

 高等财经院校“十一五”精品系列教材

概率论

GAILULUN YU SHULITONGJI

与数理统计

陈晓兰 马玉林 主编



经济科学出版社
Economic Science Press

 高等财经院校“十一五”精品系列教材

概率论

GAILULUN YU SHULITONGJI

与数理统计

陈晓兰 马玉林 主 编
脱秋菊 张 慧 副主编



经济科学出版社
Economic Science Press

总 序

21 世纪最短缺的是什么？人才。

大学是以人才培养和科学研究为己任，大学教育说到底是一种人文教育，大学是养育人文精神的地方。尽管科学研究是当今评价一所大学水平和地位的重要内容，但是，支撑科学研究的基础是人才的培养。一所大学要培养出优秀的、具有国际化和市场竞争意识的人才，教材是实现培养目标的关键环节。没有优秀的教材，就不可能有高水平的高等教育；没有高质量的人才培养，就不可能产生一流或特色鲜明的大学。中国的大学教育已从往日的“精英教育”走向“大众教育”，上大学不再是少数人的专利。在这种情况下，如何保证教学质量的稳定与提高？教材建设的功能愈显重要。

一本好的教材，既是教师的得力助手，又是学生的良师益友。尤其是在当今知识爆炸的 21 世纪。为了提高教学质量，深化教学改革，山东财政学院启动了“十一五”精品教材建设工程。该项工程以精品课程教材建设为目标，以重点学科（专业）培育为基础，集中全校优秀师资力量，编撰了高等财经院校“十一五”精品系列教材。

本系列教材在编写中体现了以下特点：

1. 质量与特色并行。为保证编写质量，本系列教材从选题、立项到编写、出版，每个环节都坚持“精品为先、质量第一、特色鲜明”的原则。严把质量关，突出财经特点，树立品牌意识，建设精品教材。

2. 教学与科研相长。教材建设要充分体现科学研究的成果，科学研究要为教学实践服务。两者相得益彰，互为补充，共同提高。本系列教材将各学科领域最新教学与研究成果进行提炼、吸收，实现了教

学、科研结合的大学教育目标。

3. 借鉴与创新并举。任何一门学科都会随着时代的进步而不断发展。因此，我们在教材编写中始终坚持“借鉴与创新结合”的理念，舍其糟粕，取其精华。在中国经济改革实践基础上进行创新与探索，充分展示了当今社会发展的新理论、新方法和新成果。

本系列教材是山东财政学院教学质量与教学改革工程建设的重要内容之一，适用于经济学、管理学及相关学科的本科教学。它凝聚了众多教授和专家多年教学的经验和心血，是大家共同努力的结晶。我们期望摆在读者面前的是一套优秀的精品教材。当然，由于我们的经验存在欠缺，教材中难免有不足之处，衷心期盼专家、学者及广大读者给予批评指正，以便再版时修改、完善。

高等财经院校“十一五”精品系列

教材建设委员会

2009 年元月

前 言

随机现象的普遍性以及现代经济分析方法的定量化趋势,使得概率论与数理统计的应用日渐广泛,也使得概率论与数理统计课程成为高等财经类院校各专业学生的一门重要的必修课程。该课程不仅是学习后续课程及在各个学科领域中进行理论研究和实践探索的必要基础,而且对培养学生的综合能力,提高学生的数学素养,提高科研能力和创新能力都具有重要的作用。

本书是我们在山东财政学院多年教授概率论与数理统计课程的基础上编写而成。也是山东财政学院精品课程《概率论与数理统计》的一项重要建设成果。针对财经类专业的特点,本书在以下几个方面作了一些尝试:

1. 在编写过程中,除注重概率论与数理统计本身的科学性、系统性和严密性外,还特别注重了通俗性、思想性和直观性,力求以较为通俗的语言将高度抽象的课程内容介绍给读者。同时,考虑到财经类专业文理兼收的生源特点,在编写过程中,还特别注重介绍了定理和方法的思想性和图示的直观性,使学生更易于理解和接受。

2. 在编写本教材时,充分体现了内容与实际要求的协调统一。适当地引入历年研究生考试试题作为例题与习题,使学生在掌握基础知识的过程中接受或接触综合性的知识考查形式。同时,加强了习题与正文内容的协调性与针对性。教材各章均配备了A、B两部分不同类型、不同难度的习题,A部分的习题可以满足本课程教学大纲的基本要求,适度加大了B部分的题目数量和难度,主要为适应部分渴望进一步提高的学生的学习需求。部分章节中打“*”号的内容,是为保证教材体系的完整性和对数学基础要求较高的专业或学生编写的,供使用本教材的教师在授课时选用,也供学有余力的学生课外阅读。

