现代
中学数学教育原理

孙瑞清 朱文芳 编著

XIANDAI ZHONGXUE
SHUXUE JIAOYU YUANLI

四川教育出版社

现代中学数学教育原理

孙瑞清　朱文芳　编

四川教育出版社

1990年·成都

责任编辑：刘　玲
封面设计：刘金蓉
版面设计：唐　瑛

现代中学数学教育原理　　孙瑞清　朱文芳　编著

四川教育出版社出版发行　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　　四川巴蜀印刷厂印刷

开本850×1168毫米1/32　印张9　插页4　字数204千
1990年5月第一版　　1990年5月第一次印刷
印数：1—1650 册

ISBN7—5408—1261—3/G·1225　　定价：3.98元

内 容 简 介

本书系统地阐述了现代中学数学教育的基本原理，既简明地论述了数学的本质、教育价值及中学数学的教学目的，又扼要地阐释了现代学习理论与数学学习、现代教学过程理论与数学教学、现代课程理论与中学数学课程的关系，以及数学教学的评价技术和学科教育实验方法论。

本书理论联系实际，具有科学性、准确性和实用性等特点。内容丰富，实例典型，深入浅出，通俗易懂。本书可作为高等师范院校数学专业有关课程的教材及中学数学教师和教育工作者的参考书。

前　言

近年来，我国社会主义教育事业在三个面向的战略方针指导下，从教育体制、教育思想、教学内容和方法以及教学管理等方面，都进行了许多改革的尝试和探索，并以强大的冲击波震动着传统的数学教育理论。

为适应我国政治和经济体制改革的迅猛发展，必须给数学教育以新的生命力。要以新的思想、新的理论和新的方法，武装传统的数学教育，使中学数学教育跻身于现代教育之列。

当前，我国中、小学数学教育存在着许多问题：

第一，从课程的内容来看，选材偏于陈旧。虽然也注意到渗透一些现代数学的思想方法，但在处理方法上大多不自然，从整体结构上讲，缺乏统一的活力。

第二，由于片面地强调“升学率”、“及格率”，许多数学课不是强调数学的基础理论、基本思想和方法等数学的本质，而是代之以“知识＋例题＋类型＋解法”一类呆板、僵化的解题术，随之而来的便是“题海战术”。这是不利于学生的智能

发展的。

第三，由于片面地强调智力因素的教学，而忽视非智力因素的教育。在数学教学中，不注意激发学生的学习兴趣、动机和对待数学的态度，更不注意数学中的美育。因而对许多学生来说，学习数学是件苦事，再加之种种社会因素，“厌学”现象成了引人注目的问题。

第四，近年来，虽然提出过各种教法改革。例如自学辅导、单元教学、精讲多练、讲讲议议，等等。但大多强调本教学方法的一般模式，而未能从教材的“知识结构”结合学生的“认识结构”，组成“教学结构”的观点出发，选择与优化教学方法，具体分析、具体运用。因此，常常带来一定的片面性。

第五，在教学评估上，我们还缺乏必要的科学评价手段。还不能自觉地、有效地利用教学反馈原理，为达到一定的教育目标，及时调整教学的进程和节奏，以形成适合于学生学习的教学内容和教学方式，等等。

综上所述，这些问题不仅严重地影响着数学教学的质量，而且也影响着学生身心的一般发展。追究产生这些问题的原因是比较复杂的，是多因素的。但可以划为宏观与微观两大因素。

就宏观因素而言，将涉及到教育政策、就业政策、社会心理等方面，这些对学科教育来说是不太好控制的。但是侧重微观因素来说，却是大有探讨的余地。这至少与以下的理论和实践的认识问题有关。

第一，数学的本质是什么？

第二，数学教育的价值与中学数学教学目的是什么？

第三，课程设置的基本原理是什么？

第四，怎样把现代学习理论应用于数学教学？

第五，如何应用现代教学基本理论指导数学教学？

第六，在中学数学教学中怎样进行教学研究与科学实验？

第七，怎样在数学教学中应用现代教学评价的理论与技术，等等。

以上问题已经引起国内数学教育工作者的注意，但是系统的全面论述的文字还不多，为改进中学数学教学，促进数学教学的改革，笔者结合多年从事中学数学教育的实验与大学数学教育理论课程开设的实践，对上述涉及现代中学数学教育的基本理论与实践问题作一初步探讨。

