金题典

——初中代数思维训练

梁邦屏　编著

时代出版
时代出版传媒股份有限公司
安徽科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

金题典:初中代数思维训练/梁邦屏编著.—合肥:安徽科学技术出版社,2010.1
ISBN 978-7-5337-4547-9

Ⅰ.金…　Ⅱ.梁…　Ⅲ.代数课-初中-解题　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 227744 号

金题典——初中代数思维训练　　　　梁邦屏　编著

出 版 人:黄和平
责任编辑:倪颖生　叶兆恺
封面设计:朱　婧
出版发行:安徽科学技术出版社(合肥市政务文化新区圣泉路 1118 号出版传媒广场,邮编:230071)
电　　话:(0551)3533330
网　　址:www.ahstp.net
E - mail:yougoubu@sina.com
经　　销:新华书店
排　　版:安徽事达科技贸易有限公司
印　　刷:合肥创新印务有限公司
开　　本:850×1168　1/32
印　　张:13.75
字　　数:300 千
版　　次:2010 年 1 月第 1 版　2010 年 6 月第 2 次印刷
定　　价:21.00 元

前　　言

数与形是中学数学研究对象的两个方面，是中学生认识世界的基础和手段. 初中代数思维训练对中学生抽象思维能力和精确计算能力、逻辑推理能力的培养是极其重要、不可或缺的.

本书以新课程标准的初中代数知识为网络，以初中代数题的一题多解为主线，以解题后的反思为枢纽，试图全面系统地培养、训练中学生的发散思维能力和综合解题能力以及积极主动的创新精神，提高中学生的思维品质.

本书是作者多年中学数学教学研究的结晶，它具有以下特点：

一、本书选题遵循新课程数学标准，无难题、偏题、怪题. 并且按初中新课程数学课本的顺序进行编写. 既可作为初中代数学习的辅导教材，也可作为高中学生复习代数的参考资料.

二、本书共精选 318 道题，共有 986 种解法. 平均每题有 3 种以上不同的解法，最多的一题有 36 种解法. 本书的亮点是注重解题后的反思，查缺补漏，确保解题的合理性和正确性，提高综合解题能力.

三、本书与已往的一题多解书不同的是：本书面向全体初中学生和教师，而不仅针对部分学习尖子生. 本书可使学生通过纵横发散、知识串联、综合沟通，达到举一反三、融会贯通的目的. 本书是教师提高学生解题技能和技巧的施教资料；家长也可以从中挑选合适的题目辅导孩子或布置相关的家庭作业；本书是家庭教师不可多得的教材，是家庭教师的好帮手.

四、本书共分五讲：第一讲数与式；第二讲方程与不等式；第三讲函数；第四讲统计与概率；第五讲应用与探究. 本书选题虽少，但是做一道题等于做三道题，做 300 道题等于做 1000 道题，从而可以

减轻学生负担，提高学习效率.

作者对在本书写作过程中给予帮助的马飞、方明一、黄璋、黄东坡、翟连林、贾士代、安振平、刘康宁、戴再平、蒋金镛、汪艳、梁作宇、王乐超等同志表示衷心的感谢！其中汪艳同志做了许多打字和校对的工作。

限于作者的水平和时间，书中解法难免挂一漏万. 对指出本书不足或提供新的解题方法的热心读者，作者将给予一定方式的感谢！

作　者

目　　录

第一讲　数　与　式

1. 有理数与实数

【题 1】 已知有理数 m,n 满足 $m>0,n<0,|m|<|n|$，则 $m,n,-m,-n$ 的大小顺序是________________.（用$>$连接）

解　取 $m=1,n=-2$，则 $-m=-1,-n=2$，

$\because 2>1>-1>-2$　$\therefore -n>m>-m>n.$

另解 1　根据题意，画数轴如图 1－1 所示。

从数轴上可知，$-n>m>-m>n.$

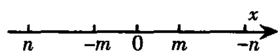

图 1－1

另解 2　$\because m>0,n<0,\therefore m>-m,m>n,$

又$\because n<0,|m|<|n|,\therefore -n>m,$

$\therefore -n>m>-m>n.$

反思　正解采用赋值法，一般只适用于填空题和选择题. 代数的特点就是用字母表示数，但字母具有抽象性，所以在条件允许的范围内赋予字母具体的数值，即赋值法，常能化难为易，但此法也有很大的局限性. 另解 1 借助于数轴、绝对值等概念，显得形象直观.

