高等职业教育“十二五”规划教材

新编
高等数学

XINBIAN
GAODENG SHUXUE

■ 郑丽 陈宇 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育“十二五”规划教材

新编高等数学

主　编　郑　丽　陈　宇

副主编　韩田君　王海龙　李　亮

编　委　徐爱华　贾敬堂　王艳艳

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书共分九章，内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及应用、微分方程、无穷级数和多元函数微分学，其中每章都融入了 Mathematica 软件的数学实验，并在相应的章节融入了数学建模知识。每章都有相应的习题，书后提供了各章习题的参考答案.

本书可以作为高职高专公共基础数学课教材，也可作为各专业人员高等数学知识实用入门参考书.

图书在版编目（CIP）数据

新编高等数学/郑丽，陈宇主编. —北京：北京理工大学出版社，2012. 7

ISBN 978 - 7 - 5640 - 6188 - 3

Ⅰ. ①新…　Ⅱ. ①郑…②陈…　Ⅲ. ①高等数学—高等职业教育—教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 141447 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http：// www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京兆成印刷有限责任公司
开　　本 / 710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张 / **14.75**
字　　数 / 274 千字
版　　次 / 2012 年 7 月第 1 版　　2012 年 7 月第 1 次印刷
印　　数 / 1～5200 册
定　　价 / 29. 00 元

责任编辑 / 多海鹏
　　　　　张慧峰
责任校对 / 陈玉梅
责任印制 / 王美丽

图书出现印装质量问题，本社负责调换

前言 Preface

本书由多年从事高职高专高等数学教学工作的教师执笔编写．内容注重概念的直观性、方法的启发性和知识的实用性，既体现了“以应用为目的，以必需、够用为度”的思想，又兼顾了知识的系统性. 内容通俗易懂、由浅入深、注重应用，体现了高职高专教育特色.

本书系统讲解了高职高专高等数学的必需知识、基本方法和知识的应用，具体内容共分九章，内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及应用、微分方程、无穷级数和多元函数微分学，每章都融入了 Mathematica 软件的数学实验，并在相应的章节融入了数学建模知识．每章都有相应的习题，书后提供了各章习题的参考答案.

本书理论系统，举例典型、丰富，讲解透彻，难度适宜，适合作为高职高专各专业的高等数学课程的教材使用，也可作为各专业人员高等数学知识实用入门参考书.

参加本书编写的有：韩田君、郑丽、陈宇、徐爱华、李亮、贾敬堂、王海龙、王艳艳等。王志勇教授对本书的编写给出了很多指导性的建议，这使编者受益匪浅.

由于作者水平所限，本书难免有不足、遗漏和错误之处，衷心希望广大读者斧正，以使本书在教学实践之中不断完善.

编　者

目　　录

第一章 函　数

为了适应社会生产力的发展，运动变化就成为自然科学研究的主题，对各种变化过程中变量之间依赖关系的研究就产生了函数的概念. 函数是描述运动变化中变量依赖关系的数学模型，也就是通过某一事实的信息推知另一事实.

高等数学是从研究函数开始的. 本章将在已有函数知识的基础上，进一步理解函数概念，并介绍反函数、复合函数及初等函数的主要性质，为高等数学后续几章的学习打下基础.

第一节　函数及表示法

函数的概念是德国数学家狄利克莱（1805—1859）在 1837 年抽象出的、至今仍为人们易于接受并且较为合理的数学概念.

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量按照一定的法则总有唯一确定的 y 值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),$$

其中，x 叫做自变量，y 叫做因变量. x 的变化范围 D 叫做函数的定义域，对应的 y 值的变化范围叫做函数的值域，记作

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

由函数的定义可以看出，函数概念有两个要素：定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则这两个函数就是相同的，否则是不同的.

函数的表示方法一般有三种：公式法、图示法、表格法. 公式法也叫解析法，常用于理论研究，是我们使用最多的方法.

求函数解析式常见方法有定义法、待定系数法、换元法、配凑法.

例 1　求下列函数的定义域.

（1）$f(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{x-1}$；（2）$f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{\lg x}}{|x|-1}$.

