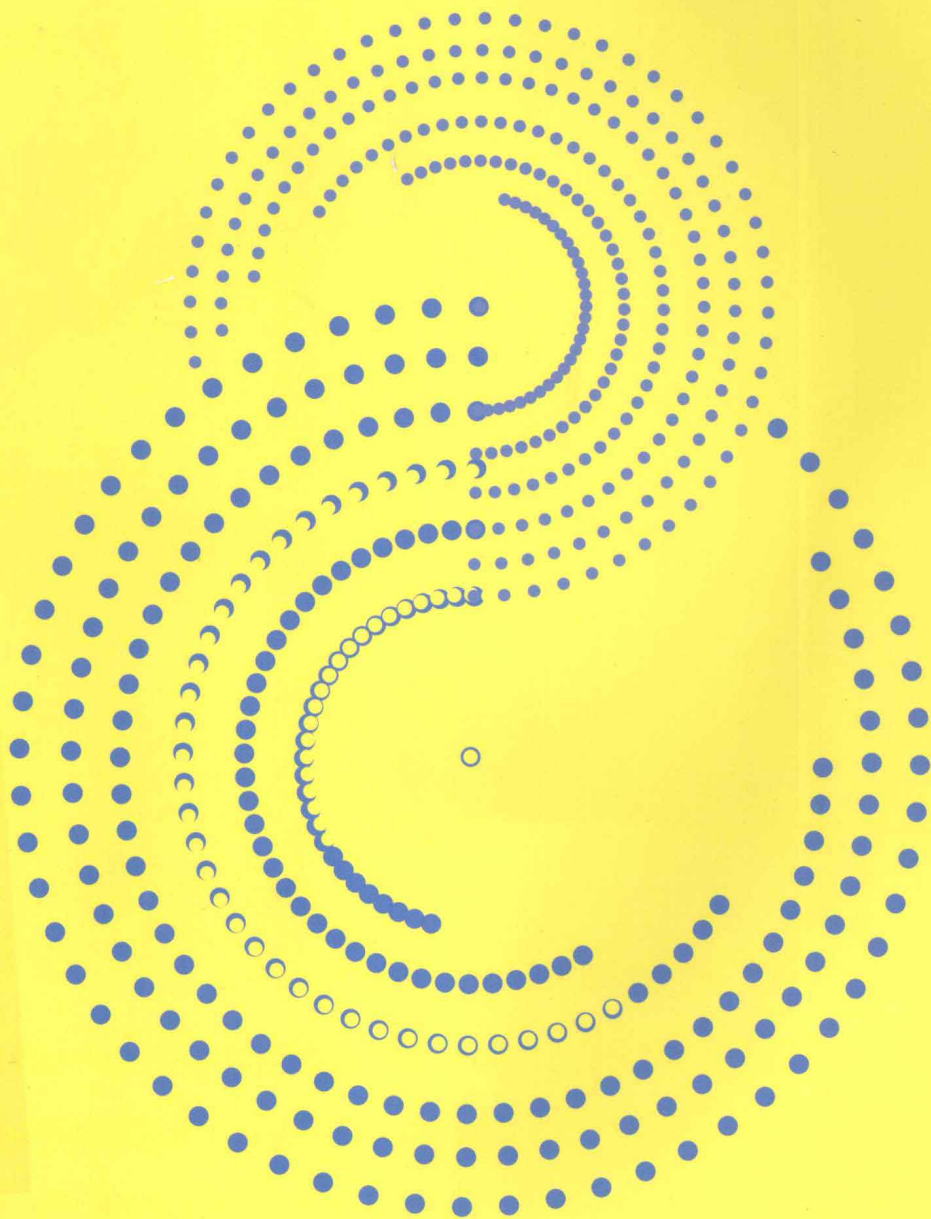


高等学校教材

# 数值计算方法

第3版

朱建新 李有法 编



## 内容提要

本书按照工科数学数值计算方法课程教学基本要求编写,介绍了计算机上常用的数值计算方法以及有关的基本概念与理论,内容涉及误差理论、非线性方程求根、线性代数方程组的解法、插值与拟合、数值微分与数值积分、常微分方程的数值解法、矩阵特征值计算。内容取材适当,主要方法给出了程序框图(或算法)与数值例子,每章有小结与适量习题,书末还有上机实习题。习题均配有参考答案。