在本书的编写过程中，我们力求：

1．在继承传统数学教育的成功经验的基础上，注意扩张与发展中学数学教育的现代基础。

2．在注意数学本质与科学特点的基础上，注意现代数学理论与学习理论的应用。

3．在阐述介绍一般原理和方法时，尽量结合数学教学的实际。

但是，由于我们的水平所限，书中对许多问题的认识和分析不免会有缺点和错误，恳请读者批评指正。

在本书的编写过程中，笔者参阅了不少国内外作者的著作、论文、论著等，颇受教益，在此深表谢意！

编著者

1989年3月于北师大

目　录

第一章 数学的本质

数学教育的对象，简单地说，首先可以概括为“教什么内容”，也就是教给学生哪些数学知识（包括数学思想和方法）以及形成怎样的数学技能．其次是“如何教好学生，如何创造适合于学生学习的最优化的教学方式”，以利于学生个性的全面发展．这就要求数学课程、数学教学和数学学习三者的和谐统一．要作到这一点对于中学数学教师或数学教育工作者，必须对数学学科本身有较深入的理解，只有了解了数学的对象、思想方法及其发展规律等数学的本质问题，才会较容易地理解作为教学科目的数学课程及其教学的目的和任务，才有可能处理好数学教学过程中教与学的辩证关系．因此，本书的第一章首先简要地概述一下作为科学的数学的本质问题．

第一节 数学的研究对象

数学的研究对象也就是“什么是数学”。数学，像其他各门科学一样，是随着人类社会的实践而萌发，并随着社会的进步而发展的。从古至今在数学漫长的发展道路上，它总是取决于社会的实践活动。一方面它促进着生产的发展，即物质文明和精神文明的发展；另一方面它又受着社会实践和一定时代的哲学思想的制约。在人类文明史上，由于人们的社会意识和哲学观点不同，历来对数学有各种不同的理解和看法。不管这些看法在提法上如何，但从本质来看，只有唯心主义及形而上学的解释和辩证唯物主义的解释两大家。马克思主义的创始人之一恩格斯则是历史上以辩证唯物主义观点给数学以科学定义的创始人。

恩格斯在《反杜林论》中写道：“可是如说在纯粹数学中理性所涉及的只是自身的创造和想象的产物，那是完全不对的。数和形的概念不是从任何地方得来的，而仅仅是从现实世界中得来的。……纯数学是以现实世界的空间的形式和数量关系——这是非常现实的材料——为对象的”。①

恩格斯的上述论断便为我们揭示了作为科学的数学的本质。

① 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社，1956年版，第37页。

一、数学产生于人类生活的实际需要

数学对象所反映的是非常现实的材料，绝非“理性的、思维的自由创造物”．这一点已为数学萌芽时期到现代数学的整个数学史所证明．

在数学萌芽时期，人类文明还处在非常原始的阶段，数学就已经在实际的社会生活中产生了．例如，据历史记载，大约在公元前2900年，举世闻名的金字塔就被建造了，由此证明在四、五千年前的埃及人不仅掌握了高度的建筑技术，而且也懂得了不少几何知识．又如在公元前1300年古埃及第19个王朝法老塞斯特里斯（Sesostris）把当时全埃及的土地作过一次划分，他把同样大小的正方形的土地分配给所有的人，并要土地持有者每年向他缴纳租金，作为他的主要税收．如果河水冲毁了某人分得的土地的任何一部分，国王便派人来调查、测量损坏地段的面积，并相应地减收租金，这就是古埃及产生的几何学．后来埃及的几何知识传入了古希腊，经过希腊人的努力，才逐步发展成了具有严谨理论体系的几何学．

黄河、长江是中华民族的摇篮，考古学表明，“仰韶文化”和“龙山文化”的发现，证明了在距今6000—7000年前黄河流域等地区已经有了农业、畜牧业，制造彩陶、加工石器和纺织缝纫等，出土的陶器上已有各种几何图案．到了公元前1400年的商代，开始有了青铜铭文和甲骨文的纪录．根据甲骨文的记载，公元前14世纪到公元前11世纪，中国已有了十进制（见表1—1）

另外，甲骨文上还出现了“规”和“矩”，由此可以推知，当时人们极可能已掌握了“规”和“矩”用以画方、圆．从商代出土的大量造型准确、图案优美的青铜器就可证明这一点．公

表1-1

标准近代体	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千
商代甲骨文体	一	二	三	亖	㐅	介	十	)(	ζ	|	百	千

