常微分方程

（习题解答）

韩守成

渭南师范专科学校数学科

前　　言

为了适应教学需要，我们把中山大学数学力学系常微分方程组所编的《常微分方程》（1981年版）一书中的全部习题作了解答，可供数学和其它有关专业师生参考之用。为了节省篇幅，每题结合教材进度和要求只给出一种解法，所用名词符号也尽量与原书一致。但因时间仓促和编者水平有限，缺点谬误在所难免，恳切希望同志们批评指正。

本题解在编写过程中，曾蒙西北大学张棣副教授及谢大来、党新益二位老师的指导和帮助，在此特表谢意。

渭南师专　韩守成

一九八二年七月

目　　录

第一章 绪 论

习 题 1．2

2．试验证下面函数均为方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+\omega y=0$ 的解，这里 $\omega>0$ 是常数：

（1）$y=\cos\omega x$

证：$y'=-\omega\sin\omega x$，$y''=-\omega^2\cos\omega x$．将$y''$，$y$代入原方程，能使它变成恒等式，故$y=\cos\omega x$是方程的解．

（2）$y=C_1\cos\omega x$（C_1是任意常数）

证：$y'=-C_1\omega\sin\omega x$，$y''=-C_1\omega^2\cos\omega x$．将$y''$、$y$代入原方程，能使它变为恒等式，故$y=C_1\cos\omega x$是方程的解．

（3）$y=\sin\omega x$

证：$y'=\omega\cos\omega x$，$y''=-\omega^2\sin\omega x$．将$y''$、$y$代入原方程，能使它变为恒等式，故$y=\sin\omega x$是方程的解．

（4）$y=C_2\sin\omega x$（C_2是任意常数）

证：$y'=C_2\omega\cos\omega x$，$y''=-C_2\omega^2\sin\omega x$．将$y''$，$y$代入原方程，能使它变为恒等式，故$y=C_2\sin\omega x$是方程的解．

（5）$y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$（$C_1$，$C_2$是任意常数）

证：$y'=-C_1\omega\sin\omega x+C_2\omega\cos\omega x$

$y''=-C_1\omega^2\cos\omega x-C_2\omega^2\sin\omega x$．将$y''$、$y$代入原方

程，能使它变为恒等式，故$y=C_1\cos\omega x+$
$+C_2\sin\omega x$是方程的解.

（6）$y=A\sin(\omega x+B)$　　（A，B是任意常数）

证：$y'=A\omega\cos(\omega x+B)$，$y''=-A\omega^2\sin(\omega x+B)$．将$y''$、$y$代入原方程，能使它变为恒等式，故
$y=A\sin(\omega x+B)$是方程的解.

3．给定一阶微分方程$\dfrac{dy}{dx}=2x$

（1）求出它的通解；

解：将原方程改写为$dy=2xdx$，两边积分，得通解为

$$y=x^2+C.$$

（2）求通过点（1，4）的特解；

解：把$x=1$，$y=4$代入通解，得　$4=1+C$，$C=3$
故过点（1，4）的特解是　$y=x^2+3$.

（3）求出与直线　$y=2x+3$相切的解；

解：设所求积分曲线与直线　$y=2x+3$相切于点(x,y)，则x，y应满足方程组

$$\begin{cases} y=x^2+C, \\ y=2x+3. \end{cases}$$

由此，得　$x^2-2x+C-3=0$，

$$\triangle=\sqrt{4-4(C-3)}=0,$$

解得　$C=4$.

于是所求特解为　$y=x^2+4$.

（4）求出满足条件$\int_0^1 y\,dx=2$　的解；

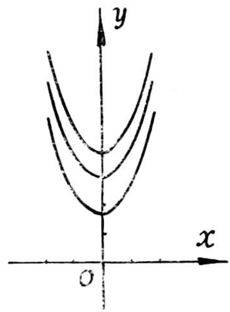
解：$2=\int_0^1 y\,dx=\int_0^1(x^2+C)dx=\left[\dfrac{x^3}{3}+Cx\right]_0^1=$

$$= \frac{1}{3} + C,$$

解出 $C = \frac{5}{3}$，代入通解得所求特解为 $y = x^2 + \frac{5}{3}$.