解　（1）由 $\begin{cases}4-x\geqslant 0,\\ x-1\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant x\leqslant 4$，所以函数定义域为 $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$；

（2）由 $\begin{cases}x>0,\\ |x|-1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x>0$，且 $x\neq 1$，所以函数的定义域为

$(0, 1)\cup(1, +\infty)$.

例 2　设 $f(1-\sqrt{x})=x$，求 $f(x)$.

解　令 $1-\sqrt{x}=t$，由 $x\geqslant 0$ 得 $t\leqslant 1$，$x=(1-t)^2$，代入 $f(1-\sqrt{x})=x$，得

$$f(t)=(1-t)^2(t\leqslant 1)$$

所以

$$f(x)=x^2-2x+1, x\in\{x \mid x\leqslant 1\}$$

注意：利用换元法时要考虑新变量的取值范围.

例 3　函数 $y=x^2$，定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=[0, +\infty)$，图像为抛物线（图 1-1）.

例 4　函数 $y=x^3$，定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=(-\infty, +\infty)$，图像为立方抛物线（图 1-2）.

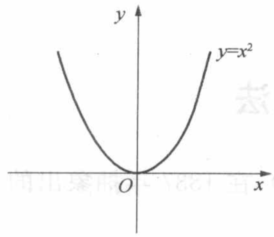

图 1-1

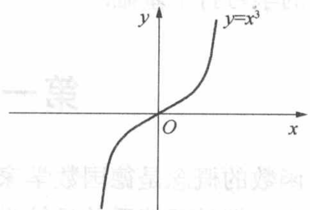

图 1-2

例 5　函数 $y=\frac{1}{x}$，定义域 D 和值域 W 都是除去数 0 之外的全体实数，图像为等轴双曲线（图 1-3）.

例 6　函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 这是绝对值函数，定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=[0, +\infty)$，如图 1-4 所示.

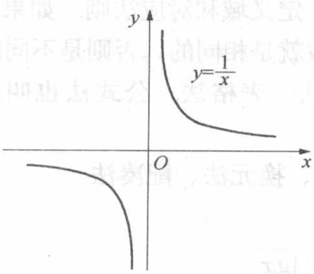

图 1-3

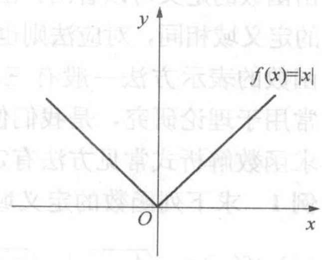

图 1-4

例 7　符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$ 定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值

域 $W=\{-1, 0, 1\}$，如图 1-5 所示.

例 8 分段函数：在自变量的不同变化范围中，用不同的解析式表示的函数.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leqslant 0,\\ 2x-1, & x>0.\end{cases} \quad (图 1\text{-}6)$$

分段函数是定义域上的一个函数，不是多个函数，分段函数需要分段求值，分段作图.

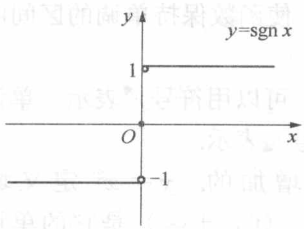

图 1-5

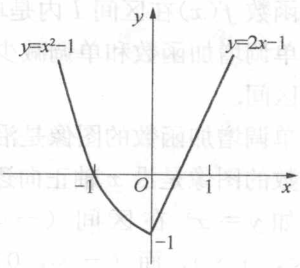

图 1-6

第二节 函数的特性

函数的四种特性是指函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性.

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果存在正数 M，使得对于任意 $x\in I$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

显然，如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，使上述不等式成立的常数 M 不是唯一的，有界性体现在常数 M 的存在性.

函数的有界性依赖于区间，例如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间（1，2）内是有界的，而在区间（0，1）内是无界的.

函数的有界性还可以表述为：如果存在常数 M_1、M_2 使得对于任意 $x\in I$，恒有

$$M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，M_1 称为 $f(x)$ 在区间 I 上的下界，M_2 称为 $f(x)$ 在区间 I 上的上界.

2. 函数的单调性

对于连续函数，设函数 $y=f(x)$的定义域为D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 内是单调增加的（简称递增）；如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 内是单调减少的（简称递减）.

单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数. 使函数保持单调的区间叫做单调区间.

