高等数学

GAODENGSHUXUE

第三版 下册

何瑞文 胡 成 杨 宁 周海东 编

涂汉生 主审

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

高　等　数　学

第三版　　下册

何瑞文　胡　成
杨　宁　周海东　编

涂汉生　主审

西南交通大学出版社
·成都·

目 录

第七章　三维空间中的向量、平面与直线

在高中数学中已学习了平面中的向量及其运算，本章将介绍三维空间中的向量及其运算，并以向量作工具来研究空间解析几何中的平面与直线，为进一步学习多元微积分提供必要的几何基础知识.

第一节　向量及其线性运算

一、空间直角坐标系

当我们在平面上建立了直角坐标系之后，就把平面上的点与有序数组、曲线与方程建立了对应关系，并借此用代数方法来研究几何问题，这就是平面解析几何学. 为此，我们首先建立空间直角坐标系.

过空间某定点 O 作三条两两互相垂直的数轴，它们都以 O 为坐标原点，且有相同的长度单位，依次称它们为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴）. 在其正方向上配置右手法则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，竖起的大拇指的指向为 z 轴正向. 这时我们称在空间建立了一个直角坐标系 $Oxyz$（或 $O-xyz$），并称 O 为坐标原点.

设 M 是空间某点，过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，并依次交坐标轴于 P、Q 和 R 三点，如图 7－1(1)所示，并分别称它们为点 M 在 x 轴、y

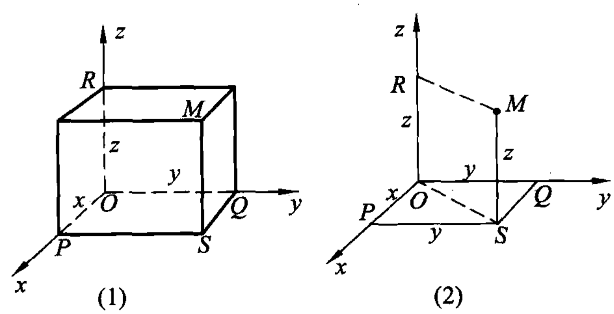


图　7－1

轴、z轴上的投影，它们的坐标分别为 x,y,z. 由此可知点 M 唯一确定了有序数组 x,y,z；反过来，对给定的有序数组 x,y,z，较容易地可以唯一确定空间点 M. 可见，有序数组 x,y,z 与点 M 建立了一一对应关系. 称数组 x,y,z 为点 M 的坐标，并记为 $M(x,y,z)$，其中依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标. 为简略计点 M 的坐标常如图 7－1(2)所示。

每两条坐标轴可以确定一个平面(称为坐标面)，分别称为 xOy,yOz,zOx 坐标面，它们互相垂直. 这三个坐标面把空间分为 8 个部分，称为 8 个卦限. 在 xOy 面上方的四个卦限，编号为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限，而 xOy 面下方的四个卦限，编号为Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限，如图 7－2 所示.

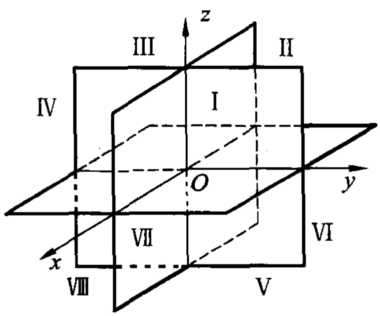


图 7－2

注意：当 M 在第五卦限时，它的坐标 $x>0,y>0,z<0$；当 M 点在 xOy 面上时，它的竖坐标 $z=0$；如果点 M 在 z 轴上时，它的 x,y 坐标均为零.

二、空间两点的距离公式

设空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$，为了表示 M_1,M_2 两点的距离，我们可以像图 7－1(2)一样，分别画出它们的坐标，如图 7－3 所示.

注意：这里的 P_1,P_2 分别是 M_1,M_2 在 xOy 面上的投影. 连接 P_1P_2，则四边形 $M_1P_1P_2M_2$ 是一直角梯形，过 M_1 作 $M_1M//P_1P_2$，交 P_2M_2 于 M，容易得

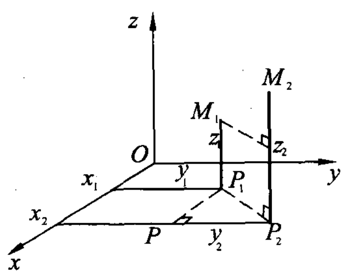


图 7－3

$$|M_1M_2|^2 = |M_1M|^2 + |MM_2|^2 = |P_1P_2|^2 + (z_2 - z_1)^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