【题 2】 如果一个数的平方等于它的绝对值，求这个数.

分析　本题可用枚举法和方程思想分别求解.

解　$\because 0^2=0=|0|,1^2=1=|1|,(-1)^2=1=|-1|,$

$\therefore$这个数是 0 和±1.

另解　设这个数为 x，则 $x^2=|x|$，即：$|x|^2=|x|,|x|^2-|x|=0,$

$|x|(|x|-1)=0,\therefore |x|=0$，或$|x|-1=0,$

即$|x|=0$，或$|x|=1,\therefore x=0$，或 $x=\pm1,$

$\therefore$这个数是 0 或±1.

【题 3】 设 $A=\frac{20060606}{20080808}$，$B=\frac{20060607}{20080810}$，试比较 A 与 B 的大小.

解 设 $m=20060606$，$n=20080808$，则 $A=\frac{m}{n}$，$B=\frac{m+1}{n+2}$，

$\therefore A-B=\frac{m}{n}-\frac{m+1}{n+2}=\frac{m(n+2)-(m+1)n}{n(n+2)}=\frac{2m-n}{n(n+2)}$，

$\because 2m>n, n>0$，$\therefore \frac{2m-n}{n(n+2)}>0$，即 $\frac{m}{n}-\frac{m+1}{n+2}>0$，

$\therefore A-B>0$，即 $A>B$.

另解 设 $m=20060606$，$n=20080808$，则 $A=\frac{m}{n}$，$B=\frac{m+1}{n+2}$，

$\therefore \frac{A}{B}=\frac{m}{n}\div\frac{m+1}{n+2}=\frac{m(n+2)}{n(m+1)}=\frac{mn+2m}{mn+n}$，

$\because 2m>n$ $\therefore mn+2m>mn+n$，

$\therefore \frac{mn+2m}{mn+n}>1$，$\therefore \frac{A}{B}>1$，即 $A>B$.

反思 正解是通过作差法来比较 A 与 B 的大小的，而另解是通过作商法来比较 A 与 B 的大小的，并且这两种方法都巧妙地用字母表示数，避免了繁琐的计算，充分发挥了代数的特点和风格. 作差法和作商法是比较大小的两种常用方法.

【题 4】 计算：

(1)$(-1\frac{1}{7})(1\frac{3}{4}-\frac{7}{8}-\frac{7}{12})$；(2)$71\frac{15}{16}\times(-8)$；

(3)$78\times(-\frac{2}{3})+(-11)\times(-\frac{2}{3})+(-34)\times(-\frac{2}{3})$.

(1)解 原式 $=-\frac{8}{7}\times(\frac{7}{4}-\frac{7}{8}-\frac{7}{12})$

$=-\frac{8}{7}\times\frac{7}{4}+\frac{8}{7}\times\frac{7}{8}+\frac{8}{7}\times\frac{7}{12}=-2+1+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$.

另解 1 原式 $=-\frac{8}{7}\times(\frac{7}{4}-\frac{7}{8}-\frac{7}{12})=-\frac{8}{7}\times\frac{7}{24}=-\frac{1}{3}$.

另解 2 原式$=-\frac{8}{7}\times\frac{7}{8}\times(2-1-\frac{2}{3})=-1\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$.

(2)解 原式$=(71+\frac{15}{16})\times(-8)=71\times(-8)+\frac{15}{16}\times(-8)$

$=-568-\frac{15}{2}=-568-7\frac{1}{2}=-575\frac{1}{2}$.

另解 原式$=\frac{1151}{16}\times(-8)=-\frac{1151}{2}=-575\frac{1}{2}$.

(3)解 原式$=(78-11-34)\times\left(-\frac{2}{3}\right)=33\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-22$.

另解 原式$=-52+\frac{22}{3}+\frac{68}{3}=-22$.

反思 本题均有两种基本解法，一种是顺向运用乘法分配律：$a(b+c)=ab+ac$，或者逆向运用乘法分配律：$ab+ac=a(b+c)$，有时还要拆数后再运用乘法分配律；另一种是按一般运算规律进行运算．解题时应针对具体题目的特点，灵活进行运算，切实提高运算能力．

【题 5】 任意三个连续自然数的和一定能被 3 整除吗？若能，试加以说明．

解 设三个中最小的自然数是 n，则第二个是$(n+1)$，第三个是$(n+2)$．

$\because n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$，

$\therefore$任意三个连续自然数的和一定能被 3 整除．

另解 1 设中间的一个自然数是 n，则最小的一个是$(n-1)$，最大的一个是$(n+1)$．$\because (n-1)+n+(n+1)=3n$，

$\therefore$任意三个连续自然数的和一定能被 3 整除．

另解 2 设三个中最大的一个自然数是 n，则中间的一个是$(n-1)$，最小的一个是$(n-2)$．$\because n+(n-1)+(n-2)=3(n-1)$，

$\therefore$任意三个连续自然数的和一定能被 3 整除．

反思 为了说明问题，就必须使之具有一般性，因此就必须用字母

表示自然数的和，同时又要考虑是连续的自然数——后一个总比前一个大 1.