单调增加函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的，可以用符号↗表示；单调减少函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的，可以用符号↘表示.

如 $y=x^3$ 在区间（$-\infty$，$+\infty$）内是单调增加的. $y=x^2$ 定义域为（$-\infty$，$+\infty$），而（$-\infty$，0）是它的单调减区间，（0，$+\infty$）是它的单调增区间.

判断函数单调性的方法有观察图像法、定义法、求导法等.

3. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则$-x\in D$). 如果对于任意 $x\in D$，有

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$为奇函数；如果对于任意 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$为偶函数.

例如，$y=x^3$，$y=\sin x$，$y=\tan x$ 等是奇函数；$y=x^2$，$y=\cos x$ 等是偶函数.

奇函数的图像是关于原点中心对称的，偶函数的图像是关于 y 轴对称的.

在两个函数的公共定义域非空的前提下，奇偶函数运算有如下特点：

(1) 两个偶函数相加所得的和为偶函数，两个奇函数相加所得的和为奇函数；

(2) 一个不恒为零的偶函数与一个奇函数相加所得的和为非奇非偶函数；

(3) 两个偶函数相乘所得的积为偶函数，两个奇函数相乘所得的积为偶函数，一个偶函数与一个奇函数相乘所得的积为奇函数.

4. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的实数 T，使得对于定义域 D 内的任意 x 值，$x\pm T$ 仍在 D 内，且 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称 $f(x)$为周期函数，T 为函数的周期. 而习惯上，函数的周期是指使 $f(x)=f(x+T)$ 成立的最

小正数，即最小正周期. 如 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的函数，$y=\tan x$ 是以 π 为周期的函数.

注意：（1）周期函数的定义域应为无穷区间，但可以去掉若干个点. 若一个函数的定义域为有限区间，则此函数不可能是周期函数；

（2）并非所有的周期函数都有最小正周期；

（3）化简函数求周期时定义域不可发生变化，否则所求最小正周期可能出错；

（4）两个周期函数的和不一定是周期函数.

上述四种特性中，有界性和单调性是函数的局部特性，奇偶性和周期性是函数的整体特性. 这四种特性是从不同角度来研究函数的.

第三节 初 等 函 数

一、反函数

在函数关系中，自变量和因变量的地位往往是相对的，可以把任意一个变量看作是自变量或因变量.

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 如果对于 W 中的每一个 y，都有唯一的 $x\in D$，使 $f(x)=y$，此时得到一个定义在 W 上的新函数，此函数称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

由定义可见，反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域是直接函数的值域，反函数的值域是直接函数的定义域.

函数的实质在于它的定义域和对应法则，而用什么字母表示自变量和因变量是无关紧要的. 习惯上常以 x 表示自变量，y 表示因变量，因此，常常对调 x，y，把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$. 今后提到的反函数，一般就是指这种经过改写的反函数.

由于 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的关系是 x 与 y 互换，所以他们的图像关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-7 所示.

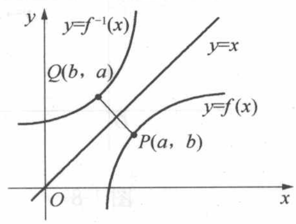

图 1-7

例 1 求函数 $y=f(x)=x+\sqrt{x^2+3}$ （$x>1$）的反函数.

解 由 $y=x+\sqrt{x^2+3}$，$x>1$

可得

$$y>1+\sqrt{1+3}=3$$

即

$$y>3$$

解得

$$y = x + \sqrt{x^3 + 3},$$

解得 $x = \dfrac{y^2 - 3}{2y}$. x 与 y 互换后，得

$$y = \frac{x^2 - 3}{2x} \ (x > 3).$$

求 $y = f(x)$ 的反函数的步骤一般为先从 $y = f(x)$ 中解出 $x = f^{-1}(y)$；再交换 x，y，同时求出新的定义域（即直接函数的值域）.

二、初等函数

基本初等函数是最常见、最基本的函数. 基本初等函数包括常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

1. 常函数

$$y = C,$$

其中，C 为常数，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $\{C\}$. 图像为一条垂直于 y 轴的直线.（图 1-8）.