元前 1 世纪的“周髀算经”和“九章算术”的出现，不仅说明了当时的数学与天文、农业、历法、商业、建筑、测量等现实生活的密切联系，而且再次证明了数学来源于实践这一正确论断，也说明了中国古代数学的伟大成就及其对人类早期文明所作的重大贡献。

在现代数学时期，虽然数学已发展得如此抽象、如此丰富多采。但归根结底数学的对象仍然是反映现实的。这不仅从“对策论”、“规划论”、“排队论”、“最优化方法”、“运筹学”、“信息论”、“控制论”、“计算机科学”等应用数学的各个分支得到证明，而且从纯粹数学（基础理论）中也可看出它的现实原型。

我们知道微积分起源于力学问题（已知连续运动的路程，求给定时刻的速度，即微分法；已知运动的速度，求给定时间内经过的路程，即积分法）和一些几何问题（如求曲线的切线和确定面积、体积等)的研究。17世纪末牛顿和莱布尼兹(Leibnitz)虽然从研究上述实际问题中发现了微积分，但对其理论基础——极限论却是十分模糊的。尽管如此，微积分的创立在实际应用中显示了其伟大的生命力。这一事实不仅告诉我们实践是检验真理的客观标准，也告诉我们正是数学内部的矛盾性推动着数学的发展。到了19世纪，柯西等人终于解决了数学分析的基础问题，引入了严格的极限定义，即用不等式来刻划极限过程。但是呆板的不等式推演，失去了牛顿、莱布尼兹当初使用“无穷小量”直观、生动的解决问题的思想方法。后来，直到1960年，鲁宾孙（Abraham Robinson）才运用数理逻辑的方法，把它建立在严格的理论基础之上，并于1966年发表了《非标准分析》，使无穷小量获得了新生。现在非标准分析方法已广泛应用于物理学以及实变函数论、复变函数论、拓扑学、李群、泛函分析、数论等现代数学的许多领域。

客观世界中存在着大量确定性的依存关系，在数学上就用函数这个概念来描述它，因而有了微积分、微分方程、积分方程、实变函数论、复变函数论等研究函数的数学方法。另外，客观世界中还存在着大量的随机性的偶然现象，为了探究大量偶然现象中的必然性——统计规律性，就产生了概率论与数理统计的方法。

由于客观世界的复杂性，决定了客观事物除了确定性与偶然性的矛盾之外，还有精确性与模糊性的矛盾。例如，“年轻”、“美丽”、“喜欢”、“效果”……都是模糊现象，对待这些模糊现象，精确数学就显得无能为力了。因此，由于客观现实的需要，必须把数学的基本概念加以推广，于是产生了刻划复杂的模糊现象的模糊集的新概念，伴随着它在广泛领域中的应用，形成现代数学的一个新分支——模糊数学。这样，使整个现代数学结构产生了新的变化，形成了经典数学、统计数学和模糊数学的新趋势。

二、数学的抽象性

数学是反映现实的，但它不是像照像机一样机械映射，而是从现实世界的各种复杂事物中抽象出“数量关系”和“空间形式”，在纯粹形态下加以研究。按照恩格斯的观点，纯粹数学是研究现实世界的数量关系和空间形式。这里至少产生两个问题：第一，数学的抽象性特点是什么？第二，在恩格斯写《反杜林论》时（1876—1877年），数学还远没有发展到现代数学这样复

杂，那么在今天对于“数量关系”和“空间形式”如何理解呢？

（一） 数学抽象性的特征

数学的对象既然是研究现实世界的数量关系和空间形式，那么这些关系和形式客观地具有与内容无关的性质。这种无关甚至达到这样一种程度，它们完全从内容中抽象出来，并在一般形态中加以定义，在确保精确性与明确性的前提下，保持概念间和基本性质间的丰富联系，以至成为理论发展的逻辑根据。正是数学具有的这种抽象思辩的特点，才使数学理论的发展离开具体客观事物的束缚，而张开自由腾飞的翅膀。这一点和其他科学的抽象有所不同，一般科学感兴趣的是把自己的抽象公式和某一领域中对应的现实问题联系起来；把所形成的抽象系统与研究所给定现象的领域联系起来。这样看来，一般科学的抽象不是绝对脱离考察对象的抽象，这种抽象总与被考察的对象的应用界限相适应。但是数学的抽象却不然，它完全舍弃了具体现象，而从“关系”与“形式”这一侧面去研究一般性质，在抽象中考察这些抽象系统本身，而不去考虑它与具体现象的应用界限。所以，从这个意义上说，数学的抽象是绝对的抽象，这种高度的抽象为数学所特有。正是因为数学抽象的绝对性，才相应地产生了以下几点特征：①数学思维的辩证性；②数学逻辑的必然性和数学结论的准确性；③数学的新概念和新理论产生于数学内部的可能性；④数学应用的广泛性，等等。从以上这些特征的意义上说，数学的抽象性是数学力量的所在，是数学用于解决社会实践中的具体而广泛的问题所必须的。值得再补充说明的是：①数学之所以能够这样抽象的考察其对象，是因为在其所考察的对象自身中存在着客观根据，这就是那些反映在数学中不依赖于质的特点或具体内容的一般形式、关系、相互联系等，是不依赖于我们的意识而独立