（5）绘出(2)，(3)，(4)中的解的图形。

解：如图所示。



（第3.(5)题图）

4．物体在空气中的冷却速度与物体和空气的温差成比例，如果物体在20分钟内由100℃冷至60℃，那么，在多长的时间内，这个物体的温度达到30℃？假设空气的温度为20℃

解：设物体在空气中时刻 t 的温度为

$T = T(t)$，则依牛顿冷却定律得

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-20)，其中k是比例常数$$

两边积分，得通解为 $T = 20 + Ce^{-kt}$

由于初始条件为：$T(0) = 100$，故得 $C = 80$。

$\therefore \quad T = 20 + 80e^{-kt}$。

将$t = 20$，$T = 60$代入上式后即得：$k = \frac{\ln 2}{20}$，

即 $T = 20 + 80e^{-\frac{\ln 2}{20}t} = 20 + 80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$。

故　当$T=30$时，有 $30=20+80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$，从中解出 $t=60$（分钟），因此，在60分钟内，可使物体的温度达到30℃。

第二章　一阶微分方程的初等解法

习　题　2．1

求下列方程的解：

1．$\frac{dy}{dx}=2xy$，并求出满足初始条件：$x=0$，$y=1$ 的特解

解：分离变量得　$\frac{dy}{y}=2xdx$，

两边积分得　$ln|y|=x^2+lnC$

故得通解　$y=Ce^{x^2}$。

将$x=0$，$y=1$代入通解，得$C=1$。故满足初始条件的特解为　$y=e^{x^2}$。

2．$y^2dx+(x+1)dy=0$，并求满足初始条件：$x=0$，$y=1$的特解。

解：分离变量得　$\frac{dx}{x+1}+\frac{dy}{y^2}=0$，

两边积分得　$ln|x+1|-\frac{1}{y}=C_1$，

由此得通解为 $y=\dfrac{1}{C+ln|x+1|}$；（令$C=-C_1$）

另外，方程还有解 $y=0$。

把 $x=0$，$y=1$代入通解，得$C=1$，故满足所给初始条件的特解为 $y=\dfrac{1}{1+ln|x+1|}$，

3．$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{xy+x^3y}$

解：$\dfrac{ydy}{1+y^2}=\dfrac{dx}{x(x^2+1)}$，

即 $\dfrac{ydy}{1+y^2}=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}\right)dx$，

$$\frac{1}{2}ln(1+y^2)=ln|x|-\frac{1}{2}ln(x^2+1)+lnC_1,$$

$$\sqrt{1+y^2}=\frac{C_1|x|}{\sqrt{x^2+1}},$$

即 $(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2$.

4．$(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$

解：$\dfrac{1+x}{x}dx+\dfrac{1-y}{y}dy=0$，

即 $\left(\dfrac{1}{x}+1\right)dx+\left(\dfrac{1}{y}-1\right)dy=0$，

$$ln|x|+x+ln|y|-y=C,$$

由此得通解 $x-y+ln|xy|=C$；还有解$y=0$。

5．$(y+x)dy+(x-y)dx=0$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x}{y+x}$，令　$y=ux$，得

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{u-1}{u+1},$$

$$\frac{u+1}{u^2+1}du=-\frac{dx}{x},$$

即　$\left(\dfrac{u}{u^2+1}+\dfrac{1}{u^2+1}\right)du=-\dfrac{dx}{x}$，

$$\frac{1}{2}ln(u^2+1)+arctgu=-ln|x|+C,$$

$$ln(|x|\cdot\sqrt{u^2+1})+arctgu=C,$$

即　$arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)+ln\sqrt{x^2+y^2}=C$

6．$x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2-y^2}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$，令　$\dfrac{y}{x}=u$，得

$$u+x\frac{du}{dx}=u\pm\sqrt{1-u^2},$$

$$x\frac{du}{dx}=\pm\sqrt{1-u^2},$$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\pm\frac{dx}{x},$$

由此得　$arcsinu=\pm ln|x|+C$，还有$u^2=1$，

于是通解为　$arcsin\left(\dfrac{y}{x}\right)=\pm ln|x|+C$；还有解

$x^2 = y^2$.