本书可作为高等学校本科各专业数值计算方法课程的教材,也可供工程硕士研究生、工程技术人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

数值计算方法/朱建新,李有法编.--3版.--北京:高等教育出版社,2012.7  
ISBN 978-7-04-035013-5

I. ①数… II. ①朱… ②李… III. ①数值计算-计算方法-高等学校-教材 IV. ①O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 132287 号

策划编辑 于丽娜  
插图绘制 尹文军

责任编辑 田玲  
责任校对 殷然

封面设计 张申申  
责任印制 田甜

版式设计 余杨

出版发行 高等教育出版社  
社址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100120  
印刷 北京民族印务有限责任公司  
开本 787mm×960mm 1/16  
印张 13.25  
字数 230千字  
购书热线 010-58581118  
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
版 次 1996年7月第1版  
2012年7月第3版  
印 次 2012年7月第1次印刷  
定 价 19.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 35013-00

## 第3版前言

鉴于现代数值计算技术的发展和高等学校数学课程教学改革的日益深入,作者根据多年的教学与科研实践对本书第2版进行了修正和补充,以适应本科生计算方法课程(32学时理论课,16学时上机实习)、科学计算课程(40学时理论课,16学时上机实习)的实际需要。主要修订内容如下:

在第1章中,增加了“有效数字与相对误差之间关系的定量结论”;在第2章中,增加一节“简介求解非线性方程组的牛顿法”;在第3章中,增加了“牛顿-科茨数值求积公式余项的简洁表示和处理病态线性方程组的预条件技术”;在第4章中,增加了“埃尔米特插值”及“函数最佳逼近”,修正了最小二乘法中的一些结论表述;在第5章中,增加了二节“高斯型求积公式简介”和“自适应求积方法”;在第6章中,增加了“用有限差分方法求解边值问题的带导数边界条件的离散处理方法”;新增一章“矩阵特征值计算”,主要介绍幂法与反幂法、雅可比方法及初等反射矩阵(豪斯霍尔德变换)及其应用。书中加\*号的内容仅用于科学计算课程的教学,教师也可根据实际教学需求进行取舍。

本次修订工作由浙江大学数学系朱建新教授完成,原书作者李有法副教授审阅了全书。

本书不仅可作为高等学校本科各专业数值计算方法课程的教材,也可作为工程硕士研究生、工程技术人员教学与进修的参考书。

编者

2012年3月

## 第 2 版前言

本书出版后,得到了许多院校和任课老师的大力支持,在教学中越来越广泛地使用,并对书中存在的问题提出了不少宝贵意见,谨在此深表谢意。本书修订时,我们在认真考虑各种意见和建议后,在保持原书结构、风格与特点基础上,作了如下修改与补充:

- (1) 针对将 16 开本改为 32 开本之需要,作了必要的修改;
- (2) 对部分文字与论述(或论证)作了少量修改;
- (3) 在不影响教学学时与篇幅的前提下,为便于应用,少量补充了一些内容。

本书修改工作,由原作者与浙江大学城市学院现代教育技术中心李晓勤共同完成。

编 者  
2004 年 7 月

# 第 1 版前言

本书是为工科院校本科生学习数值计算方法课程而编写的,着重介绍电子计算机上常用的数值计算方法以及有关的基本概念与理论。

本书于 1994 年 8 月由工科数学课程教学指导委员会本科组评审通过,可作为工科数学数值计算方法课程的教材。

本书内容符合高等学校工科数学课程教学指导委员会制订的工科数学数值计算方法课程教学基本要求,并根据作者多年的教学与科研实践作了一些补充(见带 \* 号内容)。为了便于教学与阅读,在编写此书时,力求做到叙述简明准确,内容安排由浅入深、学用一致,对主要方法给出程序框图(或算法)与数值例子,并且每章有小结与适量习题;为了培养读者使用所学方法进行科学计算的能力,在第七章中给出了一定数量的上机实习题供读者选用;各章习题与上机实习题均给出答案供读者参考。因此,本书的适用面较广,不仅可用作工科本科各专业数值计算方法课程的教材,也可作为其他学校需要学习本课程的专业和工程技术人员教学与进修的参考书。

