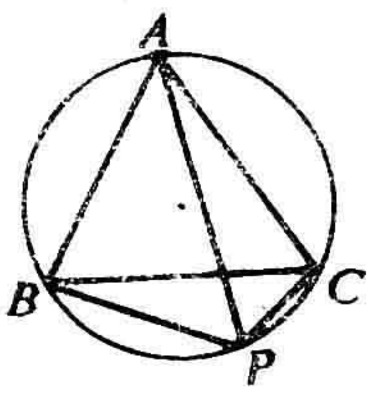

图 2

分析：要证明这个结论，困难之处在于PB、PC不在一条直线上，但是，回忆我们已经学过的知识和曾经做过的习题，我们曾经做过这样一个题："求证：在圆内接四边形$ABCD$中，$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$"（如图2—1）．这个习题就是著名的托勒密定理，联系到这个结论，我们不难发现，例2的问题，实际上是托勒密定理的特殊情况，

运用托勒密定理，这个问题便迎刃而解了。

证明：设此正三角形的边长为a应用，勒托密定理，有

$a \cdot PA = a \cdot PB + a \cdot PC$

即 $\quad PA = PB + PC$

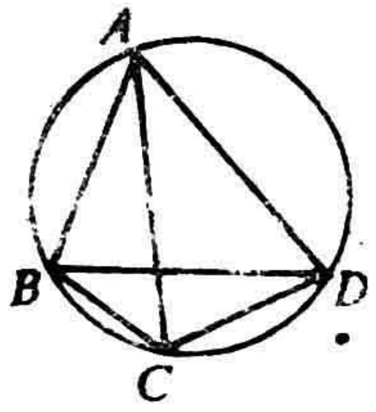

图2—1

（此题的证法很多，在后面还将谈及。）

这里，我们把圆内接四边形一般成立的结论，运用到特殊的圆内接四边形（这里是其中三个顶点成正三角形）上，从而找到了较简便的证法。

从上面两个例子可以看出，一般到特殊的证明思考方法，**就是把一般条件下成立的结论，运用到符合这个条件的特殊的、具体的问题之中，从而发现解决这个具体问题的途径**。运用这种方法证题，只要推理过程没有错误，就能保证在特殊情况下的结论一定正确。

§2. 分析法与综合法

在几何证明中，为了找到证明途径，根据证明思考时推理的方向的不同，证明思考方法分为分析法和综合法。

如果思考时推理的方向是从已知到求证，即是说是从已知到未知，是从条件入手的，这种证明思考方法就叫做**综合法**；反之，如果思考时推理的方向是从求证到已知，即是说是从未知到已知、是从结

论入手的，这种证明思考方法就叫做**分析法**。

例3：已知如图3，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，延长AB到D，使$BD=AB$，连结CD，E是AB的中点，求证：

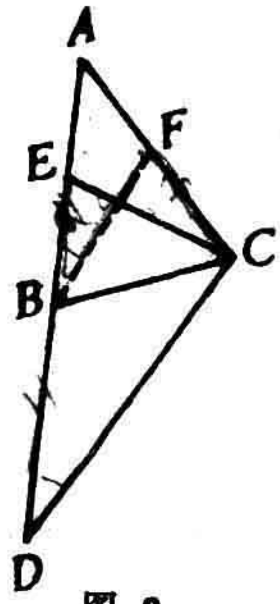

图 3

$CD=2CE$

证法1：（综合法）

$\because AB=BD$，

$\therefore B$是AD的中点。

作$\triangle ABC$的AC边上的中线BF，交AC于F，则BF是$\triangle ADC$的中位线

$\therefore CD=2BF$

又 $\because AB=AC$，由等腰三角形两腰上的中线相等，有

$BF=CE$　　$\therefore CD=2CE$

证法2：（分析法）要证$CD=2CE$，

因$AB=AC$，又由于等腰三角形两腰上的中线相等，作$\triangle ABC$的AC边上的中线BF，故只须证$CD=2BF$。

而$AB=BD$，故BF正好是$\triangle ADC$的中位线，于是结论成立。

从上面的例子可以看出，**综合法的特点是由因导果**。即是从“已知”找“可知”，这样一步步地找出“未知”，而**分析法的特点是拿着结果找原因**，一直到所需要的条件就是数学中的某个已知的定理、性质、公理或者正是题目的已知条件。综合法的表达形式简明扼要，给人以严谨完整的印象，

但运用综合法有时不容易找到证明的途径，而分析法的目的性强，思维过程比较自然，但正如上面例子那样，叙述时显得冗长。因此，在证明几何题时，我们往往用分析方法找出证明的途径，用综合法表达出证明的过程。