7. $tgy\,dx - ctgx\,dy = 0$

解：$\dfrac{dx}{ctgx} - \dfrac{dy}{tgy} = 0$,

$-ln|\cos x| - ln|\sin y| = C_1$,

$-ln|\cos x \sin y| = C_1$,

故通解为　　$\cos x \sin y = C$,

另外，由 $tgy = 0$ 得　$y = k\pi$　$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

也是解.

8. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{e^{y^2+3x}}{y} = 0$

解：$\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{e^{y^2} \cdot e^{3x}}{y} = 0$,

$\dfrac{ydy}{e^{y^2}} + e^{3x}dx = 0$

$-\dfrac{1}{2}e^{-y^2} + \dfrac{1}{3}e^{3x} = C_1$　即　$2e^{3x} - 3e^{-y^2} = C$.

9. $x(lnx - lny)dy - ydx = 0$

解：$-ln\dfrac{y}{x}dy - \dfrac{y}{x}dx = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{y}{x}}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

令 $y=ux$，得 $u+x\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{u}{lnu}$，

$$\frac{lnu}{u(1+lnu)}du=-\frac{dx}{x},$$

$$\left(1-\frac{1}{1+lnu}\right)d(lnu)=-\frac{dx}{x},$$

$$lnu-ln(1+lnu)=-lnx-lnC,$$

$1+lnu=uxC$，即 $1+ln\left(\dfrac{y}{x}\right)=Cy$.

10. $\dfrac{dy}{dx}=e^{x-y}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^x}{e^y}$，$e^y dy=e^x dx$，$e^y=e^x+C$.

作适当的变换求下列方程的解：

11. $\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2$

解：令 $x+y=z$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}-1$，

原方程化为 $\dfrac{dz}{dx}-1=z^2$，$\dfrac{dz}{z^2+1}=dx$，

$arctgz=x+C$，即 $z=tg(x+C)$，

变量还原得 $y=tg(x+C)-x$.

12. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{(x+y)^2}$

解：令 $x+y=z$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}-1$，

原方程化为 $$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{z^2}+1,$$

$$\left(1-\frac{1}{z^2+1}\right)dz=dx,$$

$z-arctgz=x+C$，即 $y=ractg(x+y)+C$。

13． $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$

解：令 $\begin{cases}2x-y+1=0\\x-2y+1=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\frac{1}{3},\\y=\frac{1}{3}.\end{cases}$

取变换 $\begin{cases}x=X-\frac{1}{3}\\y=Y+\frac{1}{3}\end{cases}$

原方程化为 $$\frac{dY}{dX}=\frac{2X-Y}{X-2Y},$$

令 $Y=uX$，则 $\frac{dY}{dX}=u+X\frac{du}{dX}=\frac{2-u}{1-2u}$，

即 $X\frac{du}{dX}=\frac{2u^2-2u+2}{1-2u}$，

$$\frac{dX}{X}=-\frac{1}{2}\frac{d(u^2-u+1)}{u^2-u+1},$$

$$ln|X|=-\frac{1}{2}ln|u^2-u+1|+lnC,$$

$$|X|\sqrt{|u^2-u+1|}=C,$$

$$|X|\sqrt{\left|\frac{Y^2}{X^2}-\frac{Y}{X}+1\right|}=C,$$

$$\sqrt{|Y^2-XY+X^2|}=C,$$

$$\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)+\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=C_1$$

即 $\quad x^2-xy+y^2+x-y=C_2$

14. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+5}{x-y-2}$

解： $\triangle=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0$，令 $\quad x-y=z,$

则 $\quad \dfrac{dz}{dx}=1-\dfrac{dz}{dx},$

原方程化为 $\quad 1-\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z+5}{z-2},$

即 $\quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{-7}{z-2},$

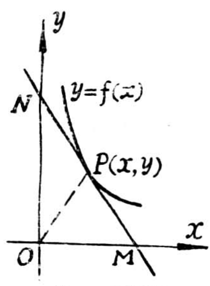
$(z-2)dz=-7dx$， 故 $\dfrac{(z-2)^2}{2}=-7x+C_1,$

