

机械工业中等专业教育
机械制造专业系列教材

黄英娴 主编

(下册)

应用数学基础

东南大学出版社

机械工业中等专业教育机械制造专业系列教材

应用数学基础

(下 册)

黄英娴 邱顺大 编
张永仙 张绪绪
江儒根



东南大学出版社

应用数学基础

(上、下册)

黄英娴 主编

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼2号 邮编 210018)
溧阳印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 21 7/16 字数 615 千

1995 年 7 月第 1 版 1995 年 7 月第 1 次印刷

印数: 1—7500 册

ISBN 7-81050-039-2/O·4

定价: 16.10 元(上、下册)

(凡因印装质量问题,可直接向承印厂调换)

责任编辑 徐步政

目 录

(下册)

9. 极限与连续	(1)
9.1 初等函数	(1)
9.2 函数的极限	(10)
9.3 极限的运算	(18)
9.4 无穷小量与无穷大量	(26)
9.5 函数的连续性	(31)
复习题九	(39)
10. 导数与微分及其应用	(41)
10.1 导数的概念	(41)
10.2 求导法则和导数公式	(50)
10.3 二阶导数	(62)
10.4 函数的极值及其应用	(65)
10.5 函数图形的描绘	(76)
10.6 函数的微分	(83)
10.7 微分在近似计算中的应用	(90)
复习题十	(93)
11. 不定积分及其应用	(96)
11.1 不定积分的概念	(96)
11.2 换元积分法	(104)
11.3 分部积分法	(113)
11.4 简易积分表及其使用	(117)
11.5 不定积分的应用	(120)
复习题十一	(128)
12. 定积分及其应用	(131)
12.1 定积分的概念	(131)
12.2 定积分的计算	(141)

12.3	定积分的应用	(148)
12.4	无限区间上的广义积分	(159)
	复习题十二	(162)
13	概率初步	(165)
13.1	随机事件	(165)
13.2	事件间的相互关系	(168)
13.3	事件的概率	(173)
13.4	概率的加法公式	(178)
13.5	概率的乘法公式	(182)
13.6	事件的独立性	(187)
13.7	离散型随机变量及其分布列	(192)
13.8	连续型随机变量及其密度函数	(196)
13.9	正态分布	(203)
13.10	随机变量的数学期望	(208)
13.11	随机变量的方差	(214)
	复习题十三	(220)
14	行列式和矩阵初步	(223)
14.1	行列式	(223)
14.2	矩阵的概念及其运算	(237)
14.3	逆矩阵 矩阵的初等变换	(248)
14.4	线性方程组的矩阵解法	(253)
14.5	线性方程组的应用举例	(262)
	复习题十四	(267)
15	二阶常系数线性微分方程	(271)
15.1	二阶常系数线性齐次微分方程	(271)
15.2	二阶常系数线性非齐次微分方程	(278)
	复习题十五	(283)
16	无穷级数和拉氏变换	(285)
16.1	数项级数	(285)
16.2	傅里叶级数	(294)
16.3	周期为 $2l$ 的函数展开为傅氏级数	(303)
16.4	拉普拉斯变换	(307)

16.5 拉氏逆变换	(316)
复习题十六	(325)
附表 1 简易积分表	(328)
附表 2 标准正态分布表	(339)
下册习题答案	(341)

9 极限与连续

函数是高等数学研究的对象,极限是高等数学研究的基本方法和工具,与极限概念有着密切联系的是函数的连续性。本章将在复习和加深对函数认识的基础上描述极限的概念,然后介绍函数的连续性。

9.1 初等函数

9.1.1 基本初等函数

我们已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数,这五种函数统称为基本初等函数。为了便于应用,将它们的定义域、值域、图象和主要性质列表 9-1。

9.1.2 复合函数

从物理学知道,单摆的振动周期 T 是摆长 l 的函数:

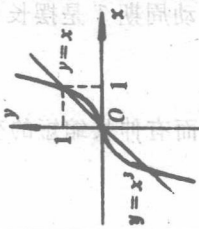
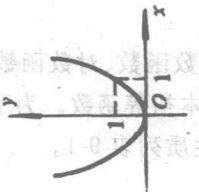
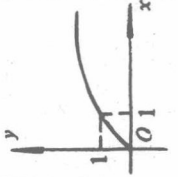
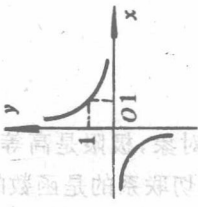
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1)$$