于是

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

三、向量、向量的坐标表示

1. 向量、向量的几何表示

在自然科学中，有些量仅用它的大小不足以描述它所产生的效果. 如一个力作用于某物体，如果只说明力的大小而不说明力的方向，就无法确定该力作用于此物体产生的效果. 因此，我们称这种既有大小，又有方向的量为**向量**(或**矢量**). 例如力、位移、速度、加速度、力矩等都是向量. 向量通常用黑体的小写字母(英文或希腊文)或在字母上方加箭头来表示，如 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\alpha}$ 或 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\alpha}$. 在几何上用有向线段来表示向量，如 $\overrightarrow{AB}$，它的长记为 $|\overrightarrow{AB}|$，表示向量的大小，称为向量的模，从起点 A 到终点 B 的方向，表示向量的方向. 特别地，长度为 0 的向量称为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$，它的方向不确定(见图 7－4).

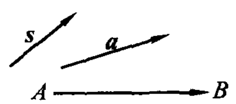


图　7－4

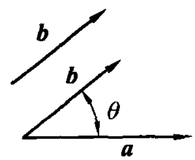


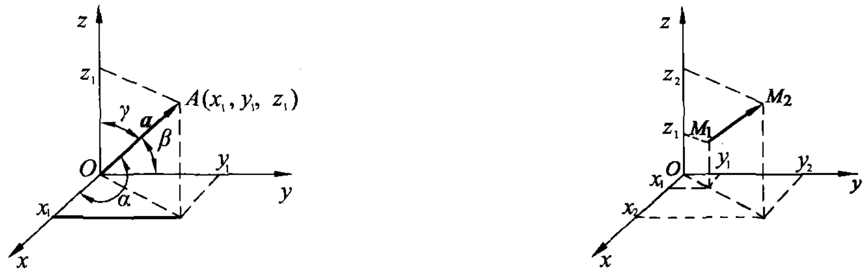
图　7－5

两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$，如果大小相同且方向一致，我们就称它们相等，记为 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

按这个定义，向量可以在空间**平移**. 通过向量平移，把两个向量的起点重合，它们正向所在射线之间的夹角 θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$，称为两个向量的夹角，常记为 $\theta = (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$，如图 7－5 所示.

2. 向量的坐标表示

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 下，先看一个特殊的情况. 设有非零向量 $\boldsymbol{a}$，它的起点为原点，终点为 $A(x_1, y_1, z_1)$(见图 7－6(1))，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向之间介于 0 到 π 之间的夹角，常记为 α, β, γ. 并称它们为 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**. 其余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 当向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角确定后，它的方向就被确定了.



(1) (2)

图 7-6

特别注意:有

$$x_1=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha, y_1=|\boldsymbol{a}|\cos\beta, z_1=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma.$$

因此我们分别称它们为 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影,而且向量 $\boldsymbol{a}$ 与有序数组 x_1, y_1, z_1 建立了一一对应关系,所以也称 x_1, y_1, z_1 为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标**,记为

$$\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1) \quad (\text{或 } \boldsymbol{a}=\{x_1, y_1, z_1\})$$

再看更一般的情况.设非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$,其中 $M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$(见图 7-6(2)).假如将向量$\overrightarrow{M_1M_2}$平移使 M_1 置于原点,此时向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角,数组 $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1$ 不会改变,所以此时称数组

$$a_x=x_2-x_1、a_y=y_2-y_1、a_z=z_2-z_1$$

为向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影或向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标,记为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) \quad 或 \quad \boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z).$$

同时有公式

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

它们满足下列条件:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

例 7-1 设已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$,计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标、模及方向余弦、方向角.

解　向量的坐标为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2}),$$

它的模为

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2.$$

它的方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

方向角为

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3}{4}\pi.$$

三、向量的加法与数乘

1. 向量的加法

在物理与力学中，两个力 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{g}$ 同时作用于某质点 O，其合力由平行四边形法则或三角形法则确定，如图 7 - 7 所示. 所以在几何上两个向量的加法，用多边形法则或三角形法则.