3. 我们选编了部分综合运用概率论与数理统计知识并且具有简单的经济背景的题目,用以培养学生数学建模的思想和用数学知识分析问题解决问题的能力。为学生学习后续专业课程和从事经济研究奠定必要的基础。在附录一中介绍

了概率论与数理统计发展简史，目的是使学生体会到科学的发展是需要科学家不懈的努力和探索，引导他们对该课程的学习兴趣。

本书是山东财政学院“十一五”精品系列教材建设项目，由陈晓兰教授、马玉林副教授主编，具体编写分工如下：第1章、第2章由陈晓兰教授编写；第3章由张慧副教授编写，第4章、第8章由脱秋菊副教授编写，第5章、第6章、第7章由马玉林副教授编写，马玉林副教授负责全书的最终编排，陈晓兰教授负责全书的统稿和审定工作。

在本书的编写过程中我们参阅并借鉴了相关的文献资料，并得到了同行专家的指导与帮助，在此表示衷心的感谢。特别感谢经济科学出版社的编辑们和山东财政学院教务处有关领导的大力支持。

由于水平所限，错漏之处在所难免，望读者不吝指正。

编 者

2010年6月

目 录

第 1 章 随机事件及其概率	1
1.1 预备知识	2
1.2 随机事件和样本空间	4
1.3 概率	13
1.4 几何概型	26
1.5 条件概率与全概率公式	30
1.6 独立试验概型	41
习题 1	48
第 2 章 随机变量及其分布	54
2.1 随机变量的概念与分类	54
2.2 离散型随机变量及其分布	56
2.3 连续型随机变量及其分布	68
2.4 随机变量的分布函数	78
2.5 随机变量函数的分布	88
2.6 随机变量的数学期望	94
2.7 随机变量的方差	101
习题 2	106
第 3 章 随机向量	113
3.1 随机向量及其分布	113
3.2 条件分布与随机变量的独立性	121

3.3 随机向量函数的分布	127
3.4 随机向量的数字特征	131
习题3	138
第4章 大数定律和中心极限定理	145
4.1 对切比雪夫不等式的解读	145
4.2 大数定律	146
4.3 中心极限定理	148
习题4	150
第5章 抽样分布	154
5.1 总体和样本	154
5.2 统计量	157
5.3 抽样分布	161
习题5	173
第6章 参数估计	178
6.1 点估计概述	178
6.2 最大似然估计	184
6.3 矩估计	191
6.4 区间估计	194
习题6	204
第7章 统计假设检验	208
7.1 假设检验概述	208
7.2 单正态总体参数的假设检验	214
7.3 双正态总体参数的假设检验	223
习题7	228
*第8章 线性回归分析	232
8.1 一元线性回归模型及其参数估计	232

8.2 一元线性回归模型的检验	239
8.3 一元线性回归的预测和控制	241
习题 8	243
 参考答案	 245
常用统计数值表	262
参考书目	285

第 1 章 随机事件及其概率

现实世界存在着两类现象：一类是所谓确定性现象，即在一定条件下必然会发生（或必然不会发生）的现象，例如：

- (1) 在标准大气压下，纯水加热到 100°C 必然沸腾；
- (2) 在标准大气压下，温度高于 4°C 的纯水不会结冰。

这类现象，我们可以事先准确地断定其未来的结果，称之为**确定性现象**。研究这类现象所使用的数学工具是我们已经学过的微积分、代数与几何等。另一类是所谓**非确定性现象**，即在一定条件下具有多种可能的结果，究竟那种结果发生事先无法确定的现象。例如：

- (1) 掷一颗骰子，出现的点数可能是 1, 2, 3, 4, 5, 6 中的某一个；
- (2) 某保险公司的年赔偿金额；
- (3) 从某厂生产的一批产品中，任意抽取 4 件进行检验，抽到的次品数可能是 0, 1, 2, 3 或 4。

这类现象，在相同的可控制条件下进行一系列重复的观察或实验，每次出现的可能结果不止一个，而在每次实验或观察之前无法预知确切的结果，呈现出偶然性即不确定性，我们称之为**随机现象**。