2. 幂函数

$$y = x^{\mu},$$

其中，μ 是常数. 对于任意的 μ，x^{μ} 在 $(0, +\infty)$ 内都有定义；对于不同的 μ，x^{μ} 的定义域有所不同. 幂函数的图像过点 $(1, 1)$（图 1-9）.

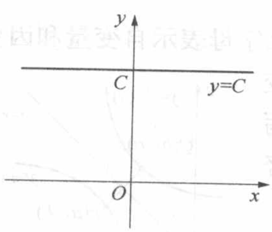

图 1-8

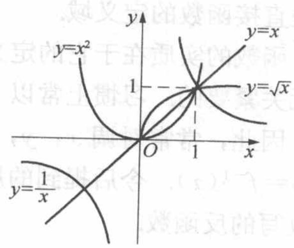

图 1-9

3. 指数函数

$$y = a^x (a > 0, a \neq 1),$$

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, +\infty)$，图像过点 $(0, 1)$. 当 $0 < a < 1$ 时，a^x 是单调减少函数；当 $a > 1$ 时，a^x 是单调增加函数（图 1-10）.

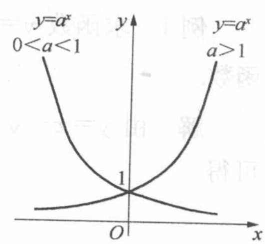

图 1-10

4. 对数函数

$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1),$$

它是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，定义域为 $(0, +\infty)$，值域为 $(-\infty, +\infty)$，图像过点 $(1, 0)$. 当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 是单调减少函数；当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 是单调增加函数（图 1-11）.

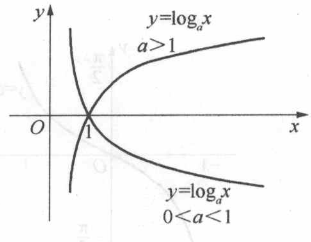

图 1-11

5. 三角函数

三角函数有 6 个，它们是正弦函数，余弦函数，正切函数，余切函数，正割函数，余割函数.

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[-1, 1]$，它是奇函数，是周期为 2π 的周期函数（图 1-12）.

余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[-1, 1]$，它是偶函数，是周期为 2π 的周期函数（图 1-13）.

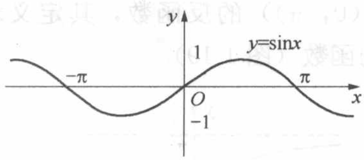

图 1-12

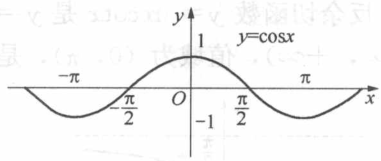

图 1-13

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为不含 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍的实数，值域为 $(-\infty, +\infty)$，它是奇函数，是周期为 π 的周期函数（图 1-14）.

余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为不含 π 的整数倍的实数，值域为 $(-\infty, +\infty)$，它是奇函数，是周期为 π 的周期函数（图 1-15）.

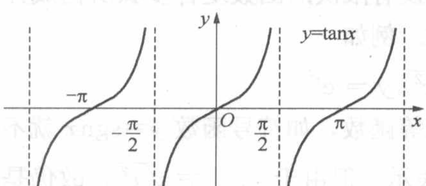

图 1-14

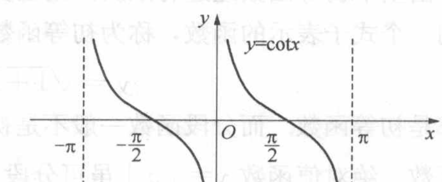

图 1-15

6. 反三角函数

常用反三角函数有：反正弦函数，反余弦函数，反正切函数，反余切函数.

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的反函数，其定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，是单调增加的奇函数（图 1-16）.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 是 $y=\cos x$（$x\in[0, \pi]$）的反函数，其定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $[0, \pi]$，是单调减少的函数（图 1-17）.

