$$\log_7 \frac{1}{3} > \log_8 \frac{1}{3} ?$$

数学题误解分析

（高中）

杨浩清 主编

东 南 大 学 出 版 社

数学题误解分析

（高　中）

主　编　杨浩清

副主编　郭长风　陆月明

　　　　王正林　周敏泽

编　写　王刻铭　王惠琴

　　　　范咏南　徐淮源

　　　　嵇国平　尤菊兰

　　　　孙福明

东南大学出版社

内 容 提 要

本书由江苏省常州高级中学数学教研组根据多年教学积累的经验和资料，遵循高中数学教学大纲和考试大纲的精神，按照现行高中数学课本的知识体系，将代数、三角、立体几何、解析几何中容易做错的题目精选出 442 题，逐题进行剖析，每个题目均设五个栏目，即[题目]、[误解]、[正确解答]、[错因分析与解题指导]、[练习题]，突出了内容的同步性、典型性、广泛性、指导性、资料性。

读者对象：高中各年级师生、师范院校师生和广大数学爱好者。

责任编辑：朱经邦
责任校对：戴坚敏　刘娟娟

数学题误解分析
（高　中）
杨浩清　主编
*
东南大学出版社出版发行
（南京四牌楼 2 号　邮编 210096）
新华书店经销　　武进第二印刷厂印刷
*
开本：850×1168 毫米 1/32　印张：23.75　字数：638 千
1996 年 11 月第 1 版　1997 年 4 月第 2 次印刷
印数：4001—10000 册

ISBN 7—81050—167—4/G・8
定价：25.00 元

谨以本书向我校建校90周年献礼

前言

由我校数学教研组编写的《数学题误解分析》(高中部分)现已正式出版，它积累了我们这所有90年历史的江南名校数学教学的经验，这无疑是广大高中学生和从事高中数学教学的教师的一本极有使用、收集价值的资料，对于完成高中阶段数学教学任务，以优异的会考和高考成绩向祖国汇报具有更强的现实意义。

学习数学必然要解一定数量的题目，而在解题中不可避免地会产生这样那样的错误。因此，找出解题错误所在，分析产生错误的原因，研究改正方法，从中吸取有益教训，应是学好数学，提高分析问题和解决问题能力的有效途径。本书遵循高中数学教学大纲和考试大纲的精神，根据现行高中数学课本的知识顺序，按代数、几何两条线，从课本习题、复习题、历年高考试题、常见常用各类补充题、著名重点高中各类测试题中，精选典型数学题，逐题进行编写。每个题目均由五个栏目组成，即[题目]、[误解]、[正确解答]、[错因分析与解题指导]、[练习题]。从选题到五个栏目的编写，注意突出内容的同步性、典型性、广泛性、指导性、资料性。本书适用于高中各年级的数学学习和教学，堪称为学习高中数学，进行高中数学教学的良师益友。

恳盼使用本书的师生赐教，不胜感激。

丁浩生

(江苏省常州高级中学校长)

1996.7.1

目 录

第一部分 代 数

第二部分 立体几何

第三部分 解析几何

第一部分　代　数

第一章　集合与函数

【题1】 设 $M=\{x|x\leqslant 2\sqrt{3}\}$，$a=\sqrt{11}$，则下列关系中正确的是(　　)

(A) $a\subset M$；　(B) $a\notin M$；　(C) $\{a\}\in M$；　(D) $\{a\}\subset M$。

[误解一]　选(A)。

[误解二]　选(C)。

[正确解答]　选(D)。

[错因分析与解题指导]　$a=\sqrt{11}$ 是集合 $M=\{x|x\leqslant 2\sqrt{3}\}=\{x|x\leqslant\sqrt{12}\}$ 的元素，用符号表示为 $a\in M$。集合 $\{a\}$ 即 $\{\sqrt{11}\}$ 是集合 M 的真子集，用符号表示为 $\{a\}\subset M$。[误解一、二]混淆了符号"$\in$"与"$\subset$"，造成错误。符号"$\in$"表示元素与集合间的"属于"关系；而符号"$\subset$"表示集合与集合间的"真包含于"关系。