在学习本课程前应先修高等数学、线性代数及算法语言等课程。讲授本书全部内容(带 \* 号部分除外)约需 36 学时,上机实习 14~16 小时。

本书经天津大学陆君良教授和浙江大学应用数学系及蔡燧林教授、陈道琦、宋水孝副教授审阅、推荐与帮助。在此,谨致以诚挚的谢意。

限于水平,书中缺点和错误一定不少,欢迎批评指出。

编 者

1994 年 10 月

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

# 目 录

绪论	1
第 1 章 误差	2
§ 1 误差的来源	3
§ 2 绝对误差、相对误差与有效数字	4
2.1 绝对误差与绝对误差限	4
2.2 相对误差与相对误差限	4
2.3 有效数字与有效数字位数	6
2.4 有效数字、绝对误差、相对误差之间的关系	6
§ 3 数值运算中误差传播规律简析	7
§ 4 数值运算中应注意的几个原则	8
小结	11
习题一	11
第 2 章 非线性方程求根	13
§ 1 二分法	13
§ 2 迭代法	16
2.1 简单迭代法	16
2.2 迭代法的几何意义	17
2.3 迭代法收敛的充分条件	18
§ 3 牛顿迭代法与弦割法	22
3.1 牛顿迭代公式及其几何意义	22
3.2 牛顿迭代法收敛的充分条件	23
3.3 弦割法	25
§ 4 非线性方程组牛顿迭代法求根	27
§ 5 迭代法的收敛阶与加速收敛方法	27
小结	31
习题二	32

<b>第3章 线性代数方程组的解法</b> .....	34
§1 高斯消元法与选主元技巧.....	34
1.1 三角形方程组及其解法 .....	35
1.2 高斯消元法 .....	35
1.3 列主元消元法 .....	39
§2 三角分解法.....	42
2.1 矩阵的三角分解 .....	42
2.2 杜利特尔分解法 .....	44
2.3 解三对角线方程组的追赶法 .....	47
2.4 解对称正定矩阵方程组的平方根法.....	49
§3 向量与矩阵的范数 .....	52
3.1 向量的范数 .....	52
3.2 矩阵的范数 .....	53
§4 迭代法 .....	55
4.1 雅可比迭代法 .....	57
4.2 高斯-赛德尔迭代法 .....	58
4.3 迭代法收敛条件与误差估计 .....	59
4.4 逐次超松弛迭代法 .....	65
§5 方程组的状态与解的迭代改善 .....	67
5.1 方程组的状态与矩阵的条件数 .....	67
5.2 方程组近似解可靠性判别法 .....	69
5.3 近似解的迭代改善法.....	70
5.4 预条件处理方法 .....	71
小结 .....	71
习题三 .....	72
<b>第4章 插值与拟合</b> .....	74
§1 插值概念与基础理论 .....	74
1.1 插值问题的提法 .....	74
1.2 插值多项式的存在唯一性 .....	75
1.3 插值余项 .....	76
§2 插值多项式的求法 .....	77
2.1 拉格朗日插值多项式.....	77
2.2 差商与牛顿基本插值多项式 .....	81



2.3 差分与等距结点下的牛顿公式 .....	85
§3 分段低次插值 .....	88
3.1 分段线性插值与分段二次插值 .....	88
3.2 三次样条插值 .....	89
§4 埃尔米特(Hermite)插值 .....	97
* §5 函数最佳逼近 .....	99
5.1 最佳一致逼近多项式 .....	100
5.2 最佳平方逼近 .....	102
§6 曲线拟合的最小二乘法 .....	103
6.1 最小二乘问题的提法 .....	103
6.2 最小二乘解的求法 .....	104
6.3 加权技巧的应用 .....	110
小结 .....	112
习题四 .....	113
<b>第5章 数值微分与数值积分 .....</b>	<b>116</b>
§1 数值微分 .....	116
1.1 利用插值多项式构造数值微分公式 .....	116
1.2 利用三次样条插值函数构造数值微分公式 .....	119
§2 构造数值积分公式的基本方法与有关概念 .....	121
2.1 构造数值积分公式的基本方法 .....	121
2.2 数值积分公式的余项 .....	122
2.3 数值积分公式的代数精度 .....	122
§3 牛顿-科茨公式 .....	124
3.1 牛顿-科茨公式 .....	124
3.2 复合低阶牛顿-科茨公式 .....	127
3.3 误差的事后估计与步长的自动调整 .....	131
3.4 变步长复合梯形法的递推算式 .....	132
§4 龙贝格算法 .....	135
§5 高斯型求积公式简介 .....	138
* §6 自适应求积方法 .....	142
小结 .....	145
习题五 .....	146

