高等数学

GAODENGSHUXUE

第三版 上册

何瑞文 胡 成 杨 宁 周海东 编

涂汉生 主审

西南交通大學出版社

Http://press.swjtu.edu.cn

高 等 数 学

第三版　　上册

何瑞文　胡　成
杨　宁　周海东　编

涂汉生　主审

西南交通大学出版社
·成都·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：全2册/何瑞文等编．—3版．—成都：西南交通大学出版社，2012.6
ISBN 978-7-5643-1768-3

Ⅰ．①高… Ⅱ．①何… Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ．①013

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第109938号

高等数学

第三版 （上、下册）

何瑞文 胡 成
杨 宁 周海东 编

责任编辑	张宝华
封面设计	9:23设计工作室
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段111号）
发行部电话	028-87600564 028-87600533
邮政编码	610031
网址	http://press.swjtu.edu.cn
印刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	170 mm×230 mm
总印张	37.75
总字数	674千字
版次	2012年6月第3版
印次	2012年6月第5次
书号	ISBN 978-7-5643-1768-3
套价	55.00元

第三版前言

根据本书第二版的使用情况和教学内容的重新安排，考虑到其他相关教材的使用，我们对本书再次作了一些修订．修订内容为：将第六章与第七章进行了调换，同时对所发现的一些不妥之处进行了订正．

在教材修订过程中得到了西南交通大学数学学院和西南交通大学出版社的大力支持，在此表示衷心地感谢，并且对本教材提出宝贵意义和建议的老师们表示诚挚的谢意。

编　者

2012年3月于西南交大

第二版前言

根据本书前几年的使用情况和教学内容的需要以及与其他相关教材使用的协调，本书此次作了一些修订．修订内容为：把空间解析几何与向量代数的内容重新纳入教材中，作为第六章（空间曲面与曲线置于第八章第一节中）单独安排，原来的第五、第六章合并为第五章，同时对符号等一些不妥之处进行了订正．新增的第六章由周海东老师执笔，刘文美、陈韵雪、王桂花、文亦兵、何瀚超等老师对本书的修订提出了宝贵建议．

在此对西南交通大学数学系和西南交通大学出版社的支持以及提出宝贵意见和建议的老师们表示衷心的感谢．

编　者

2006 年 8 月于西南交大

第一版前言

此书是结合近年来的教学实践，并根据《高等数学课程教学基本要求》编写而成的. 全书分为上、下两册，其中上册内容包括函数的极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用；下册内容包括微分方程、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数. 空间解析几何与向量代数的内容则纳入到《线性代数与空间解析几何》教材中.

本书适用学时(课内)为 170 学时左右，分两学期安排，周学时为 5学时. 本书可作为高等学校工科专业高等数学课程的教材或教学参考书.

参加本书编写工作的有：何瑞文(第一、二、三章)、胡成(第四、五、六、十一章)、杨宁(第七、八章)、周海东(第九、十章)，由涂汉生主审.

在本书编写过程中，得到了西南交通大学应用数学系(特别是高等数学教研室)和西南交通大学出版社的大力支持与帮助，叶建军、易建华、秦应兵、宋振明、蒲伟、卿铭等老师提出了大量的宝贵意见和建议，在此我们一并表示衷心的感谢.

由于受水平和经验所限，本书不妥之处在所难免，敬请同行专家及广大读者给予批评指正.

编　者

2002 年 3 月于西南交大

目　　录

第一章　函数的极限与连续

微积分是以极限方法为基础，函数作为研究对象的一门数学学科.初等数学主要涉及的是常量，而微积分则是变量.本章主要介绍函数——变量之间的一种依赖关系，以及极限理论初步和函数的连续性.

第一节　变量与函数

一、变　量

当我们观察各种自然现象或研究某种运动过程的时候，常常会遇到许多量.这些量一般可分为两种：一种是在某过程中不变化的量，这种量称为**常量**；还有一种是会起变化的量，称为**变量**.例如，自由落体的下降时间和下降距离是变量，而落体的质量在此过程中可以看做常量.在理论上，我们常抽去变量或常量的具体意义来研究某过程中这些量在数值上的关系，但对具体问题而言仍需注意其实际意义，例如时间、距离、质量等.