[练习题]

1. 以下六道题的写法中，哪些是正确的？哪些是不正确的？并说明理由：

① $\{0\}\in\{0,1,2\}$；　　② $\varnothing\in\{0\}$；

③ $\{0,1,2\}\subseteq\{0,1,2\}$；　　④ $0\notin\varnothing$；

⑤ $0\cap\varnothing=\varnothing$；　　⑥ $R=\{$实数集$\}$。

2. 选用适当的符号填空($\in,\notin,\subseteq,\subset,\supset,\supseteq,=$)：

① $\{-2\}$____$\{$偶数$\}$；　② 1____$\{$质数$\}$；

③ $\{1,2,3\}$____$\{3,2,1\}$；　④ $(1+\sqrt{6})$____$\{x|x<\sqrt{2}+\sqrt{5}\}$；

⑤ $\{0\}$____$\varnothing$；　　⑥ $\{(x,y)|y=x\}$____$\{(x,y)|\frac{y-1}{x-1}=1\}$。

【题 2】 以自然数为元素的集合 S，满足命题"若 $x\in S$，则 $8-x\in S$"。写出所有元素个数(1)为 1，(2)为 2 的集合 S。

[误解] (1) $S=\{4\}$

(2) $\because x\in N$　　$\therefore x\geqslant 1$

又　$8-x\in S\subseteq N$　$\therefore 8-x\geqslant 1$，　$x\leqslant 7$

$\therefore$　$x\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$

从中任取两个数组成 S，得 S 共有 21 个。

[正确解答]

(1) 当 S 只有 1 个元素时，设 $S=\{x\}$

$\because$　$x\in S$ 时 $8-x\in S$　　$\therefore$　$8-x=x$　得 $x=4$

$\therefore$　元素个数为 1 的集合 S 只有一个，$S=\{4\}$；

(2) 当 S 的元素个数为 2 时，设 $S=\{x_1,x_2\}(x_1\neq x_2)$

$\because$　$x_1\in S$ 时，　$8-x_1\in S$

$\therefore$　$8-x_1=x_2$　则 $x_1+x_2=8$　且 $x_1,x_2\in N$

$\therefore$　元素个数为 2 的集合 S 共有 3 个，它们是$\{1,7\}$，$\{2,6\}$，$\{3,5\}$。

[错因分析与解题指导] 误解把元素个数为 2 的集合 S，当作从 $1,2,\cdots,7$ 中任取两个就可组成 S，又错把求 S 当作求 S 的个数。

设二元集 $S=\{x_1,x_2\}$，根据题意 S 中的元素应满足"若 $x\in S$，则 $8-x\in S$"，得出 x_1,x_2 应满足"$x_1+x_2=8$ 且 $x_1,x_2\in N$"，然后用列举法写出 S。

有兴趣的同学可进一步思考：满足题设条件的 S 一共有多少个？S 中最多有几个元素？

[练习题]

3. 用列举法表示集合 $A=\{(x,y)|x+y=4,\ x,y\in N\}$。

4. 若 $A\subseteq N$，当 $x\in A$ 时，$4-x\in A$。用列举法写出所有的集合 A。

【题 3】 设集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0\}$，$B=\{x|x^2+2x+a=0\}$。当 A 为单元素集合时，用列举法分别表示集合 A 和 B。

［误解］ 当 A 为单元素集合时，$a=0$，此时

$$A=\{x|2x+1=0\}=\{-\frac{1}{2}\}$$

$$B=\{x|x^2+2x=0\}=\{0,-2\}。$$

［正确解答］ 当 A 为单元素集合时，等价于方程 $ax^2+2x+1=0$ 仅有一个根或有两个相等的根。因此得

①当 $a=0$ 时，$A=\{x|2x+1=0\}=\{-\frac{1}{2}\}$

$$B=\{x|x^2+2x=0\}=\{0,-2\}$$

②当 $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=4-4a=0 \end{cases}$ 即 $a=1$ 时，

$$A=B=\{x|x^2+2x+1=0\}=\{-1\}。$$

［错因分析与解题指导］ 误解在考察 A 为单元素集合时，只考虑到 $a=0$ 时，方程 $ax^2+2x+1=0$ 退化为一元一次方程，因此其解集为单元素集，而忽视了 $a\neq 0$ 时，一元二次方程 $ax^2+2x+1=0$有两个相等的根时，根据集合元素的互异性要求，也视为单元素集，所以误解。

