机械工业中等专业教育
机械制造专业系列教材

黄英娴 主编

（下册）

应用数学基础

东南大学出版社

机械工业中等专业教育机械制造专业系列教材

应用数学基础

（下 册）

黄英娴　邱顺大
张永仙　张绪绪　编
江儒根　主审

东南大学出版社

应用数学基础
（上、下册）
黄英娴　主编
*
东南大学出版社出版发行
（南京四牌楼2号　邮编210018）
溧阳印刷厂印刷
*
开本850×1168毫米 1/32 印张21 7/16 字数615千
1995年7月第1版　1995年7月第1次印刷
印数：1－7500册
ISBN 7－81050－039－2/O·4
定价：16.10元（上、下册）

责任编辑　徐步政

目　　录

（下册）

9 极限与连续

函数是高等数学研究的对象，极限是高等数学研究的基本方法和工具，与极限概念有着密切联系的是函数的连续性。本章将在复习和加深对函数认识的基础上描述极限的概念，然后介绍函数的连续性。

9.1 初等函数

9.1.1 基本初等函数

我们已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，这五种函数统称为基本初等函数。为了便于应用，将它们的定义域、值域、图象和主要性质列表 9-1。

9.1.2 复合函数

从物理学知道，单摆的振动周期 T 是摆长 l 的函数：

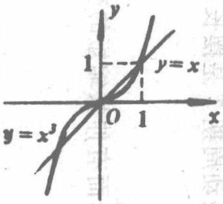
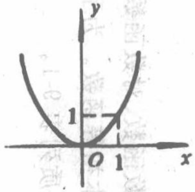
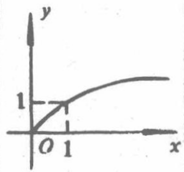
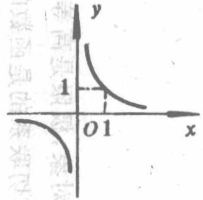
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}。 \tag{1}$$

由于摆长 l 随着温度 τ 的升降而有伸长缩短的变化，即摆长 l 是温度 τ 的函数：

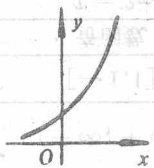
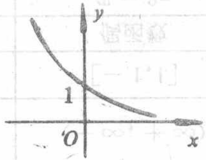
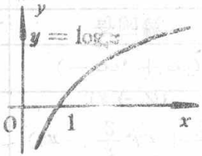
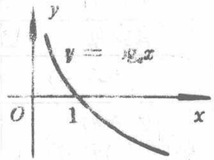
$$l = l_0(l + a\tau)。 \tag{2}$$

其中，l_0 是摆长在 0℃ 时的长度，a 是材料的膨胀系数。因此，要考察单摆周期 T 随温度 τ 而变化的规律，就要把式(2) 代入式(1)，得

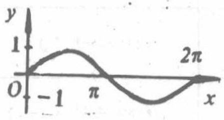
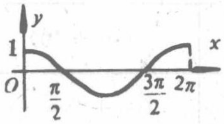
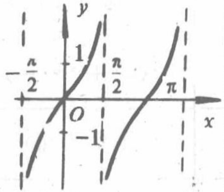
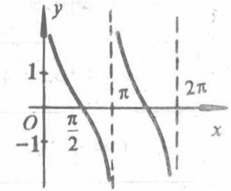
表 9-1

函数	幂 函 数 $y=x^{\mu}$			
	$\mu=1.3$	$\mu=2$	$\mu=\frac{1}{2}$	$\mu=-1$
图象				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值域	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	非奇非偶	奇函数
单调性	单调增加	在$(-\infty,0)$单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加	单调增加	单调减少

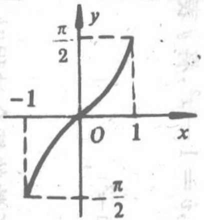
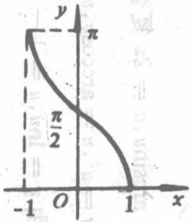
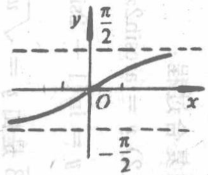
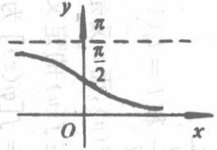
续表 9-1