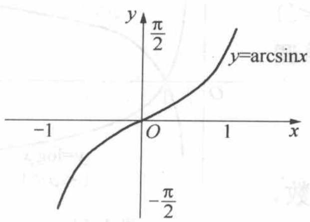

图 1-16

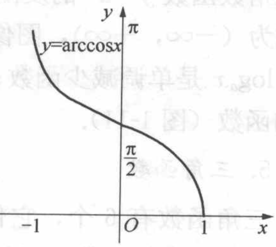

图 1-17

反正切函数 $y=\arctan x$ 是 $y=\tan x\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$的反函数，其定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$，是单调增加的奇函数（图 1-18）.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 是 $y=\cot x$（$x\in(0,\ \pi)$）的反函数，其定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，值域为$(0,\ \pi)$，是单调减少的函数（图 1-19）.

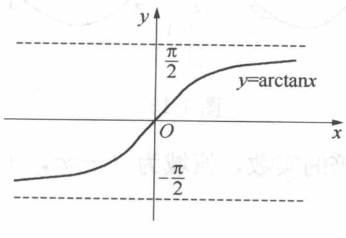

图 1-18

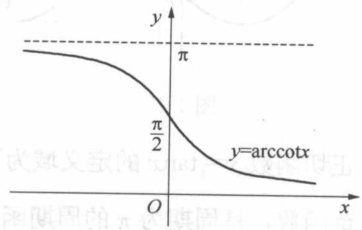

图 1-19

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的函数复合步骤所构成并且可以用一个式子表示的函数，称为初等函数．例如

$$y=\sqrt{1+x^2},y=\mathrm{e}^{x^2}$$

等都是初等函数．而分段函数一般不是初等函数，如符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 就不是初等函数．绝对值函数 $y=|x|$ 虽可分段表示，但由于 $|x|=\sqrt{x^2}$，故仍是初等函数．今后我们遇到的函数有许多不是初等函数，但在本课程中具体讨论的大都是初等函数.

三、复合函数

下面我们先了解一下简单函数．简单函数就是基本初等函数经过有限次的加减乘除四则运算得到的函数．例如，$y=x^3+3x^2-2x-1$ 就是简单函数.

我们再看另外一个例子．设

$$y=u^3,u=1+2x,$$

把 $u=1+2x$ 代入 $y=u^3$ 可以得到函数

$$y=(1+2x)^3,$$

这个函数就是由 $y=u^3$ 及 $u=1+2x$ 复合而成的复合函数.

一般的，若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z，则若 $D\cap Z\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数. 其中 x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量.

例如，$y=\sqrt{1-x^2}$ 可以看作由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1-x^2$ 复合而成的，它的定义域为［-1，1］，是 $u=1-x^2$ 定义域（$-\infty$，$+\infty$）的子集；$y=\arctan x^2$ 可以看作由 $y=\arctan u$ 及 $u=x^2$ 复合而成的，它的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），也就是 $u=x^2$ 的定义域.

注意：不是任何两个简单函数都可以复合成一个复合函数. 如 $y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能构成一个复合函数. 因为 $y=\arcsin u$ 的定义域［-1，1］与 $u=2+x^2$ 的值域［2，$+\infty$）的交集为 $\varnothing$.

另外，复合函数不仅可以由两个简单函数复合而成，也可以由更多个简单函数复合而成.

例如，$y=(\sin\ln x)^2$ 可以看作由三个函数：$y=u^2$，$u=\sin v$，$v=\ln x$ 复合而成；$y=\sqrt{\ln(\sin x^2)}$ 可以看作由四个函数：$y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=\sin w$，$w=x^2$ 复合而成.

上面这种将一个复合函数分解成多个简单函数的复合，在后面函数的导数运算中是十分重要的.

第四节　Mathematica 实验一

Mathematica 是美国 Wolfram 研究公司生产的一种数学分析型的软件，它是将数值计算、符号计算和图形显示结合在一起的数学软件，以符号计算见长，也具有高精度的数值计算功能和强大的图形功能. 在求解一元及二元函数的极限、导数、积分、微分方程等计算过程相对复杂的问题时，为提高使用数学解决实际问题的能力及效率，我们将向读者介绍如何利用 Mathematica 软件解决相关的数学问题. Mathematica 软件当前已有很多版本，这里介绍的是 2011 年最新发行的版本 Mathematica 8.0 在 Windows 操作系统下的使用情况.

一、Mathematica 的基本操作

1. Mathematica 的操作界面

打开软件 Mathematica 8.0，出现图 1-20 所示的操作界面.