然而，这两种方法是不能截然分开的，在寻求证明途径的思维过程中，往往是两种方法交替使用的。事实上，当你拿到一道题时，总是既考虑从已知条件可以得出哪些结论，又考虑所要证的结论假若成立需要具有哪些条件。实际经验告诉我们，在寻求证明的途径时，把两者结合使用，成功的机会最多。象这样同时从已知及求证出发，经过推理找到证明的途径，这种证明思考方法就叫做**分析综合法**，又通俗地叫做“两头凑”的方法。

例 4： 已知如图4，在$\triangle ABC$中，$\angle B=\frac{1}{2}\angle C$，$AD\perp BC$于$D$，$M$是$BC$的中点，求证：$DM=\frac{1}{2}AC$

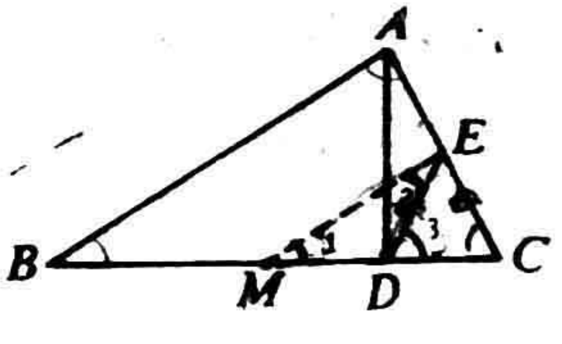

图 4

证明：(分析) 要证$DM=\frac{1}{2}AC$，

$\because AD\perp BC$，取AC的中点E，故$Rt\triangle ADC$斜边AC上的中线$DE=\frac{1}{2}AC$，为此，只须证$DM=DE$。连结ME，故只须证$\triangle DEM$是等腰三角形，即证$\angle 1=\angle 2$。

（综合）$\because ME$是$\triangle ABC$的中位线，

$\therefore ME /\!/ AB \qquad \therefore \angle 1 = \angle B$

而由已知$\angle B = \frac{1}{2}\angle C$，

$\therefore \angle C = 2\angle 1$

又 $\because DE = \frac{1}{2}AC = EC$，

$\therefore \angle C = \angle 3 \qquad \therefore \angle 3 = 2\angle 1$

又 $\because \angle 3$是$\triangle DME$的外角，

$\therefore \angle 3 = \angle 1 + \angle 2$，即$2\angle 1 = \angle 1 + \angle 2$，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$，故问题得证。

这里，前面运用了分析法，后面运用了综合法。从这个例子使我们感到，分析综合法有点近似代数中证明等式的一种方法：从等式的左、右两端同时进行变形运算，以期在中途“会师”。

例5： 已知如图5，$\triangle ABC$的中线BE、CD相交于P，且$BE = CD$，求证：$\triangle ABC$是等腰三角形。

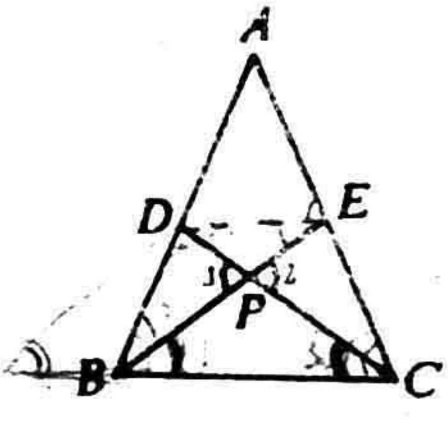

图 5

（分析）要证$\triangle ABC$是等腰三角形，只要证$AB = AC$，由已知条件可知，D、E分别是AB、AC的中点，故只须证$BD = CE$。因而，必须找出包含着这两段线段的两个全等三角形来，若考虑证$\triangle BDC \cong \triangle CEB$，显然条件不够，从图上看，有$\angle 1 = \angle 2$，我们就可以考虑证$\triangle BPD \cong \triangle CPE$，这样就只须证明$DP = EP$，$BP = CP$就行了。

（综合）$\because BE = CD$，且都是$\triangle ABC$的中线，

$\therefore P$是$\triangle ABC$的重心，故有

$$DP=EP=\frac{1}{3}BE,\ BP=CP=\frac{2}{3}BE$$

这正是前面部分从结论出发向前探索所需要的结果。因此，$\triangle ABC$是等腰三角形的结论获得证明。

在这个题目中，我们也是通过分析综合法来找到$AB=AC$的证明途径的。

当我们拿到一个稍复杂一点的几何题时，往往不是马上就能找到恰当的途径的，这时，就更需要用两头凑的方法去试探，这就是先用已知条件往前面推几步，看看条件与结论之间的关系是否明显了，若还看不出来，一般就不要硬着再向前推，灵活一点，先放一放，反过来再从结论入手，看看这个结论要是成立，需要些什么，所需要的东西，又是在什么条件下才具备的。交替进行这两方面的工作，并随时检查这两方面是否胜利“会师”，若不能会师，就需要检查一下是否遗漏了已知条件，或者推理有无错误。