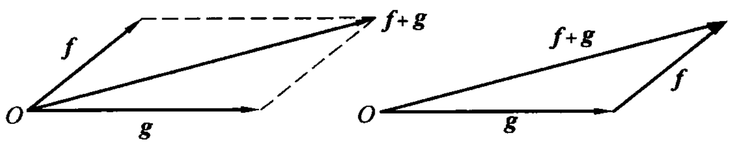


图　7 - 7

下面给出向量加法的坐标表达式. 由图 7 - 8 可知，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}=(b_x,b_y,b_z)$，且设点 B 的坐标为 x,y,z，按三角形法则可得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}=(x,y,z).$$

因点 A 的坐标是 a_x,a_y,a_z，且

$$\overrightarrow{AB}=(x-a_x,y-a_y,z-a_z),$$

故有

$$b_x=x-a_x,\quad b_y=y-a_y,\quad b_z=z-a_z,$$

即

$$x=a_x+b_x,\quad y=a_y+b_y,\quad z=a_z+b_z.$$

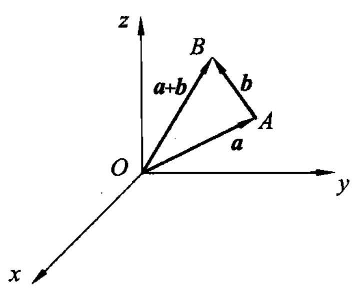


图　7 - 8

于是有公式

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z).$$

由此易知向量的加法满足：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

2. 向量与数的乘积

设 λ 为实数，$\boldsymbol{a}$ 为向量，我们定义：

$$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$$

为一向量，$\boldsymbol{b}$ 的模

$$|\boldsymbol{b}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

当 $\lambda>0$ 时，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向；当 $\lambda<0$ 时，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

特别地，

$$(-1)\boldsymbol{a}\overset{\Delta}{=\!=}-\boldsymbol{a}$$

是与 $\boldsymbol{a}$ 反方向且长度相同的一个向量，常称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量. 由此可知

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\overset{\Delta}{=\!=}\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

注意：如图 7-9 所示，若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 分别是以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的两条对角线向量. 由于三角形两边长之和不小于第三边之长，两边长之差不大于第三边之长，故有

$$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

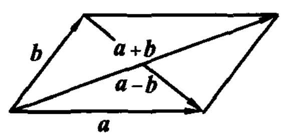


图 7-9

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，则 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{e}_a$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量（长度为 1 单位）. 于是

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.$$

定理 7-1-1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是向量，且 $\boldsymbol{a}\neq 0$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$（共线）$\Leftrightarrow$ 存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$（称 $\boldsymbol{b}$ 可用 $\boldsymbol{a}$ 线性表示）.

证 **必要性.** 若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，则取 $\lambda=0$，即证. 若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 知

$$\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},$$

即

$$\boldsymbol{b}=\pm\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}.$$

充分性 若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，由数乘的定义即知 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

推论 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则必有 $\lambda_1=0,\lambda_2=0$.

在 $Oxyz$ 直角坐标系下，如果 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，对任意实数 λ，有

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

现给出证明如下：当 $\lambda>0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 有相同的方向角. 令 $\lambda\boldsymbol{a}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$b_x=|\lambda\boldsymbol{a}|\cos\alpha=\lambda|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=\lambda a_x.$$

同理可证

$$b_y=\lambda a_y,b_z=\lambda a_z.$$

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向，它们的方向角关于 π 互补. 设 $\alpha_1=\pi-\alpha,\beta_1=\pi-\beta,\gamma_1=\pi-\gamma$，于是

$$b_x=|\lambda\boldsymbol{a}|\cos\alpha_1=-\lambda|\boldsymbol{a}|(-\cos\alpha)=\lambda a_x$$

同理有

$$b_y=\lambda a_y,b_z=\lambda a_z.$$

当 $\lambda=0$ 时，显然成立.

当向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

数乘向量运算满足：

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}\quad(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$$

如果向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别是 x 轴、y 轴、z 轴正方向上的单位向量，那么空间的任一向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 都可以把 $\boldsymbol{a}$ 表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=(a_x,a_y,a_z)=(a_x,0,0)+(0,a_y,0)+(0,0,a_z)\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

称上式为把向量 $\boldsymbol{a}$ **按基本单位向量的分解式**，其中 $a_x\boldsymbol{i},a_y\boldsymbol{j},a_z\boldsymbol{k}$ 分别叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的**分向量**. 也称向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的**线性组合**.

例 7－2 用向量证明三角形的中位线定理.

解 如图 7－10 所示，E,F 分别是 AB,CB 的中点，于是

$$\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\quad\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

所以
$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

可见 $EF/\!/AC$，且 $EF=\frac{1}{2}AC$.

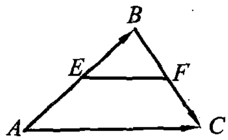


图　7-10

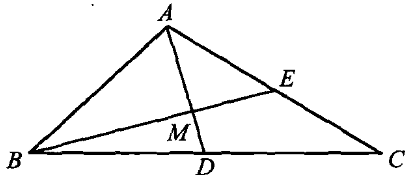


图　7-11

例 7-3　用向量证明如果 M 是$\triangle ABC$ 的重心，即 M 是中线 AD，BE 的交点，则 $AM=\frac{2}{3}AD$.