【题 6】 一个六位数的 6 个数字都不相同，最左边的一位数字是 1，表示为$\overline{1abcde}$(其中 a、b、c、d、e 分别为各数位上的数字)，将它乘以 3 后变为$\overline{abcde1}$，求这个六位数.

解 (直接推理法)$\because \overline{1abcde}\times 3=\overline{abcde1}$，且只有 $3\times 7=21$，

$\therefore e=7$；

即$\overline{1abcd7}\times 3=\overline{abcd71}$，$\therefore d=5$；

即$\overline{1abc57}\times 3=\overline{abc571}$，$\therefore c=8$；

即$\overline{1ab857}\times 3=\overline{ab8571}$，$\therefore b=2$；

即$\overline{1a2857}\times 3=\overline{a28571}$，$\therefore a=4$；

即 $142857\times 3=428571$. $\therefore$这个六位数是 142857.

以下运用方程思想求解.

另解 1(间接设法) 设这个六位数的后 5 位数字为 x，即$\overline{abcde}=x$，

则此六位数可表示为：$100000+x$，

根据题意，得 $3(100000+x)=10x+1$，

解这个方程，得 $300000+3x=10x+1$，$7x=299999$，

$\therefore x=42857$，$\therefore$这个六位数是 142857.

另解 2(直接设法) 设这个六位数为 x，即$\overline{1abcde}=x$，则$\overline{abcde}$可表示为：$x-100000$，根据题意，得 $3x=10(x-100000)+1$，

解这个方程，得 $3x=10x-1000000+1$，$-7x=-299999$，

$\therefore x=142857$，$\therefore$这个六位数是 142857.

另解 3(间接设法) 设这个六位数乘以 3 后所得的新六位数为 x，

即：$\overline{abcde1}=x$，则原六位数可表示为：$100000+\frac{x-1}{10}$，

根据题意，得 $3(100000+\frac{x-1}{10})=x$，解方程，得：

$3000000+3x-3=10x$，$-7x=-299999$，

$\therefore x=428571$，$\therefore$这个六位数是 142857.

【题 7】 比较$\frac{1}{3}$与 0.3 的大小.

解　$\because \frac{1}{3}=0.33333\cdots\cdots$，　$\therefore 0.3<\frac{1}{3}$.

另解 1　$\because 0.3=\frac{3}{10}=\frac{9}{30}, \frac{1}{3}=\frac{10}{30}$，　$\therefore 0.3<\frac{1}{3}$.

另解 2　$\because 0.3-\frac{1}{3}=\frac{3}{30}-\frac{1}{3}=-\frac{7}{30}<0$，　$\therefore 0.3<\frac{1}{3}$.

另解 3　$\because \frac{0.3}{\frac{1}{3}}=0.9<1$，　$\therefore 0.3<\frac{1}{3}$.

反思　正解和另解 1 采用的是直接法，即分别统一化成小数形式或分数形式后直接来比较的；而另解 2 采用的是作差法，这是比较两数（或两式）大小的常用方法，其基本原理是：若 $a-b>0$（或 <0），则有 $a>b$（或 $a<b$）；另解 3 采用的是作商法，这也是比较两数（或两式）大小的常用方法，其基本原理是：若 $\frac{a}{b}>1$（或 <1）且 $b>0$，则有 $a>b$（或 $a<b$）.

【题 8】　计算：2008^2.

解　直接相乘（列竖式计算），

得：

$$\begin{array}{r} 2008 \\ \times 2008 \\ \hline 16064 \\ 4016 \\ \hline 4032064 \end{array}$$

$\therefore 2008^2=4032064$.

另解 1　借助计算器计算，得 $2008^2=4032064$.

另解 2　$2008^2=(2000+8)^2$

$=2000^2+2\times2000\times8+8^2=4000000+32000+64=4032064$.