恩格斯曾经说过：“在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。”（《马克思恩格斯选集》第四卷）人们经过长期实践和深入研究之后，也发现随机现象是偶然性与必然性的辩证统一。其偶然性表现在每次实验或观察之前，不能准确地预言发生哪种结果；其必然性表现在大量重复实验或观察中，它的结果呈现出某种量的规律性。例如，抛掷一枚形状对称、质地均匀的硬币一次，其结果可能是正面（徽花面）朝上，也可能是反面（数字面）朝上，正面出现与否，抛掷之前是无法确切地预言的。但多次重复地抛掷这枚硬币，正面出现的次数大约占抛掷总次数的一半（见 1.3 中表 1-3）。这种在大量重复实验或观察中呈现出的量的规律性，我们称之为**随机现象的统计规律性**。概率论与数理统计就是以随机现象的统

计规律性为研究对象的一门重要的、有特色的数学分支。一般认为数理统计是概率论的一种应用，而概率论则是数理统计的理论基础。由于我们所处的客观世界，无处不有偶然性在起作用，所以概率论与数理统计的理论与方法已经广泛应用于自然科学和社会科学等诸多领域。

“欲涉远必自迩，欲登高必自卑。”我们要对一门科学进行学习和研究，就必须从钻研它的一些基本概念和方法入手。因为任何一门科学，总包含着它所依据的一系列基本概念和方法。为此，我们首先回顾概率论与数理统计所必需的预备知识。

1.1 预备知识

1.1.1 两个基本原理

1. 加法原理

若完成一件事有 m 种不同的方式，第 i 种方式中有 $n_i (i=1, 2, \dots, m)$ 种不同的方法，其中任何一种方法都可以一次完成这件事，则完成这件事共有 $\sum_{i=1}^m n_i$ 种不同的方法。

加法原理又称分类加法计数原理，主要针对的是“分类问题”，其中各种方法相对独立，用其中任何一种方法都可以完成这件事情。

2. 乘法原理

若一件事需要经过先后 m 个不同步骤才能最后完成。其中第 i 个步骤有 $n_i (i=1, 2, \dots, m)$ 种不同方法，则完成该件事共有 $\prod_{i=1}^m n_i$ 种不同方法。

乘法原理又称分步乘法计数原理，主要针对的是“分步问题”，各个步骤中的方法相互依存，只有各个步骤都完成才算完成这件事情。

例 1.1.1 飞行在北京——天津——上海——广州航空线上的民航飞机，要准备多少种不同的飞机票？

解 由乘法原理知，需要 $4 \times 3 = 12$ 种不同的飞机票。

运用两个原理解决计数问题时,首先要仔细分析以确定需要分类还是分步。对“分类问题”做到“不重不漏”;对“分步问题”做到“步骤完整”;对较为复杂的问题,可同时运用两个基本计数原理或借助于列表、作图等方法分析解决。加法原理和乘法原理是学习排列组合的基础。

1.1.2 排列组合

1. 不重复的排列

从 n 个不同的元素中每次取出 m ($1 \leq m \leq n$) 个不同的元素,按照一定的顺序排成一列,称为从 n 个不同元素中每次取 m 个不同元素的排列。若 $m < n$,称之为选排列。若 $m = n$,称之为全排列。

选排列和全排列的种数分别用符号 P_n^m 和 P_n^n 表示,由乘法原理知其计算公式分别为

$$P_n^m = n(n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$P_n^n = n!$$

2. 可重复的排列

从 n 个不同的元素中有放回地(可重复)取 m 个元素,按照一定的顺序排成一列,称为从 n 个不同元素中取出 m 个的可重复的排列。

由乘法原理知其排列种数为 n^m 。

3. 组合

从 n 个不同的元素中每次取出 m ($1 \leq m \leq n$) 个不同的元素,不管顺序如何组成一组,称为从 n 个不同元素中每次取 m 个不同元素的组合。其组合总数用符号 C_n^m 表示,由乘法原理知其计算公式为

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

规定 $0! = 1$ 。

注 1.1.1 由上述计算公式不难验证组合有如下性质

- | | |
|--|---|
| (1) $C_n^m = C_n^{n-m}$; | (2) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$; |
| (3) $\sum_{k=0}^m C_{n_1}^k \cdot C_{n_2}^{m-k} = C_{n_1+n_2}^m$; | (4) $\sum_{m=0}^n C_n^m = 2^n$. |

例 1.1.2 从 6 个毕业生中, 任选 4 个人到某行业内 4 个分支机构工作, 每个机构 1 人, 有多少种分配方法?

解 有 $P_6^4 = 360$ 种分配法。

例 1.1.3 某城市电话号码是八位数字, 并且首位不能为零, 该城市最多可以安装多少台不同号码的电话机?