由于时间、压力、温度等，都可以用实数来表示，所以称它们为实变量或实常量（也简称变量和常量）.故在本课程中，如无特别声明，数都是指的实数，实数以及绝对值概念可以说是该课程的基石.下面对它们进行一些归纳.

(1) 每一个实数和数轴上的一个点存在一一对应关系.我们称这个性质为**实数的连续性**.

(2) 有理数在实数中是**稠密**的，也就是说，在任何两个不同的实数之间必存在着有理数.同样无理数也是稠密的，在任何两个不同的实数之间也必存在着无理数.

(3) 有理数的和、差、积、商仍为有理数.有理数与无理数的和、差、积、商为无理数（零不参与积、商的运算）.无理数的和、差、积、商可能为无理数，也可能为有理数.

关于绝对值的一些性质：

(1) a,b 是任意两个实数，数$(a-b)$的绝对值$|a-b|$表示点 a 与 b 之间的距

离，即$|a-b|\geqslant 0$，只有当 $a=b$ 时等号成立，且$|a-b|=|b-a|$；

(2) $|a|\geqslant \pm a$，$|a|=|-a|$；

(3) $|ab|=|a|\cdot|b|$；

(4) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$；

(5) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，$||a|-|b||\leqslant|a-b|$.

在观察各种运动过程中，我们发现，有些变量具有一定的变化范围，例如人的体重、寿命等.变量的变化范围，也就是变量的取值范围，它们是实数集合 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}$ 的子集.最常见的是自然数集合 $\mathbb{N}$ 及区间、邻域.定义如下：

$a,b\in\mathbb{R}$，$a<b$，那么

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为以 a,b 为端点的**闭区间**.

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}$$

称为以 a,b 为端点的**开区间**.

类似可定义：

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\},$$

$$[a,+\infty)=\{x|,a\leqslant x\},$$

$$(-\infty,a)=\{x|,x<a\}.$$

称

$$(a-\delta,a+\delta)=\{x||x-a|<\delta,\delta>0\}$$

为点 a 的 δ **邻域**，有时也记为 $U(a,\delta)$.

特别地，在 $U(a,\delta)$中去掉点 a，即 $U(a,\delta)/\{a\}=U(\hat{a},\delta)$，称为点 a 的**去心邻域**.显然

$$U(\hat{a},\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}.$$

二、函 数

定义 1－1－1 设有两个非空实数集 X 与 Y，如果存在一个对应规则 f，对于 X 中的每一个数 x，按照规则 f，在 Y 中存在唯一的数 y 与 x 对应，那么称 f 是定义在 X 上，取值在 Y 内的**函数**.其中 X 称为函数的**定义域**，记作 $D(f)$；与 x 对应的实数 y，记为 $y=f(x)$，数集

$$\{y|y=f(x),x\in D(f)\}$$

叫做函数的**值域**，记作 $Z(f)$.显然有 $Z(f)\subseteq Y$.

习惯上，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，与 x 的特定值 x_0 相对应的数 $y_0=f(x)|_{x=x_0}=f(x_0)$ 叫做函数 f 在 x_0 处的**函数值**.

由函数定义可以看出，**函数是由定义域与对应规则所确定的**. 因此，对于两个函数来说，当且仅当它们的定义域和对应规则都分别相同时，它们才表示同一个函数. 例如 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^2}$与 $g(x)=1$ 表示同一个函数(即 $f(x)=g(x)$). 此外与自变量及因变量用什么字母表示无关，例如函数 $y=f(x)$也可以用 $u=f(v)$ 表示.

函数的表示法：

(1) 公式法：对应规则通过公式给出. 例如

$$f(x)=x^2+1;g(x)=x^2,x\in[0,+\infty).$$

(2) 图像法：对应规则通过图像给出. 例如，气象台为了掌握某地的气温变化，使用自动记录仪将每天的气温记录下来，自变量是时间，因变量是气温，对应规则是图像(图 1-1).

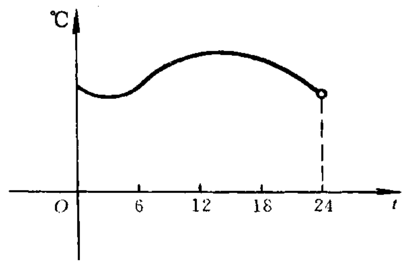

图 1-1

(3) 表格法：对应规则通过表格给出. 例如，某个班级学生的学号(自变量)与该学号所对应学生在某时的体重(因变量). 对应规则是表格.