函数	指数函数 $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$		对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$	
	$a > 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$	$0 < a < 1$
图象				
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
值域	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
单调性	单调增加	单调减少	单调增加	单调减少

续表 9-1

函数		$y=\sin x$（正弦函数）	$y=\cos x$（余弦函数）	$y=\mathrm{tg}x$（正切函数）	$y=\mathrm{ctg}x$（余切函数）
图象					
定义域		$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ $(k\in Z)$	$(k\pi,(k+1)\pi)$ $(k\in Z)$
值域		$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
奇偶性		奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
周期性		$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$
单调性	$(0,\frac{\pi}{2})$	单调增加	单调减少	单调增加	单调减少
	$(\frac{\pi}{2},\pi)$	单调减少	单调减少	单调增加	单调减少
	$(\pi,\frac{3\pi}{2})$	单调减少	单调增加	单调增加	单调减少
	$(\frac{3\pi}{2},2\pi)$	单调增加	单调增加	单调增加	单调减少

续表 9-1

函数	$y=\arcsin x$ （反正弦函数）	$y=\arccos x$ （反余弦函数）	$y=\mathrm{arctg}\,x$ （反正切函数）	$y=\mathrm{arcctg}\,x$ （反余切函数）
图象				
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
值域	$\boxed{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$	$[0,\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
单调性	单调增加	单调减少	单调增加	单调减少
$f(-x)$	$\arcsin(-x)$ $=-\arcsin x$	$\arccos(-x)$ $=\pi-\arccos x$	$\mathrm{arctg}(-x)$ $=-\mathrm{arctg}\,x$	$\mathrm{arcctg}(-x)$ $=\pi-\mathrm{arcctg}\,x$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0(1+\alpha\tau)}{g}}。$$

它可以看成是由函数 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 和 $l = l_0(1+\alpha\tau)$ 复合而成的。

定义 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全体或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么，y 通过 u 的联系也是 x 的函数，我们称 $y = f[\varphi(x)]$ 为由 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数，简称 x 的复合函数。其中 u 称为**中间变量**。

例 1 分析下列复合函数的复合过程：

(1) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$； (2) $y = \arcsin 2x$；

(3) $y = (\arccos\frac{1}{x})^2$； (4) $y = \ln(1 - 2\sin x)$。

解 (1) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ 是由 $y = \sqrt{u}$，$u = x^2 - 4x + 3$ 复合而成的；

(2) $y = \arcsin 2x$ 是由 $y = \arcsin u$，$u = 2x$ 复合而成；

(3) $y = (\arccos\frac{1}{x})^2$ 是由 $y = u^2$，$u = \arccos v$，$v = \frac{1}{x}$ 复合而成；

(4) $y = \ln(1 - 2\sin x)$ 是由 $y = \ln u$，$u = 1 - 2v$，$v = \sin x$ 复合而成的。

例 2 设 $y = e^u$，$u = 3\sin v$，$v = 1 - x^2$，将 y 表示成 x 的复合函数。

解 $y = e^u = e^{3\sin v} = e^{3\sin(1-x^2)}$，

即 $y = e^{3\sin(1-x^2)}$。

应当指出，分析一个复合函数的复合过程时，每个层次都应是基本初等函数或多项式。并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的。例如，$y = \arcsin u$ 及 $u = 2 + x^2$ 就不能复合成一个复合函数。因为 $u = 2 + x^2$ 的值域 $[2, +\infty)$ 及其任何一部分，都不能使 $y = \arcsin u$ 有意义。

9.1.3 初等函数

定义 由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成，并能用一个式子表示的函数称为**初等函数**，例如

$$y = 2x + \sqrt{x^3+2};\quad y = 2e^{\sin x} - \ln(2x+1);$$

$$y = \arcsin\frac{1}{2x};\quad y = \sqrt[3]{1+\mathrm{tg}x} + \cos 2x$$

等都是初等函数。

我们有时会遇到一个函数需要用两个或两个以上的式子来分段给出，这类函数称为**分段函数**。

例如，分段函数：

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0, \\ x+1, & x \geqslant 0。\end{cases}$$

它的定义域是$(-\infty, +\infty)$，当$x < 0$，$f(x) = -x^2$；当$x \geqslant 0$时，$f(x) = x+1$，其图象如图9-1。一般地，分段函数不是初等函数。特别地，如函数