地存在着的客观规律性。②数学有其严密的逻辑性，那么合乎逻辑的东西就一定是真理吗？我们知道虚数的产生，它不像整数那样反映了物体集合的客观性． 而 是从数学内部作为方 程 $x^2=a$（$a<0$）的根，从代数的发展中合乎逻辑地出现的。虽然在很长一段时期人们习以为常的运用着它，但它的现实意 义却 弄 不 清楚，因此称它为虚数。后来由于发现了它的几何解释，更由于复变函数在流体力学和空气动力学中有着广泛的应用，虚数才成为不虚。所以合乎逻辑的东西，仅仅反映了纯粹形态下的关系或形式之中的某种必然联系，还不能称其为真理，只有客观实践才是检验它的真理性标准。

（二）现代数学从本质上看仍然是研究客观世界的数量关系和空间形式

我们可以这样说，现代数学的发展，并不意味着恩格斯关于纯粹数学的对象是研究现实世界的数量关系和空间形式的观点已经过时。不过我们根据现代数学的更高的抽象水平，要对“数量关系”和“空间形式”的最初理解作更加广义的解释。例如多维空间或无限维空间中的图形，当然不是普通意义下的空间形式。普通意义下的空间形式和现实空间联系着，它有现实意义。而数学上的更加抽象的空间虽然脱离普通意义下的空间形式，但它却保持着与普通的现实空间的“类似性”。例如，当我们研究一个物理现象时，我们通常把所要考察的对象称作物理系统，并通过量的变化来刻划这个物理系统的特征。刻划物理系统诸量的全体叫做这个物体系统的状态。比如用 n 个量来刻划这个物理系统，那么向量（$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$）就表示着这个物理系统的状态。当上述向量中的$\alpha_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）改变时，就意味着这个物理系统状态的变化． 事实上， 如果把上述向量看作 n 维空间中一个点的坐

标，那么某种连续变化的物理系统的状态，便可看成是这个 n 维空间中的一条曲线。这样，在抽象的 n 维空间中就找到了它的一个物理模型。这不仅说明了抽象空间和通常的现实空间的“相似性”，也说明了抽象空间概念内涵的丰富性。

超出原来定义下的数量关系和空间形式的另一个例子可以说是数理逻辑的产生。数理逻辑研究的对象是建立数学推理，它从给定的前提条件出发，来研究可以推出哪些命题。它在完全抽象的形式下，把逻辑语句变成式子，而把推理规则变成这些式子的运算法则。这样，它的前提和结论，公理和定理之间的关系显然不是普通意义下的数量关系，但是这些关系和通常意义下的数量关系也保持着一定的“相似性”，正是因为具有这种“相似性”，才有可能把数学方法应用于数理逻辑的研究。

如上所述，如果我们对古典数学时期的“数量关系”和“空间形式”作广义的理解，那么恩格斯关于纯粹数学的定义对现代数学来说，仍然是适用的。

三、数学在现实生活中的应用

根据恩格斯的观点，应用数学研究、解决社会实践、科学实验和生产活动中的实际问题，其可能性的依据是什么呢？

我们的解释只能是数学是从现实世界中抽象出来的，它反映的是现实世界固有的量与形的一般关系和形式。数学理论具有高度的抽象性，使其更深刻地反映着客观现实，这一点正如列宁所阐述的认识运动规律性的观点：“当思维从具体的东西上升到抽象的东西时，它不是离开——如果它是正确的……——真理，而是接近真理。物质的抽象，自然规律的抽象，价值的抽象及其他等等，一句话，那一切科学的（正确的、郑重的、不是荒唐的）