<b>第 6 章 常微分方程的数值解法</b> .....	148
§ 1 欧拉方法与改进欧拉方法 .....	148
1.1 欧拉方法 .....	148
1.2 欧拉公式的局部截断误差与精度分析 .....	150
1.3 改进欧拉方法 .....	151
§ 2 龙格-库塔法 .....	154
2.1 龙格-库塔法的构造原理 .....	154
2.2 经典龙格-库塔法 .....	156
2.3 步长的自动选择 .....	158
§ 3 收敛性与稳定性 .....	160
3.1 收敛性 .....	160
3.2 稳定性 .....	161
§ 4 一阶方程组与高阶方程的数值解法 .....	164
4.1 一阶方程组初值问题的数值解法 .....	164
4.2 高阶方程初值问题的数值解法 .....	165
§ 5 边值问题的数值解法 .....	167
5.1 打靶法 .....	167
5.2 有限差分法 .....	169
小结 .....	171
习题六 .....	171
<b>第 7 章 矩阵特征值计算</b> .....	174
§ 1 幂法及反幂法 .....	174
§ 2 计算对称矩阵的全部特征值方法——雅可比方法 .....	175
* § 3 初等反射矩阵(豪斯霍尔德变换) .....	177
小结 .....	179
习题七 .....	179
<b>第 8 章 上机实习参考题</b> .....	181
<b>习题答案</b> .....	186
<b>参考文献</b> .....	196

## 绪 论

在科学研究与工程技术中,经常会遇到数学模型的求解问题.然而在许多情况下,要获得模型问题的准确解往往是十分困难的,甚至是不可能的.因此,研究各种数学问题的近似解法非常必要.

数值计算方法又称计算方法或数值分析,是一门与计算机应用密切结合的实用性很强的数学课程,它专门研究各种数学问题的一类近似解法——数值方法,即从一组原始数据(如模型中的某些参数)出发,按照确定的运算规则进行有限步运算,最终获得数学问题数值形式的满足精度要求的近似解.

数值计算方法提供的算法(包括计算公式与整个计算方案、计算过程)具有下列特点:

1. 面向计算机,根据计算机的特点设计可行的算法.即在算法中,只能包括计算机能直接处理的加、减、乘、除运算与逻辑运算,调用计算机的内部函数.
2. 有可靠的理论依据(因此,需进行必要的理论分析,例如误差分析、收敛性分析、数值稳定性分析等)以确保所得结果在理论上能任意逼近准确值,在实际计算时能获得达到精度要求的近似值.
3. 高效率.数值计算方法所提供的算法还应具有计算量小(这不仅使计算速度快,而且使误差积累小),需要存储的原始数据与需要记录的中间结果少(可少占用计算机的存储单元与工作单元),计算过程简单、规律性强(使程序易编,易在计算机上实现)等优点.

因此,数值计算方法既重视与方法有关的理论,又重视方法的实际应用,内容相当丰富,不能片面地将它理解为各种数值方法的简单罗列或“标准”程序的介绍.读者在学习时必须注意理解方法的设计原理与处理问题的技巧,重视有关的基本概念与理论,重视误差分析与收敛性、数值稳定性的讨论,认真完成一定数量的理论分析题与计算练习题(包括上机实习题),注重利用计算机进行科学计算能力的培养.

由于数值计算方法课程涉及面较宽,包括了微积分、线性代数、常微分方程等数学问题的数值方法,读者只有掌握这几门课程的基本内容,才能学好这一课程.

## 第 1 章 误差

有人认为,用先进的计算工具(例如计算器、计算机等)进行计算,所得结果一定可靠,没有必要对误差进行分析研究.事实如何?请看下列例子.

例 1  $y = \arctan 5\,430 - \arctan 5\,429$  的准确值为  $0.000\,000\,033\,921\,91\dots$ . 但是,若用具有舍入功能的八位计算器,直接按下面过程计算:

$$y = 1.570\,612\,2 - 1.570\,612\,1 = 0.000\,000\,1,$$

所得近似值很不可靠.