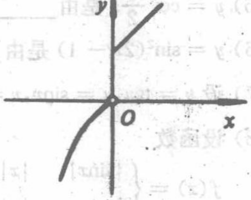


图 9-1

$$y = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0。\end{cases}$$

它是由$y = \sqrt{u}$，$u = x^2$复合而成的函数，实际上该函数是$y = |x|$，所以这个分段函数是一个初等函数。

习题 9-1

1. 判断题：

(1) 用解析式表示的函数，它的定义域是指这个解析式有意义的自变量一切取值的集合（ ）；

(2) 若$f(x) = x^3 - 2x + 1$，则$f(-x) = -f(x)$（ ）；

(3) 若$f(x) = \cos x + x^2$，则$f(-x) = f(x)$（ ）；

(4) 若 $\varphi(t) = 2\sin t - 3t^3$，则 $\varphi(t) = \varphi(-t)$（　）；

(5) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ 是偶函数，而 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 是奇函数（　）；

(6) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是非奇非偶函数（　）；

(7) 因为 $\sin\left(\frac{1}{2}x + 2\pi\right) = \sin\frac{1}{2}x$，所以 2π 是 $\sin\frac{1}{2}x$ 的一个周期（　）；

(8) 因为 $y = 2^x$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加，所以 $y = 2^{\frac{1}{x}}$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少（　）。

2. 填空题：

(1) 已知 $f(x) = 5x^2 - 6x + 3$，则 $f(x+1) =$ ________，$f(3x-1) =$ ________；

(2) 已知 $f(x+1) = 3(x+1)^2 - 5(x+1) - 1$，则 $f(x) =$ ________；

(3) $y = \sin 2x$ 的周期是________；

(4) $y = \cos^2 x$ 的周期是________；

(5) $y = \cos\frac{3}{2}x$ 是由________复合而成的复合函数；

(6) $y = \sin^2(2x-1)$ 是由________复合而成的复合函数；

(7) 设 $y = \operatorname{tg} u, u = \sin v, v = 2x - \frac{\pi}{3}$，则 x 的复合函数为________；

(8) 设函数

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

则 $f(1) =$ ______，$f\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ ______，$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$ ______，$f(2) =$ ______，$f(-2) =$ ______，$f(0) =$ ______，$f(3) =$ ______。

3. 选择题：

(1) 设 $f(x) = x^2, \varphi(x) = e^x$，则 $f[\varphi(x)]$ 等于（　）；

A　e^{x^2}　　B　e^{2x}　　C　$2x$　　D　2^x

(2) $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$，则 $f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ 等于（　　）；

A　0　　B　$\frac{1}{4}$　　C　$\frac{4x^2}{x^4-1}$　　D　$\frac{2(1+x^2)}{1-x^2}$

(3) 下列函数中为偶函数的是（　　）；

A　$y = x^{\frac{1}{2}}$　　B　$y = x^3$　　C　$y = x^2 - 2x$　　D　$y = x^{-2}$

(4) $y = \ln\sin 2x$ 的定义域是（　　）；

A $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{8}{3}\pi\right)$ B $\left(k\pi, k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

C $\left(\frac{k\pi}{2}, k\pi\right)$ D $\left(k\pi, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in z)$

(5) 已知下列五组函数：

① $y=3\log_3 x$ 与 $y=\mathrm{lo}_3 3^x$；

② $y=\frac{(x-2)(x-1)}{x-1}$ 与 $y=x-2$；

③ $y=(x^2)^{\frac{1}{2}}$ 与 $y=(x^3)^{\frac{1}{3}}$；

④ $y=\log_2(x+1)(x-2)$ 与 $y=\log_2(x+1)+\log_2(x-2)$；

⑤ $y=x$ 与 $y=\log_a a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$。

其中，表示同一个函数的组是（ ）；

A ①②③④⑤ B ②④⑤

C ④⑤ D ⑤

(6) 已知函数 $y=\sqrt{\cos(\sin x)}$，下列结论正确的是（ ）；

A 偶函数 B 奇函数；

C 值域是$[\sqrt{\cos 1},1]$ D 定义域是 $x\in R^+$

(7) 下面给出的函数中，哪一个函数既是区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的增函数，又是以 π 为周期的偶函数（ ）。