另解 3　$2008^2=2008^2-8^2+8^2$

$=(2008-8)(2008+8)+8^2=2000\times2016+64=4032064$.

反思　正解和另解 1 采用的是直接法，即分别用列竖式和借助计算

器来计算的;而另解2和另解3分别采用了完全平方公式和平方差公式计算的,简便易行,是一种巧法.

【题9】 如果$m>n$,那么$n-m$与它的相反数哪个大?

解 $\because m>n$,$\therefore n-m$是一个负数,

即它的相反数$(m-n)$是一个正数.

$\therefore n-m<m-n$,即$(n-m)<-(n-m)$,

$\therefore n-m$小于它的相反数.

另解1 $\because m>n$,$\therefore n-m<0$,

又$\because (n-m)-[-(n-m)]=n-m+n-m=2(n-m)$,

$\therefore (n-m)-[-(n-m)]<0$,即$(n-m)<-(n-m)$,

$\therefore n-m$小于它的相反数.

另解2 $\because m>n$,$\therefore m-n>0$,$n-m<0$,

$\therefore n-m<m-n=-(n-m)$,即$n-m$小于它的相反数.

【题10】 比较-5与$-4\frac{4}{5}$的大小.

解 $\because |-5|=5$,$|-4\frac{4}{5}|=4\frac{4}{5}$,且$5>4\frac{4}{5}$,

$\therefore -5<-4\frac{4}{5}$.

另解1 根据相反数的意义可知,如果一个数的相反数大于另一个数的相反数,那么这个数一定小于另一个数.

$\because -5$的相反数是$+5$,$-4\frac{4}{5}$的相反数是$+4\frac{4}{5}$,且$+5>+4\frac{4}{5}$,

$\therefore -5<-4\frac{4}{5}$.

另解2 $\because$数轴上表示的两个数,右边的数大于左边的数,而$-4\frac{4}{5}$在-5的右边,$\therefore -5<-4\frac{4}{5}$.

【题11】 计算:$3\times(-7)\times15-3\times7\times15-(-3)\times(-7)\times$

$(-15)+(-3)\times(-7)\times15$.

解 原式$=-315-315+315+315=0$.

另解 原式$=-3\times7\times15-3\times7\times15+3\times7\times15+3\times7\times15=0$.

反思 正解是直接利用有理数运算法则进行计算的;另解则灵活运用了有理数乘法的运算法则,抓住每项中积的绝对值都是$3\times7\times15$,从而把注意力放在符号的确定上,得出了两对互为相反数,不经过计算就可以得出结果为零.

【题 12】 计算:$(-\frac{4}{9})+(-17)+(+218.7)+(+16)+(-218.7)+(-1\frac{5}{9})+(+5\frac{2}{7})$.

解 先把互为相反的数相加.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=[(+218.7)+(-218.7)]+(-\frac{4}{9})+(-17)+(+16)\\&\quad+(-1\frac{5}{9})+(+5\frac{2}{7})\\&=0+(-\frac{4}{9})+(-17)+(+16)+(-1-\frac{5}{9})+(5+\frac{2}{7})\\&=-\frac{4}{9}-1-1-\frac{5}{9}+5+\frac{2}{7}=2+\frac{2}{7}=2\frac{2}{7}.\end{aligned}$$

另解 1 先把分母相同及容易通分的分数相加.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=[(-\frac{4}{9})+(-1\frac{5}{9})]+(-17)+[(-218.7)+(+218.7)]+\\&\quad(+16)+(+5\frac{2}{7})\\&=-2-17+0+16+5\frac{2}{7}=-3+5\frac{2}{7}=2\frac{2}{7}.\end{aligned}$$

另解 2 先把加数分成两类(正、负),再分别相加.

原式$=[(-\frac{4}{9})+(-17)+(-1\frac{5}{9})+(-218.7)]+[(+218.7)+$

$(+16)+(+5\frac{2}{7})]$

$=(-\frac{4}{9}-1\frac{5}{9}-17-218.7)+(218.7+16+5\frac{2}{7})$

$=(-2-17-218.7)+(234.7+5\frac{2}{7})$

$=-237.7+234.7+5\frac{2}{7}=-3+5\frac{2}{7}=2\frac{2}{7}$.

另解 3 综合考虑上述各种方法.

原式$=[(-\frac{4}{9})+(-1\frac{5}{9})]+[(+218.7)+(-218.7)]+[(-17)+(+16)]+5\frac{2}{7}$

$=(-2)+0+(-1)+5\frac{2}{7}=-3+5\frac{2}{7}=2\frac{2}{7}$.