$z^2-4z+14x=C,$

即 $\quad (x-y)^2-4(x-y)+14x=C,$

$x^2+y^2-2xy+10x+4y=C$

15. **求一曲线，使它的切线介于坐标轴间的部分被切点分成相等的部分.**



（第15题图）

解： 如图，设所求曲线的方程为 $y=f(x)$，$P(x,y)$ 是曲线上任一

点，于是过$p(x, y)$点的切线方程为：

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$

N点的坐标为 $\left(0, y-x\frac{dy}{dx}\right)$，

又依题设 $PN=PM=OP$，故有

$$\sqrt{x^2+\left(x\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

由此得 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\left(\frac{y}{x}\right)^2$， $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{y}{x}$

$\therefore$ $\quad ln|y|=\pm ln|x|+lnC_1$

于是 $Y_1=Cx$，$y_2=\frac{C}{x}$

但满足条件的曲线方程只是 $y=\frac{C}{x}$

16. 在图（2.1）所示的$R-C$电路中，设$E=10$伏，$R=$ $=100$欧，$C=0.01$法，而开始时电容C上没有电荷，问：

（1）当开关K合上"1"后，经过多长时间电容C上的电压$u_c=5$伏？

（2）当开关K合上"1"后，经过相当长的时间（如1分钟后）开关K从"1"突然转至"2"，试求u_c的变化规律，并问经过多长时间$u_c=5$伏？

解：依闭合电路基尔霍夫第二定律，有

$u_c+RI=E$，又 $\quad Q=Cu_c$，

$$I=\frac{dQ}{dt}=\frac{d}{dt}(Cu_c)=C\frac{du_c}{dt}$$

$$\therefore \quad u_c + RC\frac{du_c}{dt} = E \quad ①$$

（1）解①得 $u_c = E + Ae^{-\frac{t}{RC}}$,

因已知：$R = 100$，$E = 10$，$C = 0.01$，

$\therefore \quad u_c = 10 + Ae^{-t}$,

将初始条件 $t = 0$，$u_c = 0$ 代入上式，得 $A = -10$，

$\therefore \quad u_c = 10(1 - e^{-t})$，

当$u_c = 5$时，$5 = 10(1 - e^{t})$

$\therefore \quad t = ln2$（秒）

（2）当开关从"1"转至"2"时，$E = 0$，故有

$$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = 0,$$

解得 $u_c = Ae^{-\frac{t}{RC}}$,

又 $R = 100$，$C = 0.01$，$\therefore \quad u_c = Ae^{-t}$，

将初始条件：$t = 0$，$u_c = E = 10$代入上式，得 $A = 10$，

$\therefore \quad u_c = 10e^{-t}$，

于是当$u_c = 5$时，有$5 = 10e^{-t}$，故 $t = ln2$（秒）

习题2.2

求下列方程的解：

1．$\frac{dy}{dx} = y + sinx$

解：对应的齐次方程$\frac{dy}{dx} = y$的通解为 $y = Ce^{x}$.

令 $y=C(x)e^{x}$，代入原方程得 $C'(x)=\frac{\sin x}{e^{x}}$，

$$\therefore\quad C(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C,$$

$\therefore$ 原方程的通解为 $y=Ce^{x}-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$

2． $\frac{dx}{dt}+3x=e^{2t}$

解：对应的整齐方程 $\frac{dx}{dt}+3x=0$ 的通解为 $x=Ce^{-3t}$．

令 $x=C(t)e^{-3t}$，代入原方程得 $C'(t)=e^{5t}$，

$$\therefore C(t)=\frac{1}{5}e^{5t}+C$$

原方程的通解 为 $x=Ce^{-3t}+\frac{1}{5}e^{2t}$

3． $\frac{ds}{dt}=-s\cos t+\frac{1}{2}\sin 2t$

解：对应的齐次方程 $\frac{ds}{dt}=-s\cos t$ 的通解为 $s=Ce^{-\sin t}$

令 $s=C(t)e^{-\sin t}$，

代入原方程得 $C'(t)=\frac{1}{2}\sin 2te^{\sin t}$．

$$\therefore\quad C(t)=\sin te^{\sin t}-e^{\sin t}+C,$$

$\therefore$ 原方程的通解为 $s=Ce^{-\sin t}+\sin t-1$．

4． $\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x}y=e^{x}x^{n}$，$n$为常数