### 例 2 积分

$$I_n = e^{-1} \int_0^1 x^n e^x dx \quad (n=0,1,2,\dots)$$

的值必定落在区间  $[0,1]$  中,而且随着  $n$  的增大而减小.用分部积分法易得递推关系式

$$I_n = 1 - nI_{n-1} \quad (n=1,2,\dots). \quad (1.1)$$

若在尾数八位的浮点计算机上先算出  $I_0 = 1 - e^{-1}$  的近似值,然后利用递推式 (1.1) 依次算出  $I_1, I_2, I_3, \dots$  的近似值,所得结果见表 1-1.  $I_{12}$  的近似值超过了  $I_0$  的近似值,显然是错误的.此后,随着  $n$  的增大,错误越来越严重.

表 1-1

$n$	$I_n$ 近似值	$n$	$I_n$ 近似值
0	0.632 120 56	8	0.100 979 20
1	0.367 879 44	9	0.091 187 200
2	0.264 241 12	10	0.088 128 000
3	0.207 276 64	11	0.030 592 000
4	0.170 893 44	12	0.632 896 00
5	0.145 532 80	13	-7.227 648 0
6	0.126 803 20	14	102.187 07
7	0.112 377 60	$\vdots$	$\vdots$

### 例 3 一元二次方程

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + 10^9 = 0$$

(其中  $\alpha = -10^9, \beta = -1$ ) 有两个互异实根

$$x_1 = 10^9, x_2 = 1.$$

但是,若直接引用求根公式  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  在尾数八位的浮点计算机上进行计算,则得

$$x_1 = 10^9, x_2 = 0,$$

其中一个根是明显错误的.

在以上各例中,虽然都使用了先进的计算工具及正确无误的公式进行计算,却都得到了错误的结果.要找出发生这种情况的原因,采取相应措施确保计算结果的可靠性,就必须对误差进行分析研究.

## §1 误差的来源

不难发现,考察用计算机解决科学计算问题时所经历的几个环节(如图 1-1 所示),其中每一步都可能产生误差.

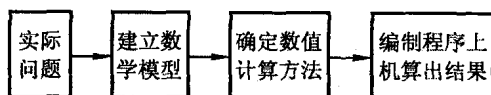


图 1-1

首先,数学模型是通过在实际问题进行抽象与简化得到的,它与实际问题之间有误差.数学模型与实际之间出现的这种误差称为模型误差.同时,数学模型中往往还含有一些由观测得到的参量,例如温度、时间、电压等,显然也有误差,这种由观测产生的误差称为观测误差或参量误差.

其次,根据实际问题建立的数学模型,在许多情况下很难得到准确解,这就需要选用适当的数值计算方法求其近似解.由数值计算方法所得到的近似解与实际问题准确解之间出现的这种误差,称为截断误差或方法误差.例如,若将  $\sin x$  展开成  $x$  的幂级数:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots,$$

并用级数的前三项计算  $\sin x$  的近似值,即取

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 = S_5(x),$$

则截断误差是

$$R(x) = \sin x - S_5(x) = -\frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \dots$$

最后,由于计算机字长有限,只能用有限位进行运算或取值.因此,原始数据

在计算机上表示时会产生误差,而且在计算过程中又可能产生新的误差.这种因计算机字长有限而产生的误差称为舍入误差.例如,在尾数四位的浮点计算机上用0.333 3表示 $\frac{1}{3}$ ,产生的误差

$$R = \frac{1}{3} - 0.333\ 3 = 0.000\ 033\ \dots$$

就是舍入误差.

在本书中,除了研究一些常见数学问题的数值解法外,还要研究计算结果是否满足精度要求,这就涉及所谓误差估计问题.在所有讨论过程中,我们都认为由实际问题所建立的数学模型是合理的,参量也是足够精确的,因此在误差估计中,主要讨论数值计算方法的截断误差,有时也涉及舍入误差的分析.

## §2 绝对误差、相对误差与有效数字

人们常用绝对误差、相对误差或有效数字位数来描述一个近似值的准确程度.由于这些概念早为读者所熟悉,本书只作简要叙述.