反思 正解、另解 1 和另解 2 所采用的方法都能起到化繁为简的作用，因此另解 3 综合考虑上述各种方法就是一种巧妙解法了.

【题 13】 甲、乙、丙每人各想了一个整数，则[　　]

(A)所想的三个数中必有两数的积大于 2008；

(B)所想的三个数中必有两数的积小于 2008；

(C)所想的三个数中必有两数的和是个奇数；

(D)所想的三个数中必有两数的和是个偶数.

答案 D

解 (A)、(B)显然不成立；若三人想的都是偶数，则任意两数的和都不是奇数，故可排除(C)；∴应选(D).

反思 实际上，所想的三个整数中必有两数的奇偶性相同，它们的和必是偶数，∴所想的三个数中必有两数的和是个偶数.

【题 14】 妈妈让小明猜一个有理数，并告诉小明：(1)这个数是

偶数;(2)这个数是 15;(3)这个数是质数;(4)这个数是 17;并且在以上条件(1)、(2)之中和(3)、(4)之中各只有一个正确,那么妈妈问的这个数是________.

答案　2

解　若(2)正确,则(3)、(4)都不正确,这与题设矛盾,

∴(1)、(3)正确,∴这个数是 2. ∴应填 2.

【题 15】　计算:$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+2007}$.

解　$\because \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{(1+n)n}{2}}=\frac{2}{n(1+n)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$,

$$\therefore \text{原式}=2[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008})]$$

$$=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008})$$

$$=2(1-\frac{1}{2008})=\frac{4014}{2008}.$$

【题 16】　计算:$\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})}+\frac{\frac{1}{4}}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})}+\cdots+\frac{\frac{1}{2008}}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})\cdots(1+\frac{1}{2008})}$.

解　$\because \frac{\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})\cdots(1+\frac{1}{n})}$

$$=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{2}}$$

$$=\frac{2}{n(1+n)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}),$$

$$\therefore \text{原式}=2[(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009})]$$

$$=2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009})$$

$$=2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2009})=\frac{2007}{2009}.$$

【题 17】 有人编了一个程序：从 1 开始，交替地做加法或乘法，第一次可以是加法，也可以是乘法，每次加法，将上次运算结果加 2 或加 3；每次乘法，将上次运算结果乘 2 或乘 3. 例如，30 可以这样得到 $1\xrightarrow{+3}4\xrightarrow{\times 2}8\xrightarrow{+2}10\xrightarrow{\times 3}30$.（1）证明可以得到：22；（2）证明可以得到：$2^{100}+2^{97}-2$.

分析　要证明可以得到相应的数，只要编出相应的程序即可.

(1)证　$1\xrightarrow{\times 2}2\xrightarrow{+2}4\xrightarrow{\times 2}8\xrightarrow{+2}10\xrightarrow{\times 2}20\xrightarrow{+2}22.$

(2)证　$1\xrightarrow{\times 2}2=3\times 2-4\xrightarrow{+2}4=3\times 2-2\xrightarrow{\times 2}8$

$=3\times 2^2-4\xrightarrow{+2}10=3\times 2^2-2\xrightarrow{\times 2}20$

$=3\times 2^3-4\xrightarrow{+2}22=3\times 2^3-2$……（不断地乘以 2，再加上 2）

$\xrightarrow{\times 2}3\times 2^{96}-4\xrightarrow{+3}3\times 2^{96}-1\xrightarrow{\times 3}9\times 2^{96}-3$

$=(2^3+1)\times 2^{96}-3$

$=2^{99}+2^{96}-3\xrightarrow{+2}2^{99}+2^{96}-1\xrightarrow{\times 2}2^{100}+2^{97}-2.$

【题 18】 $M=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n个}-\underbrace{22\cdots2}_{n个}}$，（$n$ 为自然数），则[　　].

(A)M 为无理数；(B)$M=\underbrace{11\cdots1}_{n个}$；

(C)$M=\underbrace{22\cdots2}_{n个}$；(D)$M=\underbrace{33\cdots3}_{n个}$.

解　用赋值法解. 令 $n=1$，则 $M=\sqrt{11-2}=\sqrt{9}=3$；

令 $n=2$，则 $M=\sqrt{1111-22}=\sqrt{1089}=33$；

∵n 具有一般性，且正确的答案是唯一的，∴应选 D.