A $y=x^2+\sin 2x\ (x\in R)$ B $y=|\sin x|\ (x\in R)$

C $y=\cos 2x\ (x\in R)$ D $y=3^{\sin 2x}(x\in R)$

4. 指出下列函数是由哪些函数复合而成的：

(1) $y=e^{1+x^2}$； (2) $y=\lg|a\cos x+b|$；

(3) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}}$； (4) $y=\ln\sqrt[3]{1+x^2}$；

(5) $y=\sin^2(1-2x)$； (6) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$。

5. 分析函数 $y=\ln^2\cos x^2$ 的复合过程，并指出复合过程中的各中间变量。

6. 将下列各题中的 y 表示为 x 的函数，并求出定义域：

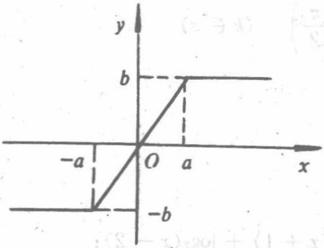
(1) $y=\sqrt{u}$, $u=3x-1$；

(2) $y=3^u$, $u=\sin x$；

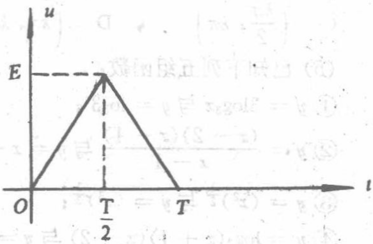
(3) $y=\arcsin u$, $u=\sqrt{v}$, $v=\frac{1}{2}-x^2$；

(4) $y=\ln u$, $u=3^v$, $v=\sin x$。

7. 写出如图所示的函数(图中 $a>0,b>0$) 的关系式。



题 7 图



题 8 图

8. 已知单三角脉冲电压，其波形如图所示，建立电压 U(V) 与时间 t(μs) 之间的函数关系式。

9.2　函数的极限

函数概念刻划了变量之间的互相制约关系，而极限概念着重刻划变量的变化趋势。极限是学习微积分的基础和工具。我们首先讨论数列的极限，然后再讨论一般函数的极限。

9.2.1　数列的极限

钳工师傅在用平锉锉出一个圆形工件时，先沿划线想象地粗锉成一个圆外切正多边形，再逐个地把角锉平，而得到一个边数多了一倍的圆外切正多边形。这样继续下去，边数越锉越多，边长越锉越短，工件外形就逐渐接近圆形。如果把这个过程无限地进行下去，就可以得到一个精确的圆形工件，如图 9-2。

如果将圆的外切正六边形、正十二边形、正二十四边形、…、正 3×2^n 边形的面积依次记为 A_1、A_2、A_3、…、A_n，那么就得到一系列圆的外切正多边形的面积，即数列 $\{A_n\}$：

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots。$$

显然，当序号 n 越大，A_n 越接近于圆面积 $A=\pi R^2$（R 为圆的半径）。当 n 无限大（记为 $n\to\infty$，读作 n 趋于无穷大）时，圆的外切正多边

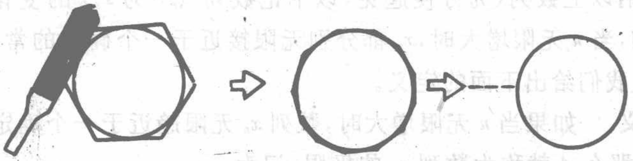


图 9-2

形的面积就无限地接近于圆面积 πR^2。我们称这样的常数 πR^2 为数列 $\{A_n\}$ 的极限。

再观察下面两个数列，当 n 无限增大时的变化趋势：

(1) $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$;

(2) $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots,(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\cdots$。

为了直观起见，我们把这两个数列的前 n 项分别在数轴上表示出来(图 9-3)。

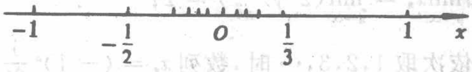


图 9-3

容易看出，当项数 n 无限增大时，表示数列(1) 的点逐渐密集在点 $x=1$ 的右侧，即数列$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$无限接近于 1；表示数列(2) 的点逐渐密集在点 $x=0$ 的左右近旁，即数列$\left\{(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}$无限接