［练习题］

5. 求二元数集$\{2a,a^2-a\}$中，实数 a 的取值范围。

6. 设集合 $A=\{x|2x^2-3x+1=0\}$，$B=\{x|ax^2-2x+1=0\}$。若 $A\cap B=B$，求 a 的取值范围。

【题 4】 设集合 $A=\{x|x^2+(b+2)x+b+1=0，b\in R\}$，求 A 中所有元素的和。

［误解一］ 由韦达定理，得方程 $x^2+(b+2)x+b+1=0$ 的两根之和为

$$x_1+x_2=-(b+2)$$

∴ A 中所有元素的和为$-(b+2)$。

［误解二］ $x^2+(b+2)x+b+1=0$

$(x+1)(x+b+1)=0$ ∴ $x_1=-1$， $x_2=-(b+1)$

∵ $b\in R$ ∴ $A=R$

∴ A 中所有元素之和为 0。

［正确解法］ 方程 $x^2+(b+2)x+b+1=0$ 的根的判别式

$$\Delta=(b+2)^2-4(b+1)=b^2\geqslant 0$$

当 $b=0$ 时，$A=\{-1\}$，元素和 $S=-1$

当 $b\neq 0$ 时，$A=\{x_1,x_2\}$，元素和 $S=-(b+2)$

综上得，A 中所有元素和

$$S=\begin{cases}-1 & (b=0\text{ 时}) \\ -(b+2) & (b\neq 0\text{ 时})。\end{cases}$$

［错因分析与解题指导］ 本题用集合形式来表示一元二次方程的解集。［误解一］中把题意理解为“求一元二次方程的两根和”，因此由韦达定理得出结果为 $-(b+2)$，忽略了一元二次方程有相等的两个根时，根据集合元素的互异性，仅表示为一元集，即 $b=0$ 时，$A=\{-1\}$ 而不是 $\{-1,-1\}$，因此，$b=0$ 时 A 中元素的和并不等于方程的两根之和，也就不能用 $-(b+2)$ 且 $b=0$ 来表示。

在用集合符号来表示我们已经学过的一些数学内容时，除了接受它们之间的相通的、统一的地方，更要注意集合的概念与我们习惯的区别。例如，用集合来表示一元二次方程的实数根时，应全面理解为

$$A=\{x\,|\,ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,\ x\in R\}$$

$$=\begin{cases}\left\{\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\ \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\} & (\Delta=b^2-4ac>0\text{ 时}) \quad (\text{二元集}) \\ \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\} & (\Delta=0\text{ 时}) \quad (\text{一元集}) \\ \varnothing & (\Delta<0\text{ 时}) \quad (\text{空集})\end{cases}$$

［误解二］ 求出方程的根 $x_1=-1$，$x_2=-(b+1)$ 后，把题中参变数 $b\in R$ 时 $x_2=-(b+1)$ 的值域为一切实数，错误地扩大为

$A=R$，再进一步得出“A 中元素和为 0”的错误结论。由于概念混乱，不自觉地一再偷换概念，造成了这种错误解法。

就本题而言，“$b\neq 0$ 且 $b\in R$ 时，A 中元素和 $S=-(b+2)$”，表示对于每一个满足 $b\neq 0$ 且 $b\in R$ 的 b 值，元素和对应地等于 $-(b+2)$。

[练习题]

7. 设集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0, a\leqslant 1\}$，求 A 中各元素的和 S。