另解　计算 M.

∵$\underbrace{11\cdots1}_{2n个}=\underbrace{11\cdots1}_{n个}\times10^n+\underbrace{11\cdots1}_{n个}$，$\underbrace{22\cdots2}_{n个}=2\times\underbrace{11\cdots1}_{n个}$，

$M=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n个}-\underbrace{22\cdots2}_{n个}}=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{n个}\times10^n-\underbrace{11\cdots1}_{n个}}$

$=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{n个}\times(10^n-1)}=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{n个}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个}}=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{n个}\times\underbrace{11\cdots1}_{n个}\times9}$

$=\sqrt{(3\times\underbrace{11\cdots1}_{n个})^2}=3\times\underbrace{11\cdots1}_{n个}=\underbrace{33\cdots3}_{n个}$. ∴应选 D.

【题 19】 已知 $\sqrt{2112}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 且 $a>b>0$，则满足此关系的不同的整数对 (a,b) 的个数为[　　].

(A)1；(B)2；(C)3；(D)4.

解　直接将 $\sqrt{2112}$ 分解为 $\sqrt{a}+\sqrt{b}(a>b>0)$ 的形式.

∵ $\sqrt{2112}=\sqrt{2^6\times33}$，

∴ $\sqrt{2112}=8\sqrt{33}=7\sqrt{33}+\sqrt{33}=\sqrt{1617}+\sqrt{33}$，

$\sqrt{2112}=8\sqrt{33}=6\sqrt{33}+2\sqrt{33}=\sqrt{1188}+\sqrt{132}$，

$\sqrt{2112}=8\sqrt{33}=5\sqrt{33}+3\sqrt{33}=\sqrt{825}+\sqrt{297}$，

因此不同的整数对的个数为 3，∴应选(C).

另解 1　∵ $\sqrt{2112}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 且 $\sqrt{2112}=\sqrt{2^6\times33}$，∴$8\sqrt{33}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$，

∴a 必具有 $33m^2$ 的形式，b 必具有 $33n^2$ 的形式，

且 $m+n=8$(m,n 都为正整数).

$\because a>b>0$, $\therefore m>n$,

$\therefore m+n=8$ 有三组正整数解,

即:$m=7,n=1$;$m=6,n=2$;$m=5,n=3$.

因此不同的整数对的个数为 3,$\therefore$ 应选 C.

另解 2 由题设可得:$0<b<2112$, $\because \sqrt{2112}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\therefore \sqrt{a}=\sqrt{b}-\sqrt{2112}$,

两边平方,得:$a=b+2112-2\sqrt{2112\cdot b}$,

$\because a$ 是整数,$\therefore 2112\cdot b$ 必是完全平方数,

又 $\because 2112=2^6\times 33$, $\therefore b$ 具有 $33n^2$ 的形式(n 为正整数),

$\therefore 33n^2<2112$,即 $33n^2<2^6\times 33$, $\therefore n^2<2^6$,

$|n|<2^3$,即 $n<8$, $\therefore 1\leqslant n\leqslant 7$,又 $\because a$、b 是对称的,$\therefore$ 应选 C.

【题 20】 化简:$a\sqrt{-\dfrac{1}{a}}$.

解 $\because a\sqrt{-\dfrac{1}{a}}$ 有意义,$\therefore a<0$,

$\therefore$ 原式 $=-(-a)\sqrt{-\dfrac{1}{a}}=-\sqrt{(-a)^2\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)}=-\sqrt{-a}$.

另解 $\because a\sqrt{-\dfrac{1}{a}}$ 有意义,$\therefore a<0$,

$\therefore$ 原式 $=a\sqrt{-\dfrac{1\cdot a}{a^2}}=a\cdot\dfrac{1}{|a|}\cdot\sqrt{-a}=a\cdot\dfrac{1}{-a}\cdot\sqrt{-a}=-\sqrt{-a}$.

反思 在求解本题时,首先判断 a 的取值范围;$\because \sqrt{a^2}=|a|$, $\therefore$ 当 a 是一个非负数时,a 可写成 $\sqrt{a^2}$,但当 a 是一个负数时,$a=-(-a)=-\sqrt{(-a)^2}$.

【题 21】 阅读下列材料:

$\because 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{\dfrac{2^3}{3}}=\sqrt{\dfrac{(2^3-2)+2}{2^2-1}}=\sqrt{2+\dfrac{2}{3}}$, $\therefore 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{2+\dfrac{2}{3}}$,