(4) 描述法：对应规则用语句来表达. 例如，"y 是不超过 x 的最大整数部分"，此函数一般记为

$$y=[x],$$

如：$y|_{x=1.2}=[1.2]=1, y|_{x=-1.5}=[-1.5]=-2.$

"当 x 为有理数时，y 取 1；当 x 为无理数时，y 取 0"，这是 Dirichlet 函数，记为

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

理论研究中常用公式法，就是写出函数的数学表达式和定义域. 需要注意的是，当函数用公式给出，而没有给出定义域，这时我们约定该函数的定义域就是使得公式有意义的一切实数. 例如，$f(x)=\sqrt{x}$，其定义域就是$[0,+\infty)$.

另外，函数在定义域上的表达式有时未必是一个，例如，符号函数

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

我们称这类函数为**分段函数**.

我们知道,一对有序实数(x,y)可以表示直角坐标平面xOy上的一个点P,记作$P(x,y)$,依次称x,y为点的横坐标与纵坐标.

设f是一个函数,由f得到的下列点$P(x,y)$的集合

$$G(f)=\{(x,y)\mid x\in D(f),y=f(x)\}$$

称为**函数f的图像**.通常f的图像在xOy面上是一条曲线.

三、函数的几种特性

1. 有界性

设函数$f(x)$的定义域为$D(f)$,$I\subseteq D(f)$,如果存在正数M,使对任意的$x\in I$,都满足

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称$f(x)$**在I上有界**.

如果这样的M不存在,就称f**在I上无界**.换言之,若对于任意给定的正数M(不论它多么大),总有某个$x_0\in I$,使得

$$|f(x_0)|>M,$$

那么称$f(x)$在I上无界.

为了以后论述的方便,我们引入符号$\forall$,$\exists$. $\forall x\in I$表示对任意的$x\in I$,即表示在集合I中任意取元素x;$\forall x>0$,表示$\forall x\in(0,+\infty)$;$\exists x\in I$,表示集合I中存在元素x.为此

(1) $f(x)$在I上有界可表示为:

若 $\exists M>0$,$\forall x\in I$,满足$|f(x)|\leqslant M$.

(2) $f(x)$在I上无界可表示为:

若$\forall M>0$,$\exists x_0\in I$,使得$|f(x_0)|>M$.

有时我们还用到,$f(x)$在I上有**上界**,即$\exists b\in\mathbb{R}$,$\forall x\in I$,有

$$f(x)\leqslant b.$$

$f(x)$在I上有**下界**,即$\exists a\in\mathbb{R}$,$\forall x\in I$,有

$$a\leqslant f(x).$$

综上所述,我们可以得出下列结论:

$f(x)$在I上有界的充分必要条件是$f(x)$在I上既有上界,也有下界.(请读者完成证明)

下面给出函数$f(x)$在I上有界(无界)的一个几何上的解释:函数在I上有

界就是在直角坐标平面 xOy 上存在函数 $y_1=a, y_2=b$，使 $f(x)$ 在 I 上的函数值在 $[a,b]$ 内 $(a<b)$. 反之，$f(x)$ 在 I 上无界是对于任意给定的函数 $y_1=a$，$y_2=b(a<b)$，总有这样的点 x_0，使 $f(x_0)$ 在 $[a,b]$ 外.

例 1-1 判定下列函数的有界性.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$； (2) $g(x)=x\sin x$.

解(1) 因为 $1+x^2\geqslant 2|x|\geqslant |x|$，所以

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\right|=\frac{|x|}{1+x^2}\leqslant 1.$$

即 $\exists M=1>0, \forall x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leqslant 1,$$

所以，$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

(2) 因为当 $x_n=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时 $(n\in\mathbb{N})$，

$$|g(x_n)|=n\pi+\frac{\pi}{2}>n.$$

$\forall M>0$，要使 $|g(x_n)|>M$，只需要 $n>M$ 即可，故取 $n_0=[M]+1>M$，则

$$|g(x_0)|>M\left(x_0=n_0\pi+\frac{\pi}{2}\right),$$

所以 $\forall M>0, \exists x_0=([M]+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}\in(-\infty,+\infty)$，使

$$|g(x_0)|>M.$$

因此 $g(x)=x\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域是 $D(f)$，区间 $I\subseteq D(f)$，如果 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是**单调增加(或单调增)**；如果当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上**单调减少(或单调减)**. 单调增或单调减的函数统称为**单调函数**.