8. 设集合 $A=\{x|(m+1)x^2-(m+2)x+1=0, m\in R\}$，求 A 中各元素的和。

【题 5】 下列每一组两个集合，哪几组是相等的集合？

(1) $A=\{x|x=\sin\alpha, \alpha\in R\}$，$B=\{y|y=\cos\alpha, \alpha\in R\}$；

(2) $A=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$，$B=\{$单位圆$\}$；

(3) $A=\{x|x=2k, k\in Z\}$，$B=\{y|y=2(n+1), n\in Z\}$；

(4) $A=\left\{x\left|\dfrac{x-1}{x-2}\geqslant 0\right.\right\}$，$B=\{x|(x-1)(x-2)\geqslant 0\}$。

[误解] (1) $A\neq B$；(2) $A=B$；(3) $A\neq B$；(4) $A=B$。

[正确解答]

(1) $A=B$；(2) $A\neq B$；(3) $A=B$；(4) $A\neq B$。

[错因分析与解题指导]

(1) 误解认为两集合元素不同，把不同函数与不同元素混为一谈。实质上 A、B 分别表示正弦函数与余弦函数的值域，$\therefore A=B=[-1,1]$。

(2) 误解混淆了单位圆与单位圆上的点满足的方程为相同集合。其实，A 是点集，是由单位圆 $x^2+y^2=1$ 上的所有点组成的无限集，B 的元素是单位圆，它是单元素集。

(3) 将 Z 误认为 N，推出 $A=\{2,4,6,8,\cdots\}$，$B=\{4,6,8,10,\cdots\}$。其实，A、B 都表示偶数集。

(4) $A=\{x|x\leqslant 1$ 或 $x>2\}$，$B=\{x|x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 2\}$，因此有 $2\notin A$，但 $2\in B$，$\therefore A\neq B$。

[练习题]

9. 下列每一组两个集合，哪几组是相等的集合？

(1) $A=N$，$B=\{$大于 2 或小于 3 的正整数$\}$；

(2) $A=\{x|\frac{3}{1-x}\in Z, x\in Z\}$，$B=\{x|x=2k, -1\leqslant k\leqslant 2, k\in Z\}$；

(3) $A=\{(x,y)|y=x+2\}$，$B=\{(x,y)\left|\frac{y-3}{x-1}=1\right.\}$；

(4) $A=\{x|x=a^2+1, a\in R\}$，$B=\{y|y=b^2-4b+5, b\in R\}$。

10. 数集 $M=\{2k-1, k\in Z\}$，$N=\{4k\pm 1, k\in Z\}$之间的关系是（　　）

(A) $M\subset N$　(B) $M\supset N$　(C) $M\cap N=\varnothing$　(D) $M=N$

【题 6】 已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$。若 $A=B$，求$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{1995}+\frac{1}{y^{1995}}\right)$的值。

[误解] $\because A=B$，$\therefore$ 由 $0\in B$ 可知 $0\in A$。显然 $x\neq 0$，$y\neq 0$，故必有 $\lg(xy)=0$，$\therefore xy=1$，所以 x,y 有以下两种情形：

①当 $x=y=1$ 时，原式$=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{1995\text{个}}=3990$

② 当 $x=y=-1$ 时，　原式$=(-2)+2+\cdots+(-2)+2+(-2)=-2$。

[正确解答] $\because A=B$，$\therefore$ 两集合元素对应相等，因此有 $0\in A$。由于元素无序，所以应考虑 $x=0$ 或 $xy=0$ 或 $\lg(xy)=0$，显然仅 $\lg(xy)=0$ 适合，即 $xy=1$①。那么由 $1\in B$，可能 $y=1$②或 $|x|=1$③。由①、②得 $x=y=1$，这与集合中元素的互异性相矛盾，故舍去。由①、③得 $x=y=-1$，此时 $A=B=\{-1,1,0\}$。

$\therefore$ 原式$=(-2)+2+\cdots+(-2)+2+(-2)=-2$。

[错因分析与解题指导] 误解中由 $xy=1$ 得出两种情况。其中 $x=y=1$ 时：$A=\{1,1,0\}$，$B=\{0,1,1\}$。这与集合中元素的互异性相矛盾，应舍去。

在求集合中元素的值时，应注意构成集合的元素的特征．如互异性，无序性等。一定要考虑周到，才能得到正确的结果。

[练习题]