§3. 从特殊到一般的证明思考方法

所谓从特殊到一般的证明思考方法，是根据对问题的特殊情况的证明，从而归纳出该问题在一般情况下的结论的数学方法，在初中几何中，常常要用到的是把所有特殊情况都一一列举出来并加以证明，从而归纳出一般情况下是正确的结论，这种证

明思考方法叫做**普通归纳法**。例如，同学们在学习圆周角度数定理时（弦切角度数定理也是这样），教科书上就是分为（1）圆心O在角的一边上；（2）O在角的内部；（3）O在角的外部这样三种情况，分别给以证明，最后从这三种不同的情况中抽出共同的结论：圆周角的度数等于它所对的弧的度数的一半。这种在研究了事物的一切特殊情况后得出共同性质基础上，作出一般性结论的方法，就是普通归纳法。

例6： 已知：过两圆的交点E、F，引直线AEB和CFD，分别与两圆交于A、B和C、D，求证：$AC /\!/ BD$

证明：本题有两种情况，如图

（1）AB与CD在圆内不相交，如图6

连结EF，则由E、B、D、F在$\odot O_1$上，有

$$\angle 1 + \angle B = 180°$$

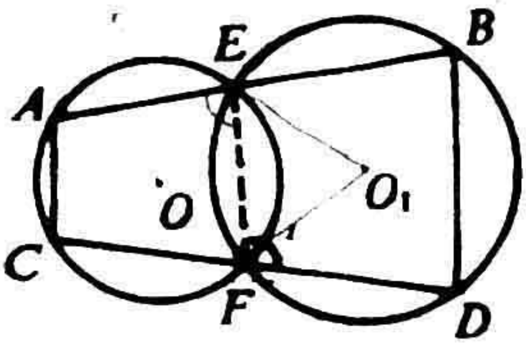

图 6

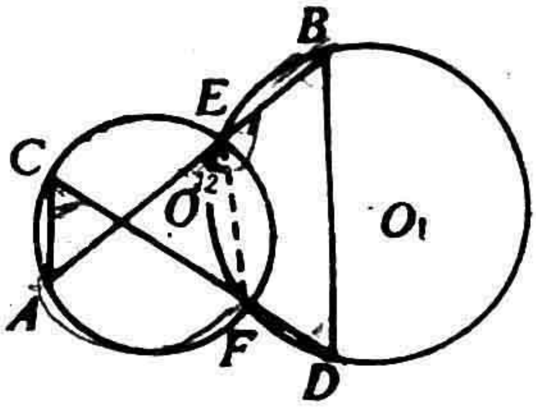

图6—1

由A、C、F、E在$\odot O$上，有

$$\angle 1 = \angle A$$

$$\therefore \angle B + \angle A = 180°, \quad \therefore AC /\!/ BD$$

（2）AB与CD在圆内相交，如图6—1

连结EF，则$\angle C = \angle 2$

又 $\because \angle 2=\angle D$，$\therefore \angle C=\angle D$

$\therefore AC /\!/ BD$

这里，第一种情况的证明依据是圆内接四边形对角互补和同旁内角互补则二直线平行。第二种情况的证明依据是圆内接四边形对角互补和内错角相等则二直线平行。它们各自的证明依据是不相同的。假若我们只就一种情况给出了证明，那么这个证明就不是完善的了。

在中学数学中，运用普通归纳法的地方也不少，例如用几何方法（不是坐标法）来证明余弦定理$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$、三角形的面积公式$S=\frac{1}{2}ab\sin C$时，就要分为C是锐角、直角、钝角这样三种情况一一给出证明，才能作出一般性的结论。普通归纳法可以训练我们考虑问题时养成全面、周密的习惯。

在什么情况下使用普通归纳法呢？当一个命题的题设的判断范围不止一种情况，而每一种情况证明的依据不完全相同时，就需要使用普通归纳法了。

有的同学或许会问：教科书上在证明“三角形三条角平分线交于一点”（《几何》一册，P143）时，为什么不分成三角形是钝角三角形、直角三角形、锐角三角形三种情况，分别给出证明后，再得出一般性的结论呢？这是因为，这个命题虽然有三种不同的情况，但是，无论哪种情况的证明依据却都是相同的，当然就可以只就一种情况给出证明就