由于摆长 l 随着温度 τ 的升降而有伸长缩短的变化,即摆长 l 是温度 τ 的函数:

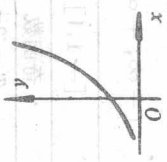
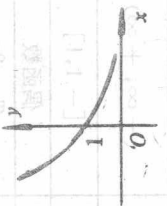
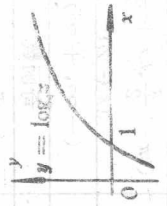
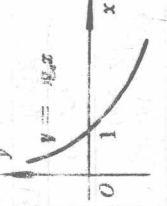
$$l = l_0(1 + \alpha\tau). \quad (2)$$

其中, l_0 是摆长在 0°C 时的长度, α 是材料的膨胀系数。因此,要考察单摆周期 T 随温度 τ 而变化的规律。就要把式(2)代入式(1),得

表 9-1

函数	幂函数 $y = x^\mu$			图 象	定义域	值域	奇偶性	单调性
	$\mu = 1, 3$	$\mu = 2$	$\mu = \frac{1}{2}$	$\mu = -1$				
					$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	奇函数	单调增加
					$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	非奇非偶	单调增加
					$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	奇函数	单调减少

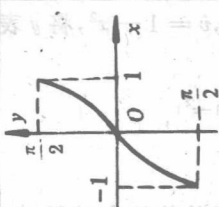
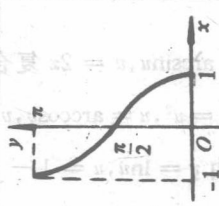
续表 9-1

函数	指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$		对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$	
	$a > 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$	$0 < a < 1$
图象				
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
值域	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
单调性	单调增加	单调减少	单调增加	单调减少

续表 9-1

函数	$y = \sin x$ (正弦函数)	$y = \cos x$ (余弦函数)	$y = \lg x$ (正切函数)	$y = \operatorname{ctg} x$ (余切函数)
图象				
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ $(k \in \mathbb{Z})$	$(k\pi, (k+1)\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
周期性	$T = 2\pi$	$T = 2\pi$	$T = \pi$	$T = \pi$
单调性	$(0, \frac{\pi}{2})$	单调增加	单调增加	单调减少
	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	单调减少	单调增加	单调减少
	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	单调减少	单调增加	单调减少
	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$	单调增加	单调增加	单调减少

续表 9-1

函数	$y = \arcsin x$ (反正弦函数)	$y = \arccos x$ (反余弦函数)	$y = \arctg x$ (反正切函数)	$y = \operatorname{arccot} x$ (反余切函数)
图象				
定义域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
值域	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[0, \pi]$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(0, \pi)$
单调性	单调增加	单调减少	单调增加	单调减少
$f(-x)$	$\arcsin(-x)$ $= -\arcsin x$	$\arccos(-x)$ $= \pi - \arccos x$	$\arctg(-x)$ $= -\arctg x$	$\operatorname{arccot}(-x)$ $= \pi - \operatorname{arccot} x$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0(1 + \alpha\tau)}{g}}.$$

它可以看成是由函数 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ 和 $l = l_0(1 + \alpha\tau)$ 复合而成的。

定义 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 且 $\varphi(x)$ 的函数值的全体或部分在 $f(u)$ 的定义域内, 那么, y 通过 u 的联系也是 x 的函数, 我们称 $y = f[\varphi(x)]$ 为由 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数, 简称 x 的复合函数。其中 u 称为中间变量。

例 1 分析下列复合函数的复合过程:

$$(1) y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}; \quad (2) y = \arcsin 2x;$$

$$(3) y = (\arccos \frac{1}{x})^2; \quad (4) y = \ln(1 - 2\sin x).$$

解 (1) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ 是由 $y = \sqrt{u}$, $u = x^2 - 4x + 3$ 复合而成的;

(2) $y = \arcsin 2x$ 是由 $y = \arcsin u$, $u = 2x$ 复合而成;

(3) $y = (\arccos \frac{1}{x})^2$ 是由 $y = u^2$, $u = \arccos v$, $v = \frac{1}{x}$ 复合而成;

(4) $y = \ln(1 - 2\sin x)$ 是由 $y = \ln u$, $u = 1 - 2v$, $v = \sin x$ 复合而成的。

例 2 设 $y = e^u$, $u = 3\sin v$, $v = 1 - x^2$, 将 y 表示成 x 的复合函数。

解 $y = e^u = e^{3\sin v} = e^{3\sin(1-x^2)},$
 即 $y = e^{3\sin(1-x^2)}.$

应当指出, 分析一个复合函数的复合过程时, 每个层次都应是基本初等函数或多项式。并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的。例如, $y = \arcsin u$ 及 $u = 2 + x^2$ 就不能复合成一个复合函数。因为 $u = 2 + x^2$ 的值域 $[2, +\infty)$ 及其任何一部分, 都不能使 $y = \arcsin u$ 有意义。