证　如图 7-11 所示，存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD}$. 又因 D 为 BC 边的中点，所以

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),$$

则

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD}=\frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),$$

同样，存在 $\mu\in\mathbb{R}$，

$$\overrightarrow{BM}=\mu\overrightarrow{BE}=\mu\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\mu\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right).$$

在$\triangle ABM$ 中，因$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}=\mathbf{0}$，即

$$\overrightarrow{AB}-\mu\overrightarrow{AB}+\frac{\mu}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\mathbf{0},$$

$$\left(1-\mu-\frac{\lambda}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)\overrightarrow{AC}=\mathbf{0},$$

因 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不共线，从而

$$\begin{cases}1-\mu-\dfrac{\lambda}{2}=0,\\[2ex]\dfrac{\mu}{2}-\dfrac{\lambda}{2}=0,\end{cases}$$

有 $\lambda=\mu=\frac{2}{3}$.

例 7-4(定比分点)　设有两点 $A_1(x_1,y_1,z_1)$，$A_2(x_2,y_2,z_2)$，求点 $B(x,y,z)$ 内分线段 A_1A_2 为定比 λ.

解　B 点内分线段 A_1A_2 为定比 λ，是指在线段 A_1A_2 内插入 B 点，使$\overrightarrow{A_1B}=\lambda\overrightarrow{BA_2}$. 即

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z),$$

比较其坐标可得

$$x-x_1=\lambda(x_2-x_1),\quad y-y_1=\lambda(y_2-y),\quad z-z_1=\lambda(z_2-z),$$

所以分点坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

特别地，当 $\lambda=1$ 时得 AB 中点坐标公式

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\quad y=\frac{1}{2}(y_1+y_2),\quad z=\frac{1}{2}(z_1+z_2).$$

习 题 7-1

1. 已知两点 $A(4,\sqrt{2},1)$ 和 $B(3,0,2)$，求向量$\overrightarrow{AB}$的坐标、模及方向余弦.

2. 已知$|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}$ 的两个方向余弦 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}$，$\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}}$，求 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

3. 已知点 $A(3,-1,2)$，$B(1,2,-4)$，$C(-1,1,2)$，试求点 D，使得以 A,B,C,D 为顶点的四边形为平行四边形.

4. 已知正六边形 $ABCDEF$（字母顺序按逆时针），记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 线性表示向量$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}$和$\overrightarrow{CB}$.

5. 证明：三点 $A(1,0,-1)$，$B(3,4,5)$，$C(0,-2,-4)$共线.

6. 设有向量 $\boldsymbol{\alpha}=(3,5,-1)$，$\boldsymbol{\beta}=(2,6,4)$，$\boldsymbol{\gamma}=(4,-3,2)$，求 $2\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\beta}+4\boldsymbol{\gamma}$.

7. 求 λ,μ，使 $\boldsymbol{a}=(1,\lambda,3)$与 $\boldsymbol{b}=(\mu,-6,2)$平行.

8. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，试用单位向量 $\boldsymbol{e}_a,\boldsymbol{e}_b,\boldsymbol{e}_c$ 表示向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$.

9. 已知平行四边形$\square ABCD$，边 BC、CD 的中点为 K、L，且$\overrightarrow{AK}=\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{AL}=\boldsymbol{l}$. 求$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{CD}$.

第二节 数量积 向量积 混合积

一、两个向量的数量积（内积、点积）

设一物体在常力 $\boldsymbol{f}$ 的作用下沿直线从点 M_0 移动至点 M（见图 7-12），即位移为$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_0M}$，那么 $\boldsymbol{f}$ 所做的功：

$$W = |\boldsymbol{f}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$$
$$= |\boldsymbol{f}||\boldsymbol{s}|\cos(\widehat{\boldsymbol{f},\boldsymbol{s}}).$$

由此实际背景，我们来定义两个向量的一种运算：

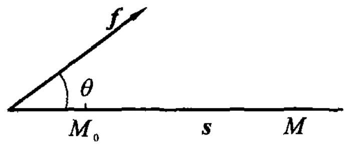


图　7-12

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个向量，它们的夹角为 θ，称数量

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$$

为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

向量的数量积也叫内积或点积.

按定义，$\boldsymbol{f}$ 所做的功 $W=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}$.

当 $\theta=0$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2,$$

故
$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}.$$

下面我们导出向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积的坐标表达式.

