

数学奥赛 辅导丛书

第二辑

从勾股定理谈起

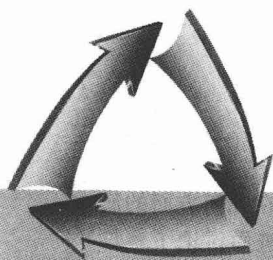
Cong Gougudingli Tanqi

第2版

盛立人 严镇军 编著



中国科学技术大学出版社



数学奥赛辅导丛书·第二辑

从勾股定理谈起

第2版

盛立人 严镇军 编著

· 中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书从读者熟知的勾股定理出发,讨论了它在几何方面的简单推广和应用,并且导出了著名的勾股数公式,进而讨论了单位圆周上的有理点、整边三角形以及由勾股定理引申出来的某些数论问题;然后又回到平面几何,详尽地讨论了一个有名的几何问题——平面图形的等组问题;最后简单地介绍了近代数学里著名的希尔伯特第三问题.

本书内容新颖,题材多样,特别注重数形结合,文字生动、浅显.书中还配有许多经过启发易于解决的难题,并附有解答概要.本书是一本中学生值得一读的课外读物

图书在版编目(CIP)数据

从勾股定理谈起/盛立人,严镇军编著.—2版.—合肥:中国科学技术大学出版社,2012.8

(数学奥赛辅导丛书·第二辑)

ISBN 978-7-312-03076-5

I. 从… II. ①盛…②严… III. 几何课—高中—教学参考资料 IV. G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 136588 号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路 96 号,230026

<http://press.ustc.edu.cn>

合肥学苑印务有限公司印刷

全国新华书店经销

*

开本:880 mm×1230 mm 1/32 印张:4 字数:73 千

1985 年 2 月第 1 版 2012 年 8 月第 2 版 2012 年 8 月第 2 次印刷

定价:11.00 元

再版前言

首先要感谢中国科学技术大学出版社眷顾我们这本无足轻重的小书，给以重版机会；在市场经济与科学书籍出版工作常常发生矛盾的今天，出版社重版这本书是需要勇气的。

这本小书初版至今已有 27 年，即便是后来刊印的台湾版本也已有十余个年头了。世事沧桑，这些年来无论是作者个人或是数学界都发生了许多事情。首先是本书的另一位合作者严镇军教授已于几年前去世，所以重版事宜只好由我一人操作。我因此也常常担心对重版工作会力不从心，因为作者们再也没有互相商量的机会了。

我原来设想让本书一字不改地重版，也算是对我们合作的一种纪念，但后来发现这行不通。因为这几十年来数学的发展，使原书有些内容已经落伍，甚至出现错误，不把这部分重写显然对读者是不够负责的。这方面的内容，例如有众所周知的 1995 年怀尔斯完成费马最后定理的证明、希尔伯特第三问题的新的成果，以及有关海伦三角形

的一些新问题,等等。我应当将这些内容写进去。即便这样做,也不能保证新版内容会一点不出错。实际上,这也正是撰写通俗书文的作者们最担心的事。

本书第1版曾作为《中学生文库》丛书中的一册,由上海教育出版社出版,当时在中教界引起过轰动。我还记得,受中国科学技术大学前副校长史济怀教授之托,我写过一篇介绍该丛书的小文章,真可谓“推波助澜”!所以我衷心希望这本书的再版会再一次在中学生中间产生新的冲击波,如同初版时那样。

盛立人

2012年4月

目 次

再版前言	(i)
引言	(001)
1 勾股定理及其历史	(002)
2 勾股定理的推广	(019)
3 勾股数	(033)
4 单位圆周上的有理点	(041)
5 海伦三角形	(048)
6 勾股数问题的推广	(061)
7 平面图形的拼剪问题	(074)
8 希尔伯特第三问题介绍	(089)
附录 引理 3 的严格证明	(104)
结束语	(107)
练习题解答概要	(108)

引 言

学过平面几何的人都知道一条古老的著名定理——勾股定理：在任一直角三角形中，两条直角边的平方和等于斜边的平方。这条定理不仅在几何学中是一颗光彩夺目的明珠^①，而且在高等数学和其他学科中用途极广。

本书我们将从勾股定理开始，介绍一些著名而有趣的数学问题，现在先从这条定理的历史讲起。

^①中世纪的著名数学家和天文学家开普勒(Kepler)曾说过，几何学有两大宝藏：一个是毕达哥拉斯(Pythagoras)定理(即勾股定理)；另一个是黄金分割。

1 勾股定理及其历史

我们知道,从勾股定理被发现至今已有五千多年的历史了,从历史上说,东方的几个文明古国都先后研究过这条定理.远在约公元前三千年的古巴比伦(现在伊拉克的一部分)人就知道和运用勾股定理,他们还知道许多勾股数组(如 3,4,5 等).传说古代埃及人在建筑宏伟的金字塔和尼罗河泛滥后测量土地时,也运用过勾股定理.例如,他们曾用结绳的方法,即通过在地面上划出边长为 3:4:5 的三角形来确定直角,这就是勾股定理的逆定理——若一三角形一边的平方等于另外两边的平方和,则此三角形为直角三角形——的特殊形式.