### 2.1 绝对误差与绝对误差限

若 $x^*$ 为准确值 $x$ 的一个近似值,则称 $x-x^*$ 为近似值 $x^*$ 的绝对误差,简称误差,并用 $e^*(x)$ 表示,即

$$e^*(x) = x - x^* \quad (1.2)$$

绝对误差虽然能清楚地表明近似值 $x^*$ 与准确值 $x$ 之间的差异,但是在实际问题中,往往无法知道准确值 $x$ 是多少,从而无法计算出绝对误差的大小,只能根据具体情况估计其绝对值的上限,即求一个正数 $\varepsilon^*$ ,使得

$$|e^*(x)| = |x - x^*| \leq \varepsilon^* \quad (1.3)$$

满足不等式(1.3)的正数 $\varepsilon^*$ 称为近似值 $x^*$ 的绝对误差限,简称误差限.

在工程技术中,常将不等式(1.3)表示成

$$x = x^* \pm \varepsilon^*.$$

例如, $v = (100 \pm 2)$  V 表示 $v^* = 100$  V 是电压 $v$ 的一个近似值,而2 V则是近似值 $v^*$ 的一个绝对误差限,即

$$|v - v^*| \leq 2\ \text{V}.$$

### 2.2 相对误差与相对误差限

在许多情况下,绝对误差的大小还不能刻画近似值的准确程度.例如,若有

两个数

$$x_1 = 100 \pm 2, x_2 = 10 \pm 1,$$

则近似值  $x_1^* = 100$  的绝对误差限  $\varepsilon^*(x_1) = 2$  是近似值  $x_2^* = 10$  的绝对误差限  $\varepsilon^*(x_2) = 1$  的两倍,但是不能就此断定  $x_1^*$  的准确程度比  $x_2^*$  差,因为在 100 内差 2 显然比 10 内差 1 更准确些. 这说明一个近似值的准确程度,不仅与绝对误差的大小有关,还与准确值本身的大小有关. 为此,需要引入相对误差的概念.

若  $x$  的近似值  $x^*$  的绝对误差为  $e^*(x)$ , 则称比值  $\frac{e^*(x)}{x}$  为近似值  $x^*$  的相对误差,并用  $e_r(x)$  表示,即

$$e_r(x) = \frac{e^*(x)}{x} = \frac{x - x^*}{x}. \quad (1.4)$$

由于当  $\left| \frac{e^*(x)}{x^*} \right|$  较小时,

$$\begin{aligned} \frac{e^*(x)}{x} \frac{e^*(x)}{x^*} &= \frac{e^*(x)(x^* - x)}{xx^*} \\ &= \frac{-[e^*(x)]^2}{[x^* + e^*(x)]x^*} = \frac{-\left[\frac{e^*(x)}{x^*}\right]^2}{1 + \frac{e^*(x)}{x^*}} \end{aligned}$$

是  $\frac{e^*(x)}{x^*}$  的平方级,可忽略不计,而且在实际计算中准确值  $x$  往往是不知道的,故常将

$$e_r^*(x) = \frac{e^*(x)}{x^*} = \frac{x - x^*}{x^*} \quad (1.5)$$

作为近似值  $x^*$  的相对误差.

和绝对误差类似,要计算相对误差的真值也常常难以办到,只能对其绝对值的上限作出估计,即求正数  $\varepsilon_r^*$ , 使

$$|e_r^*(x)| = \left| \frac{e^*(x)}{x^*} \right| = \left| \frac{x - x^*}{x^*} \right| \leq \varepsilon_r^*. \quad (1.6)$$

满足不等式(1.6)的正数  $\varepsilon_r^*$  称为近似值  $x^*$  的相对误差限.

相对误差与相对误差限都是无量纲数,常用百分数表示.

例如  $x_1 = 100 \pm 2$  的近似值  $x_1^* = 100$  的相对误差

$$|e_r^*(x_1)| = \left| \frac{e^*(x_1)}{x_1^*} \right| \leq \frac{2}{100} = 2\%,$$

而  $x_2 = 10 \pm 1$  的近似值  $x_2^* = 10$  的相对误差

$$|e_r^*(x_2)| = \left| \frac{e^*(x_2)}{x_2^*} \right| \leq \frac{1}{10} = 10\%.$$

因此,从相对误差看,近似值  $x_1^*$  比  $x_2^*$  的准确程度好得多.

### 2.3 有效数字与有效数字位数

在将一个近似值  $x^*$  写成如图 1-2 所示形式时,为了同时反映其准确程度,常常用到“有效数字”的概念.