9.1.3 初等函数

定义 由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成,并能用一个式子表示的函数称为初等函数,例如

$$y = 2x + \sqrt{x^3 + 2}; \quad y = 2e^{\sin x} - \ln(2x + 1);$$

$$y = \arcsin \frac{1}{2x}; \quad y = \sqrt[3]{1 + \lg x} + \cos 2x$$

等都是初等函数。

我们有时会遇到一个函数需要用两个或两个以上的式子来分段给出,这类函数称为分段函数。

例如,分段函数:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0, \\ x + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$,当 x

< 0 , $f(x) = -x^2$; 当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$

$= x + 1$, 其图象如图 9-1。一般地,

分段函数不是初等函数。特别地,

如函数

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

它是由 $y = \sqrt{u}$, $u = x^2$ 复合而成

的函数,实际上该函数是 $y = |x|$, 所以这个分段函数是一个初等函数。

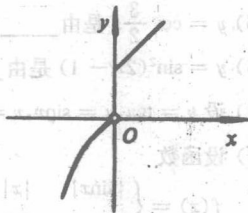


图 9-1

习题 9-1

1. 判断题:

(1) 用解析式表示的函数,它的定义域是指这个解析式有意义的自变量一切取值的集合();

(2) 若 $f(x) = x^2 - 2x + 1$, 则 $f(-x) = -f(x)$ ();

(3) 若 $f(x) = \cos x + x^2$, 则 $f(-x) = f(x)$ ();

(4) 若 $\varphi(t) = 2\sin t - 3t^3$, 则 $\varphi(t) = \varphi(-t)$ ();

(5) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ 是偶函数, 而 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 是奇函数 ();

(6) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是非奇非偶函数 ();

(7) 因为 $\sin\left(\frac{1}{2}x + 2\pi\right) = \sin \frac{1}{2}x$, 所以 2π 是 $\sin \frac{1}{2}x$ 的一个周期 ();

(8) 因为 $y = 2^x$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 所以 $y = 2^{\frac{1}{x}}$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少 ().

2. 填空题:

(1) 已知 $f(x) = 5x^2 - 6x + 3$, 则 $f(x+1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(3x-1) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 已知 $f(x+1) = 3(x+1)^2 - 5(x+1) - 1$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) $y = \sin 2x$ 的周期是 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(4) $y = \cos^2 x$ 的周期是 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(5) $y = \cos \frac{3}{2}x$ 是由 $\underline{\hspace{2cm}}$ 复合而成的复合函数;

(6) $y = \sin^2(2x-1)$ 是由 $\underline{\hspace{2cm}}$ 复合而成的复合函数;

(7) 设 $y = \operatorname{tg} u$, $u = \sin v$, $v = 2x - \frac{\pi}{3}$, 则 x 的复合函数为 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(8) 设函数

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

则 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$,
 $f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 选择题:

(1) 设 $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = e^x$, 则 $f[\varphi(x)]$ 等于 ();

A e^{x^2} B e^{2x} C $2x$ D 2^x

(2) $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$, 则 $f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ 等于 ();

A 0 B $\frac{1}{4}$ C $\frac{4x^2}{x^4-1}$ D $\frac{2(1+x^2)}{1-x^2}$

(3) 下列函数中为偶函数的是 ();

A $y = x^{\frac{1}{2}}$ B $y = x^3$ C $y = x^2 - 2x$ D $y = x^{-2}$

(4) $y = \ln \sin 2x$ 的定义域是 ();

- A $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{8}{3}\pi\right)$ B $\left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{6}\right)$
 C $\left(\frac{k\pi}{2}, k\pi\right)$ D $\left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$

(5) 已知下列五组函数:

- ① $y = 3\log_3 x$ 与 $y = \log_3 3^x$;
 ② $y = \frac{(x-2)(x-1)}{x-1}$ 与 $y = x-2$;
 ③ $y = (x^2)^{\frac{1}{2}}$ 与 $y = (x^{\frac{1}{2}})^2$;
 ④ $y = \log_2(x+1)(x-2)$ 与 $y = \log_2(x+1) + \log_2(x-2)$;
 ⑤ $y = x$ 与 $y = \log_a a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 。