我国也是较早发现勾股定理的国家之一,据我国一部古老的算书《周髀算经》(大约是西汉时期——公元前一百多年的作品)记载,商高(约公元前 1120 年)答周公曰:“勾广三,股修四,径隅五.”这里勾是指直角三角形的两条直角边中较短者,股是指另一直角边,而径则是指斜边.因此,这句话的意思就是:在一个直角三角形中,若勾长为 3,股长为 4,则弦长必为 5,也就是人们常说的“勾三,股四,

弦五”.这当然是勾股定理的特殊情形.同一书还记载说,另一位中国学者陈子(公元前7—前6世纪)与荣方在讨论测量问题时说的一段话:“若求邪至日者,以日下为勾,日高为股,勾股各自乘,并以开方除之,得邪至日.”也就是说,把勾、股分别平方后相加,再开平方,即得弦长(图1).

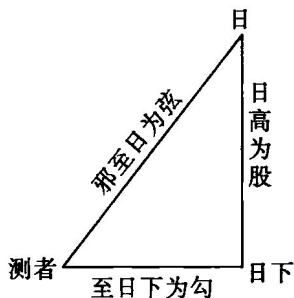


图1

显然,陈子已经突破了“勾三,股四,弦五”这一特殊形式,得到了直角三角形三边间的普遍关系.遗憾的是,我们至今尚不知道陈子对勾股定理是否给出了证明.此外,我国古书上还记载有夏禹(约公元前21世纪)治水时就已初步运用了勾股术的传说.

在欧洲,通常把这条定理称为毕达哥拉斯定理,以纪念约公元前6世纪的古希腊杰出的思想家和科学家毕达哥拉斯.史传当时的毕达哥拉斯学派,首先从理论上证明了勾股定理,他们把这一伟大成果归功于学派的代表毕达哥拉斯,并以他的名字命名.据说毕达哥拉斯为了表示感

激,曾对神供奉了一百头牛.对此,古代诗人夏米梭写了如下的十四行诗赞美:

是他,一位病弱的人,
最早认识了永存的真理.
毕达哥拉斯定理,
它亘古及今,代代相继.

感谢神灵的启示,
您奉献了丰盛的圣祭.
把一百头活生生的公牛,
赶进了圣光祥云之颠.

自真谛出现之日,
从此,
公牛不断地嘶叫.

嘶叫声无损真理的光明,
面对着毕氏的出现,
公牛只能闭目颤栗.

公牛的传说给勾股定理的发现蒙上了一层神秘的色彩.但是,从夏米梭的诗句的字里行间,我们还可以看到这条定理在当时人们(包括毕达哥拉斯本人)心目中的地位.这里还必须指出,这条定理的发现绝不是神灵的启示,也不是一种偶然的巧合,而是人类生产实践发展到一定程度的产物.

对勾股定理的证明,人们已创造了许许多多的证法.据说,国外有一本书,罗列的勾股定理的证法竟有 370 种之多,可见这条定理是多么地吸引着人们.毕达哥拉斯学派关于这条定理的证明已经失传,为了尊重历史,也为了引出我们感兴趣的问题,下面我们只叙述由另一位古希腊几何大师欧几里得(Euclid,约公元前 325—公元前 265)写在他的数学名著《几何原本》中的证明.它是现存的勾股定理的最早证明.欧几里得把勾股定理叙述成另一种形式:

对于任一直角三角形,以其三边为一边分别向外作正方形,则斜边上所作正方形面积,等于两直角边上所作正方形面积之和.

如图 2,设 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $ACED$, $AHIB$, $BGFC$ 分别是在其三边上所作的正方形,求证

$$S_{AHIB} = S_{BGFC} + S_{ACED}.$$

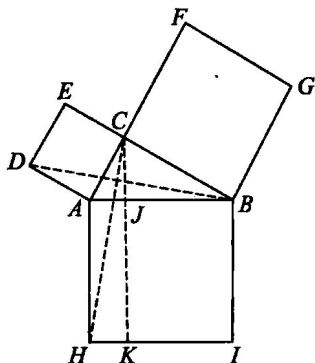


图 2

证明 作 $CJ \perp AB$, 并延长交 HI 于 K ,

$$S_{ACED} = AD^2 = AD \cdot DE = 2S_{ABD},$$

又 $\because AD = AC$,

$$AB = AH,$$

$$\angle DAB = \angle CAH,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AHC.$$

于是

$$S_{ACED} = 2S_{AHC} = AH \cdot AJ = S_{AHKI}.$$

同理可证

$$S_{BGFC} = S_{BIKI},$$

所以

$$S_{AHIB} = S_{AHKI} + S_{BIKI}$$

$$= S_{ACED} + S_{BGFC}.$$

定理证毕.