在图 7-13 中，由余弦定理有

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2),$$

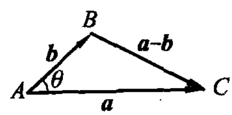


图　7-13

可以验证，当 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 时，上式也成立. 现设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，代入上式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}[(a_x^2+a_y^2+a_z^2)+(b_x^2+b_y^2+b_z^2)-(a_x-b_x)^2-(a_y-b_y)^2-(a_z-b_z)^2] \\ &= a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

数量积满足下列运算律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

(2) 分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

(3) 数乘的结合律：$\lambda、\mu\in\mathbb{R}$，$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

由此可得 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 的计算公式：

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

另外，还有一个非常重要的结论：

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Longleftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

例 7-5 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,\sqrt{2})$，$\boldsymbol{b}=(0,1,0)$，计算它们的夹角 θ.

解 由公式有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1\times0+1\times1+\sqrt{2}\times0}{2\times1}=\frac{1}{2},$$

故 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

例 7-6 设 a_1,a_2,a_3 及 b_1,b_2,b_3 为任意两组实数，证明：

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}.$$

证 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，由

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),$$

立即有

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|,$$

代入式中即得要证的不等式.

二、两向量的向量积

1. 向量的运算

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是三维空间中的向量，它们的向量积记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它是一个向量，记为 $\boldsymbol{c}$，即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}.$$

$\boldsymbol{c}$ 的模为

$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

$\boldsymbol{c}$ 的方向如下规定：$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$ 且 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 符合右手法则，如图 7-14 所示. 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{c}$ 也称为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的**叉积**或**外积**.

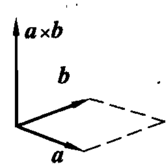


图 7-14

从定义中注意到：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{0}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.\quad(\text{模为 }0)$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\quad(\text{因}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}|=0).$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\quad(\text{右手法则})$$

即向量积满足反交换律，还可以证明向量积满足以下运算律：

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c};$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})\quad\lambda\in\mathbb{R}.$$

从定义中还可以看到

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),$$

正好是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积. 当 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时,它垂直于平行四边形所在的平面.

2. 重要结论

设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$(共线)$\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证 "$\Rightarrow$" 从定义易得.

"$\Leftarrow$" 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有一个为零向量,命题成立. 现设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均非零向量,由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,必有

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0,$$

从而 $\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$,即 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$、$\pi$,可见 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

3. 向量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+\\&\quad a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+\\&\quad a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

注意到

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}.$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j},$$

故整理可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_z&a_x\\b_z&b_x\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

利用三阶行列式比较容易记住 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的坐标表达式.

例 7-7 设平面 Π 过空间三点 $A(1,0,0)$,$B(3,1,-1)$,$C(2,-1,2)$,求一个垂直于平面 Π 的且指向上的向量 $\boldsymbol{n}$.

解 由两个向量的向量积知,先求$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$的向量积,因$\overrightarrow{AB}=(2,1,-1)$,$\overrightarrow{AC}=(1,-1,2)$,故

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

考虑到所求向量 $\boldsymbol{n}$ 指向上，故取

$$\boldsymbol{n}=-(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=(-1,5,3).$$

例 7-8　设 l 是空间过点 $A(1,2,3)$，$B(3,4,5)$ 的直线，点 $C(2,4,7)$ 是空间一点，试求点 C 到直线 l 的距离 d.

解　作向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$，从图 7-15 中可以看出，点 C 到 l 的距离 d 是以$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$为邻边的平行四边形的高. 由叉乘的几何意义，有

$$d|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

即有公式

$$d=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

因$\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$，则

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

所以 $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{3}$，　$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{14}$，故所求距离为

$$d=\frac{2\sqrt{14}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{42}.$$

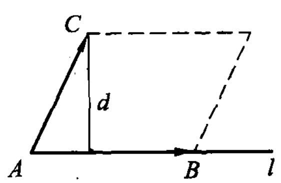


图　7-15

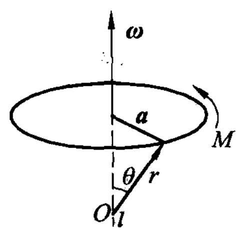


图　7-16

例 7-9　设刚体以等角速度 ω 绕 l 轴旋转，计算刚体上一点 M 的线速度 $\boldsymbol{v}$.

解　当刚体旋转时，我们可用转动轴 l 上的向量 $\boldsymbol{\omega}$ 表示角速度，$|\boldsymbol{\omega}|=\omega$，它的方向按右手法则定出（见图7-16）.

设 M 到 l 轴的距离为 a，任取 l 轴上一点记为 O，并记 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，若用 θ 表示 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角，则

$$a=|\boldsymbol{r}|\sin\theta.$$