行了．因此，使用普通归纳法值得注意的是，不仅在于情况不止一种，而且还在于每种情况的推证依据并不完全一样．

§4．从结论的反面去思考的证明方法

前面介绍的都是从结论的正面去思考的证明方法．如果正面不容易或者不能得到解答，就可以从结论的反面去思考来探求证明的途径，就可以去考察所求结论的对立面，或者假定所要证的结论不成立，看看能得到什么样的结果．在初中几何中，象这样通过否定结论进而导出矛盾的证明方法叫做**“反证法”**．

反证法对我们并不陌生，在我们刚开始学习几何时，反证法的思想方法就曾出现了，教科书上的许多定理、性质等，就是用反证法来进行说明或证明的．例如“两直线相交，只有一个交点”（《几何》一册，$P3$）、“如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行”（《几何》一册，$P51$）、“两条平行线被第三条直线所截，同位角相等”（《几何》一册$P55$），等等．反证法是一种重要而常用的数学方法，学好反证法，不仅对初中几何的学习，而且对今后的学习，尤其是对高中立体几何的学习，都是十分重要的．反证法的证题步骤是这样的：

（1）假定命题的结论不成立（即是假定结论的反面成立）；

（2）以这个假定和题设中的已知条件为前提进行一系列正确的推理；

（3）在推理过程中出现了下列情况中的一种①与已知条件矛盾；②与公理或已知定理矛盾；③与自己的假设矛盾或者自相矛盾；

（4）出现矛盾后断言，原来假定的“结论不成立”是错误的；

（5）肯定原来命题的结论成立。

因此，对反证法实质的认识，我们可以概括成八个字：**“否定结论，推出矛盾”**。

怎样来运用反证法呢？下面我们还是结合具体例子来看看这个问题。

例7： 已知如图7，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle APB\neq\angle APC$，求证：$PB\neq PC$。

分析：本题的已知条件较少，若从正面去考虑证明的途径就不太容易分析，有困难。而考虑用反证法，分析结论的对立面却方便可行。

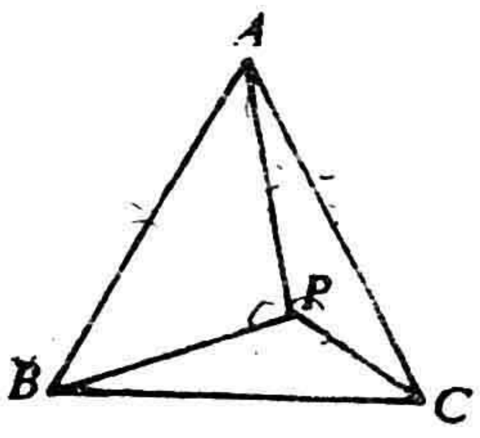

图 7

证明：假设$PB=PC$。

$\because AB=AC$，$AP=AP$，

$\therefore \triangle ABP\cong\triangle ACP$，$\therefore \angle APB=\angle APC$

这与已知条件中$\angle APB\neq\angle APC$相矛盾。

∴假设$PB=PC$不能成立，故$PB\neq PC$

例8： 已知$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$是$\triangle ABC$的三个内角，求证：$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$中至少有一个内角不小于60°.

证明：假设$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$都小于60°，即

$\angle A<60°$，$\angle B<60°$，$\angle C<60°$，则

$\angle A+\angle B+\angle C<180°$.

这与三角形三内角之和等于180°的定理相矛盾，因此，假设它们都小于60°是不能成立的.

∴$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$中至少有一个角不小于60°.

运用反证法证题，其**推理过程必须完全正确**，才能判断出现矛盾的原因是来自开始的假定“结论不能成立”．在使用反证法时，对命题的结论是什么，结论的反面又是什么，心中要十分清楚，譬如例8，所证结论本身“至少有一个内角不小于60°”的含意是“恰好有一个内角不小于60°”或者“恰好有两个内角不小于60°”或者“恰好有三个内角不小于60°”的意思，它的反面情形就是“没有一个内角不小于60°”，也就是“都小于60°”了.

如果结论的反面情况只有一个，象例7那样，则只须驳倒这个反面情况，或者说通过推理得出荒谬的结论，就可以断定命题是正确的，这样的反证法因此又叫做**归谬法**；如果命题结论的反面情况有几个，则证明过程必须把这几个反面情况逐一驳倒，才能断定结论是正确的，这样的反证法又叫做