3. 奇偶性

若函数 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 关于原点对称(即当 $x\in D(f)$，必有 $-x\in$

$D(f)$），$\forall x\in D(f)$，有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 是**偶函数**. 如果 $\forall x\in D(f)$，有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$是**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称. 当奇函数在原点有定义时，它一定过原点.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，如果 $\exists T>0$，$\forall x\in D(f)$，有 $x\pm T\in D(f)$，并且有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$是**周期函数**，T 称为 $f(x)$的**周期**.

通常我们说的周期指的是**最小正周期**，但周期函数未必都有最小正周期. 例如 Dirichlet 函数，容易验证它是周期函数，但它没有最小正周期.

四、反函数与复合函数

1. 反函数

设函数 $f(x)$的定义域为 $D(f)$，值域为 $Z(f)$，$\forall y\in Z(f)$，必定有 $x\in D(f)$ 使 $f(x)=y$ 成立. 但是这样的 x 可能不止一个，当这样的 x 仅有一个时我们对此作一些规定.

定义 1-1-2 $\forall y\in Z(f)$，在 $D(f)$中只有唯一的 $x\in D(f)$使 $f(x)=y$，那么这样的对应规则

$$\varphi:\varphi(y)=x$$

称为 f 的**反函数**，记为 $\varphi=f^{-1}$.

由函数 $y=f(x)$求它的反函数的步骤是：由方程 $y=f(x)$解出 x，得到 $x=f^{-1}(y)$，将 $x=f^{-1}(y)$中的 x 和 y 互换得 $y=f^{-1}(x)$. 在几何上 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图形关于 $y=x$ 对称.（注：把反函数写成 $y=f^{-1}(x)$是由于人们习惯用 x 表示自变量，y 表示因变量.）

定理 1-1-1 若函数 $f(x)$在区间 I 上单调，则 $f(x)$在 I 上一定存在反函数.

该定理的逆命题不成立，即单调仅是存在反函数的充分条件，而不是必要条件.

例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\in[-1,0],\\ x+1, & x\in(0,1]\end{cases}$$

在$[-1,1]$上不单调，但它存在反函数

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

2. 复合函数

复合函数这个概念从运算的角度而言，它是一种“代入运算”. 例如，运动物体的动能与速度的关系是：$E=\frac{1}{2}mv^2$，而对于自由落体有 $v=gt$，那么，$E=\frac{1}{2}mg^2t^2$.

定义 1-1-3 设 $y=f(u)$的定义域为 $D(f)$，$u=g(x)$的定义域为 $D(g)$，如果有 $D_1\subseteq D(g)$，$\forall x\in D_1$，$u=g(x)\in D(f)$，则称下式

$$y=f(g(x)),\quad x\in D_1$$

所定义的函数为由函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$构成的**复合函数**. 这个函数的定义域为 D_1，$u=g(x)$称为**中间变量**，通常用 $f\circ g$ 来记这个复合函数

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)).$$

例 1-2 设 $y=f(x)=\sin x$，$x\in[-\pi,\pi]$；$y=g(x)=\sqrt{x}$，求 $f(g(x))$，$g(f(x))$.

解 令 $y=f(u)=\sin u$，$u=g(x)=\sqrt{x}$，则

$$f(g(x))=\sin\sqrt{x},\quad x\in[0,\pi^2];$$

同理

$$g(f(x))=\sqrt{\sin x},\quad x\in[0,\pi].$$

五、函数的运算与初等函数

设函数 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$x\in D=D(f)\cap D(g)\neq\varnothing$，那么在 D 上可定义：

函数的和(差)：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$，$x\in D$；

函数的积：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$，$x\in D$；

函数的商：$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$，$x\in D$，且 $g(x)\neq 0$.

在中学里我们已不同程度地了解了基本初等函数：

(1) 幂函数：

$$y=x^a\quad (a\text{ 是常数});$$

(2) 指数函数：

$$y=a^x\quad (a>0,a\neq 1);$$