11. 设 $A=\{(x,y)\mid(a-1)x+2y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid 6x+ay=2\}$，若 $A=B$，求 a。

12. 已知集合 $A=\{a,a+d,a+2d\}$，$B=\{a,aq,aq^2\}$。若 $A=B$，求 q 的值。

【题 7】 集合 $\{a,b,c\}$ 的子集有哪些？

[误解] 有 $\{a\}$、$\{b\}$、$\{c\}$、$\{a,b\}$、$\{b,c\}$、$\{c,a\}$。

[正确解答] 有 $\varnothing$、$\{a\}$、$\{b\}$、$\{c\}$、$\{a,b\}$、$\{b,c\}$、$\{c,a\}$、$\{a,b,c\}$。

[错因分析与解题指导] 由于子集概念不清，误解中漏掉了 $\varnothing$ 和 $\{a,b,c\}$。

[练习题]

13. 写出集合 $\{a,b,c\}$ 的非空子集。

14. 集合 $\{a,b,c,d\}$ 的真子集有几个？非空子集有几个？非空真子集有几个？

【题 8】 在集合 $\{a,b,c\}$ 中加进一个元素 d，那么子集总数增加多少个？

[误解] 增加一个 $\{d\}$。

[正确解答] 加进一个元素后成为集合 $\{a,b,c,d\}$，其有 2^4 个子集。原集合 $\{a,b,c\}$ 有 2^3 个子集。所以增加了 $2^4-2^3=8$ 个子集。

[错因分析与解题指导] 在原集合中加进一个元素后，三元素集合成为四元素集合，它们子集的个数分别为 2^3、2^4，而不能孤立地只考虑一个 $\{d\}$。增加的 8 个子集是 $\{d\}$，$\{a,d\}$，$\{b,d\}$，$\{c,d\}$，$\{a,b,d\}$，$\{a,c,d\}$，$\{b,c,d\}$，$\{a,b,c,d\}$。也可这样想：原来集合的 2^3 个子集仍是增加元素后四元集的子集，而且这 8 个子集每个都增加了一个元素 d 后也都是新集合的子集，因此增加子集的个数等于 $2^3=8$ 个。

[练习题]

15. 集合$\{1,2,3,4\}$中去掉一个1，剩下的集合的子集个数比原集合减少多少个？

16. 设集合$A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，若$C\not\subseteq A$，$C\subseteq B$，写出所有的集合C。

【题 9】 集合$A=\{a|a=2k,\ k\in N$ 或 $k=0\}$，

集合$B=\{b|b=\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1),\ n\in N\}$，

那么A、B间的关系是 (　　)

(A) $A\subset B$；　　(B) $A\supset B$；

(C) $A=B$；　　(D) 以上都不对。

[误解一] ∵ A表示偶数集，B中元素$b=\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$，当$n\in N$时不一定是整数，∴ 选$(D)$。

[误解二] A表示非负偶数集

B：$b=\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$　$(n\in N)$

$$=\begin{cases}0 & (n\text{为正偶数时})\\ \frac{1}{4}(n+1)(n-1) & (n\text{为正奇数时})\end{cases}$$

其中，n为正奇数时，$n+1$，$n-1$均为偶数，∴ $(n+1)(n-1)$一定能被4整除，∴ $\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$是正整数或零，但不一定是正偶数。∴ 选(A)：$A\subset B$。

[误解三] A表示非负偶数集

$$B：b=\cdots=\begin{cases}0 & (n\text{为正偶数时})\\ \frac{1}{4}(n+1)(n-1) & (n\text{为正奇数时})\end{cases}$$

当n为正奇数时，$n-1$与$n+1$表示两个连续的偶数，其中必有一个是4的倍数，∴ $\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$表示0或正的偶数。∴ 选(C)，即$A=B$。

[正确解答] 集合A是非负偶数集，即$A=\{a|a=2k,\ k\in N$

或 $k=0\}=\{0,2,4,6,8,\cdots\}$。

集合 B 中的元素

$$b=\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$$

$$=\begin{cases}0 & (n\text{ 为正偶数时})\\ \frac{1}{4}(n+1)(n-1) & (n\text{ 为正奇数时})\end{cases}$$