前面已经讲了,古埃及人曾利用结绳定出直角,其原理就是利用勾股定理的逆定理:若一三角形一边的平方等于另外两边的平方和,则此三角形必为直角三角形.

这条定理的证明方法极多,其最简单的证明,寥寥数字即可完成.设 $\triangle ABC$ 的三边为 a, b, c ,依题设条件 $c^2 = a^2 + b^2$,由余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

于是

$$2ab\cos C = 0,$$

$$\cos C = 0 \quad (0 < C < 180^\circ),$$

所以 $\angle C$ 是直角.

有人会怀疑,这个证明方法行吗? 是否有“循环论证”的弊病. 1979年的全国高考数学试题中,有一道题是证明勾股定理.当时有不少考生对这道题的证明都犯了循环论证的错误:有的直接用余弦定理;有的用了解析几何中两点距离公式;还有的用三角恒等式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.他们都忘记了余弦定理、距离公式及上述三角恒等式的证明和推导都是来自勾股定理.也就是说,使用了下面的推导顺序:

$$\text{勾股定理} \Rightarrow \begin{cases} \text{余弦定理} \\ \text{距离公式} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{勾股定理}.$$

这就出现了循环论证的错误.

但是,对于逆定理的上述证明方法,不存在循环论证的问题,这是因为逆定理和定理本身是两个彼此独立的命题,我们所依据的推导顺序是

$$\text{勾股定理} \Rightarrow \text{余弦定理} \Rightarrow \text{勾股逆定理}.$$

下面再讲一下欧几里得在《几何原本》中所给出的证明.

如图 3, 设 $\triangle ABC$ 的三边长满足关系

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

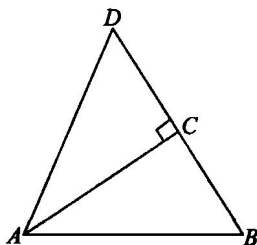


图 3

作 $CD \perp AC$ 且等于 BC . 连接 AD , $\triangle ACD$ 为直角三角形, 则

$$AC^2 + CD^2 = AD^2,$$

因而 $AB = AD$. 从而有

$$\triangle ABC \cong \triangle ADC,$$

进而有

$$\angle ACB = \angle ACD,$$

所以

$$\angle ACB \text{ 为直角.}$$

勾股定理及其逆定理同时成立,说明 $a^2 + b^2 = c^2$ 这个条件既是一个三角形为直角三角形的必要条件,也是它的充分条件.

勾股定理的特征是把三角形中有一个角是直角的几何性质和代数关系式

$$a^2 + b^2 = c^2$$

联系起来.这个代数式给出了直角三角形中三边长度的依赖关系.因而,对于一个直角三角形,如果给定其中任意两条边长,则第三边长由上式唯一确定.这样,勾股定理不仅在理论上有一定的意义,而且在许多实际计算中起着重要的作用.为了显示这一特点,这里先介绍由勾股定理推导出用已知三角形三边的长计算三角形面积的海伦公式.

如图4所示,已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c . CD 为 AB 边上的高.记 $h_c = CD, q_1 = AD, q = BD$.

由勾股定理得

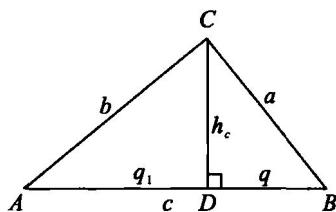


图 4

$$\begin{aligned}
 b^2 &= h_c^2 + q_1^2 \\
 &= a^2 - q^2 + q_1^2 \\
 &= a^2 - q^2 + (c - q)^2 \\
 &= a^2 + c^2 - 2cq,
 \end{aligned}$$

所以

$$q = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c},$$

或

$$q^2 = \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \right)^2.$$

上面是就高 CD 在三角形内的情形讨论的, 当 CD 在三角形外时(图 5), 同理可得

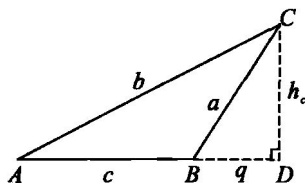


图 5

$$q = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2c},$$

$$q^2 = \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \right)^2,$$

于是

$$\begin{aligned} h_c^2 &= a^2 - q^2 \\ &= a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4c^2} [(2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2] \\ &= \frac{1}{4c^2} (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2) \\ &= \frac{1}{4c^2} (a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c). \end{aligned}$$

为使公式简便,习惯上令 $\triangle ABC$ 的半周长为 p ,即 $a + b + c = 2p$,因而

$$a + c - b = a + c + b - 2b = 2(p - b),$$

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2(p - c),$$

$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2(p - a).$$

由此得

$$h_c^2 = \frac{4}{c^2} p(p - a)(p - b)(p - c),$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

同理, a 边、 b 边上的高为