若近似值  $x^*$  某位数的半个单位是它的误差限,而且从该位数字到  $x^*$  最左边的那个非零数字共有  $n$  位(见图 1-2),那么我们把这  $n$  位数字都称为有效数字,并且说近似值  $x^*$  具有  $n$  位有效数字.

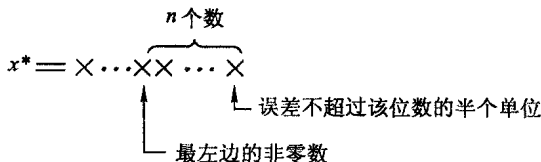


图 1-2

例如,对于  $x = \pi = 3.14159\dots$ ,若取近似值  $x^* = 3.14$ ,则绝对误差  $|e^*(x)| = 0.00159\dots \leq \frac{1}{2} \times 0.01$ ,即百分位数字 4 的半个单位(指  $\frac{1}{2} \times 0.01$ )是  $x^*$  的绝对误差限,故从  $x^*$  最左边的非零数“3”开始到百分位数字“4”的三个数都是有效数字,近似值  $x^*$  具有三位有效数字.

### 2.4 有效数字、绝对误差、相对误差之间的关系

设  $x^*$  具有  $n$  位有效位数,即

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \dots + a_n \times 10^{-(n-1)}), \quad (1.7)$$

其中  $a_1 \neq 0$ ,  $a_1$  是 1~9,  $a_2 \sim a_n$  是 0~9,且

$$|x^* - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^m \times 10^{-(n-1)} = \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}.$$

因为  $a_1 \times 10^m \leq |x^*| \leq (a_1 + 1) \times 10^m$ ,所以

$$|e_r^*| = \frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \frac{\frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}}{a_1 \times 10^m} = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}.$$

**定理 1** 若用(1.7)式表示的近似值  $x^*$  具有  $n$  位有效数字,则其相对误差满足不等式



$$|e_r^*| \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1},$$

其中  $a_1$  为  $x^*$  的第一个非零数字.

反之,有

**定理 2** 若近似值  $x^*$  的相对误差满足不等式

$$|e_r^*| \leq \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-n+1},$$

其中  $a_1$  为  $x^*$  的第一个非零数字,则它至少具有  $n$  位有效数字.

$$\text{证明 } |x-x^*| = |e_r^*| \cdot |x^*| \leq \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-n+1} \cdot (a_1+1) \times 10^m = \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1},$$

所以  $x^*$  至少具有  $n$  位有效数字.

上述定理表明:对同一个数的近似值,有效数字位数越多,其绝对误差与相对误差越小;反之,绝对误差或相对误差变小,有效数字的位数会变多.

### §3 数值运算中误差传播规律简析

在数值运算中,参加运算的数若有误差,必然会影响到计算结果的准确性.今以二元函数为例,通过泰勒(Taylor)展开来分析误差的传播规律.

设  $x_1^*, x_2^*$  分别是  $x_1, x_2$  的近似值.在实际计算时,常用  $y^* = f(x_1^*, x_2^*)$  作为函数值  $y = f(x_1, x_2)$  的近似值.利用函数  $f(x_1, x_2)$  在点  $(x_1^*, x_2^*)$  处的泰勒展开式,可方便地估计近似值  $y^*$  的绝对误差与相对误差.例如,当  $x_1^*$  与  $x_2^*$  的误差都较小时,  $y^*$  的绝对误差

$$\begin{aligned} y - y^* &= f(x_1, x_2) - f(x_1^*, x_2^*) \\ &\approx \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^* (x_1 - x_1^*) + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^* (x_2 - x_2^*), \end{aligned}$$

即

$$e^*(y) \approx \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^* e^*(x_1) + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^* e^*(x_2), \quad (1.8)$$

其中  $\left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^*, \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^*$  分别表示偏导数  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$  在点  $(x_1^*, x_2^*)$  处的值.

在近似等式(1.8)两边除以  $y^*$ ,即得近似值  $y^*$  的相对误差

$$e_r^*(y) \approx \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^* \frac{x_1^*}{y^*} e_r^*(x_1) + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^* \frac{x_2^*}{y^*} e_r^*(x_2). \quad (1.9)$$

近似等式(1.8),(1.9)分别给出了二元函数绝对误差与相对误差的传播规律.用类似方法,可分析一般函数的误差传播规律,并得到类似的估计式.