同[误解三]中所述，$\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$（n 为正奇数时）表示 0 或正偶数，但是不表示所有的正偶数：取 $n=1,3,5,7,\cdots$，由$\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$依次得到 $0,2,6,12,\cdots$，即 $B=\{0,2,6,12,20,\cdots\}$。

$\therefore$ 选(B)：$A\supset B$。

[错因分析与解题指导]　[误解一]对集合 A、B 的判断都是错误的。没有看清题目，没有慎重分析，草率下的结论是错误的。

[误解二]、[误解三]中，对"n 为正奇数时，$b=\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$到底表示怎样的数"犯有程度不同的认识错误。[误解二]只认识到 $n+1$、$n-1$ 均为偶数，因此$\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$是整数，认识比较肤浅，[误解三]挖掘了 $n-1$，$n+1$ 是两个连续的偶数，得到$\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$必为非负偶数，认识比[误解二]深了一层，但接着犯了一个常识性的逻辑错误，认为"非负偶数即可表示为$\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$（n 为正奇数）"结果前功尽弃，功亏一篑。而[正确解答]在[误解三]已认识的基础上，仔细考察了$\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$在 n 为正奇数时，到底表示哪些非负的偶数，得出它只能表示 0 和部分正偶数，因此得出 $A\supset B$ 的正确结论。

本题的解答过程启发我们在解题时，一定要仔细分析题设条件，由浅入深，追根究底，千万不能浅尝辄止，草率了事。

[练习题]

17. 设 $A=\{a\,|\,a=(2k+1)\pi,\ k\in Z\}$，$B=\{b\,|\,b=(6n-1)\pi,\ n\in Z\}$，

$C=\{c|c=(4p\pm1)\pi,\ p\in Z\}$，试确定集合 A、B、C 间的关系。

18. 设 $M=\{(x,y)|x+y=5,\ x,y\in R\}$，$N=\{(x,y)|y=5-x,\ x\in Z\}$，$P=\{(x,y)|(x+y)^2=25,\ x,y\in R\}$，试确定集合 M、N、P 之间的关系。

【题 10】 设集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|ax-2=0\}$。若 $B\subset A$，求实数 a 组成的集合。

[误解] $\because$ $A=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$

当 $x=1$ 时，$a\cdot1-2=0$，得 $a=2$

当 $x=2$ 时，$a\cdot2-2=0$，得 $a=1$

$\therefore$ a 值组成的集合为 $\{2,1\}$。

[正确解答] $\because$ $A=\{1,2\}$

$$B=\{x|ax-2=0\}=\begin{cases}\{\frac{2}{a}\} & (a\neq0\text{ 时})\\ \varnothing & (a=0\text{ 时})\end{cases}$$

显然，$a=0$ 时，$B=\varnothing\subset A$

若 $\frac{2}{a}=1$，得 $a=2$；若 $\frac{2}{a}=2$，得 $a=1$

综上可得，$B\subset A$ 时，a 值组成的集合为 $\{0,1,2\}$。

[错因分析与解题指导] 本题条件为 $B\subset A$，即 B 是 A 的真子集，且 $A=\{1,2\}$。在误解中只考虑了 B 等于 $\{1\}$ 或 $\{2\}$，而忽视了 $B=\varnothing$ 也满足条件。

正确解答中，正面讨论了 B 集可能是一元集 $\{\frac{2}{a}\}$ $(a\neq0)$，或 $\varnothing$ $(a=0)$。由此得出完整的解答。

也可以换一个角度思考：由 $A=\{1,2\}$ 且 $B\subset A$，故 B 作为 A 的真子集可能为 $\varnothing$，$\{1\}$ 或 $\{2\}$，再逐个求 a。

[练习题]

19. 已知 $A=\{x|x^2-2x-3=0\}$，$B=\{x|ax-1=0\}$。若 $B\subset A$，求 a 的值。

20. 设集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-ax+2=0,\ x\in R,\ a\in R\}$。若 $A\cup B=A$，求 a 的取值范围。