其中,表示同一个函数的组是();

- A ①②③④⑤ B ②④⑤
 C ④⑤ D ⑤

(6) 已知函数 $y = \sqrt{\cos(\sin x)}$, 下列结论正确的是();

- A 偶函数 B 奇函数;
 C 值域是 $[\sqrt{\cos 1}, 1]$ D 定义域是 $x \in \mathbb{R}^+$

(7) 下面给出的函数中,哪一个函数既是区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的增函数,又是以 π 为周期的偶函数()。

- A $y = x^2 + \sin 2x (x \in \mathbb{R})$ B $y = |\sin x| (x \in \mathbb{R})$
 C $y = \cos 2x (x \in \mathbb{R})$ D $y = 3^{\sin 2x} (x \in \mathbb{R})$

4. 指出下列函数是由哪些函数复合而成的:

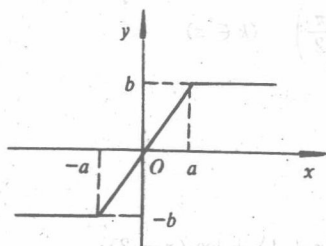
- (1) $y = e^{1+x^2}$; (2) $y = \lg |a \cos x + b|$;
 (3) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{a}}$; (4) $y = \ln \sqrt[3]{1+x^2}$;
 (5) $y = \sin^2(1-2x)$; (6) $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$ 。

5. 分析函数 $y = \ln^2 \cos x^2$ 的复合过程,并指出复合过程中的各中间变量。

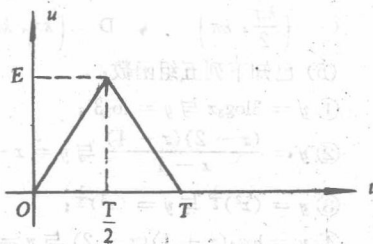
6. 将下列各题中的 y 表示为 x 的函数,并求出定义域:

- (1) $y = \sqrt{u}, u = 3x-1$;
 (2) $y = 3^u, u = \sin x$;
 (3) $y = \arcsin u, u = \sqrt{v}, v = \frac{1}{2} - x^2$;
 (4) $y = \ln u, u = 3^v, v = \sin x$ 。

7. 写出如图所示的函数(图中 $a > 0, b > 0$) 的关系式。



题 7 图



题 8 图

8. 已知单三角脉冲电压,其波形如图所示,建立电压 $U(V)$ 与时间 $t(\mu s)$ 之间的函数关系式。

9.2 函数的极限

函数概念刻划了变量之间的互相制约关系,而极限概念着重刻划变量的变化趋势。极限是学习微积分的基础和工具。我们首先讨论数列的极限,然后再讨论一般函数的极限。

9.2.1 数列的极限

钳工师傅在用平锉锉出一个圆形工件时,先沿划线想象地粗锉成一个圆外切正多边形,再逐个地把角锉平,而得到一个边数多了一倍的圆外切正多边形。这样继续下去,边数越锉越多,边长越锉越短,工件外形就逐渐接近圆形。如果把这个过程无限地进行下去,就可以得到一个精确的圆形工件,如图 9-2。

如果将圆的外切正六边形、正十二边形、正二十四边形、 $\cdots$ 、正 3×2^n 边形的面积依次记为 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$,那么就得到一系列圆的外切正多边形的面积,即数列 $\{A_n\}$:

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$$

显然,当序号 n 越大, A_n 越接近于圆面积 $A = \pi R^2$ (R 为圆的半径)。当 n 无限大(记为 $n \rightarrow \infty$, 读作 n 趋于无穷大)时,圆的外切正多边形



图 9-2

形的面积就无限地接近于圆面积 πR^2 。我们称这样的常数 πR^2 为数列 $\{A_n\}$ 的极限。

再观察下面两个数列,当 n 无限增大时的变化趋势:

(1) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$;

(2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \dots$ 。

为了直观起见,我们把这两个数列的前 n 项分别在数轴上表示出来(图 9-3)。

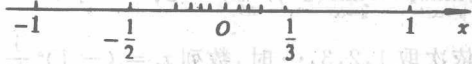


图 9-3

容易看出,当项数 n 无限增大时,表示数列(1)的点逐渐密集在点 $x = 1$ 的右侧,即数列 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 无限接近于 1;表示数列(2)的点逐渐密集在点 $x = 0$ 的左右近旁,即数列 $\left\{(-1)^{n-1} \frac{1}{n}\right\}$ 无限接