【题 11】 设集合 $A=\{x|10+3x-x^2\geqslant 0\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$。若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围。

[误解一] $\because$ $A=\{x|10+3x-x^2\geqslant 0\}$

$=\{x|x^2-3x-10\leqslant 0\}$

$=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$

若 $B\subseteq A$，则有 $\begin{cases}m+1\geqslant -2\\2m-1\leqslant 5\end{cases}$ 解之，得

$-3\leqslant m\leqslant 3$ 时适合题意。

[误解二] $\because$ $A=[-2,5]$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$

因此当 m 满足条件

$$\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1\\m+1\geqslant -2\\2m-1\leqslant 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\geqslant 2\\m\geqslant -3\\m\leqslant 3\end{cases}$$

即 $2\leqslant m\leqslant 3$ 时，$B\subseteq A$。

[正确解答] $\because$ $A=[-2,5]$

若 $B\neq\varnothing$，则 m 满足 $\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1\\m+1\geqslant -2\\2m-1\leqslant 5\end{cases}$

即 $2\leqslant m\leqslant 3$ 时，$B\subseteq A$；

若 $B=\varnothing$，则 m 满足 $m+1>2m-1$，即 $m<2$ 时，$B\subset A$。

综上得 $m\leqslant 3$ 时，$B\subseteq A$。

[错因分析与解题指导] [误解一]与[误解二]均属考虑不周。在得出 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$ 后，只比较形如闭区间的 $B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$ 的端点 $m+1$，$2m-1$ 与 -2 及 5 的大小，而忽略了若 B 是空集时，空集是任何集合的子集这一情况。

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集（记作 $A\subseteq B$）。特别地，我们规定：空集是任何集合的子集（$\varnothing\subseteq A$）。因此，在做有关子集的习题时，不要忘记考虑一下空集。

[练习题]

21. 设集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0, x\in R\}$，$B=\{x|2x^2-ax+2=0, x\in R\}$。若 $A\cup B=A$，求 a 的值组成的集合。

22. 设全集 $I=R$，集合 $A=\left\{x\left|\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}\right.\right\}$，$B=\{x|x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0\}$。求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围。

【题 12】 设 $M=\{x|x=1\}$，$N=\{(x,y)|x=1, y\in R\}$。则 $M\cap N=($ $)$

(A) $\varnothing$； (B) M； (C) N； (D) $(0,1)$。

[误解] 选(B)。

[正确解答] $\because$ $M=\{1\}$，$N=\{(x,y)|x=1, y\in R\}$，

$\therefore$ $M\cap N=\varnothing$。选 (A)。

[错因分析与解题指导] 误解只在形式上猜取相同的 $x=1$ 作为交集是错误的。实质上：集合 $M=\{1\}$，集合 N 是形如$(1,y)$ $(y\in R)$的有序数对的集合（或坐标平面上直线 $x=1$ 上的点集）。两者根本无任何共同点，因此正确答案是(A)。

[练习题]

23. 设集合 $A=\{y|y=x^2-2x+3, x\in R\}$，$B=\{(x,y)|y=-2x^2+8x-5, x\in R\}$，则 $A\cap B=($ $)$

(A) $[2,3]$； (B) $\left\{(2,3), \left(\frac{4}{3},\frac{19}{9}\right)\right\}$； (C) $\{(2,3)\}$； (D) $\varnothing$。

24. 设 $A=\{x|x=a^2+2a+1, a\in R\}$，$B=\{x|x=b^2-2b, b\in R\}$，求 $A\cap B$。

【题 13】 设集合 $A=\{y|y=x^2+1, x\in R\}$，$B=\{y|y=x+1, x\in R\}$。则 $A\cap B=($ $)$

(A) $\{(0,1),(1,2)\}$； (B) $\{(0,1)\}$；

(C) $\{(1,2)\}$； (D) $[1,+\infty)$。

[误解]

$$A\cap B=\{y|y=x^2+1, x\in R\}\cap\{y|y=x+1, x\in R\}$$
$$=\{(0,1),(1,2)\} \quad 选(A)。$$