解 这是一个从 0, 1, 2, ..., 9 十个数码中选取八个数字的可重复的排列问题。由乘法原理知最多可以安装 9×10^7 台电话机。

例 1.1.4 在一次考试中, 某学生应做 9 道考题中的任意 6 道, 问他有多少种选法? 如果还要求他至少解答前 5 道题中的 3 道题, 有多少种选法?

解 本题与顺序无关, 属于组合问题。在 9 道考题中选 6 道, 有 $C_9^6 = 84$ 种选法; 若至少要回答前 5 道题中的 3 道, 包括下列三种情况:

(1) 在前 5 题中选 3 个, 后 4 题中选 3 个。由乘法原理, 有 $C_5^3 \cdot C_4^3 = 40$ 种选法;

(2) 在前 5 题中选 4 个, 后 4 题中选 2 个, 有 $C_5^4 \cdot C_4^2 = 30$ 种选法;

(3) 前 5 题全选, 后 4 题中选 1 个, 有 $C_5^5 \cdot C_4^1 = 4$ 种选法。

由加法原理, 共有 $C_5^3 \cdot C_4^3 + C_5^4 \cdot C_4^2 + C_5^5 \cdot C_4^1 = 74$ 种选法。

1.2 随机事件和样本空间

1.2.1 随机事件

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律性的数学学科。为了研究随机现象, 就要对客观事物进行观察或实验。这里所说的观察或实验是广义的, 可以是各类科学实验, 也可以是对某些事物的某些特征的观察。例如, 观察某种商品的日销量, 各种福利彩票的摇奖等。在概率论与数理统计中, 我们把对随机现象的观察或实验统称为**随机试验**, 简称**试验**。概率论中所研究的随机试验具有以下特点:

(1) 在可控条件相同的前提下, 试验可以 (或原则上可以) 重复进行, 即**重复性**;

(2) 每次试验的结果具有多种可能性, 但是试验之前可以明确试验的所有可能结果, 即**明确性**;

(3) 在每次试验之前不能准确地预言该次试验将会出现哪一种结果, 即随机性。

例 1.2.1 掷一颗骰子, 观察出现的点数就是一个随机试验。

例 1.2.2 抛一枚硬币, 观察正、反面出现的情况也是一个随机试验。

在概率论与数理统计中, 将随机试验的结果称为随机事件, 简称事件。换言之, 随机事件是指每次试验中, 可能发生也可能不发生, 而在大量重复试验中具有某种规律性的事件。通常用大写字母 $A, B, \dots$ 等表示。例如, 在例 1.2.1 掷骰子的试验中, “出现 2 点”、“出现偶数点”, 在例 1.2.2 抛硬币的试验中, “正面朝上”等都是随机事件。在随机事件中, 有的可以看成是由某些事件复合而成的, 而有些事件则不能分解为其他事件的组合。我们将不能分解为其他事件组合的最简单的随机事件称为基本事件。例如, 例 1.2.1 中“出现 2 点”、“出现 5 点”等都是基本事件, “出现偶数点”也是随机事件, 但它不是基本事件, 而是由“出现 2 点”、“出现 4 点”和“出现 6 点”这三个基本事件组成的。我们将这种能够分解为两个或多个基本事件的随机事件称为复合事件。

1.2.2 样本空间

对于随机试验中的随机事件及其相互关系或运算, 如果应用集合概念和集合图示法, 则较为直观且易于理解。为此, 我们引入样本空间的概念, 从集合论的角度来描述和研究随机事件。

对于一个特定的随机试验, 它的每一个基本结果(基本事件)称为一个样本点, 用小写字母 ω 表示。全体样本点的集合, 称为该试验的样本空间, 通常用 Ω 表示。

显然, 一个特定随机试验的样本空间 Ω 的子集就是该试验的一个随机事件, 若这个子集是单点集, 则它对应该试验的一个基本事件。随机事件在某一随机试验中发生, 当且仅当其所包含的某一样本点在试验中出现。由于每次试验中一定有样本空间 Ω 中的某一个样本点出现, 因此, 又称样本空间 Ω 为必然事件, 即每次试验中一定发生的事件, 称空集 Φ 为不可能事件, 即每次试验中一定不发生的事件。

应该指出的是: 必然事件和不可能事件是每次试验之前都可以准确预言的, 从本质上讲它们都不是随机事件, 但为了讨论问题方便, 我们还是把它们作为两个极端情况处理。必然事件与不可能事件有着紧密的联系, 并且不论必然事件、不可能事件还是随机事件, 都是相对于一定的试验条件而言, 如果试验的条件变了, 事情的性质也将可能发生变化。例如, 在掷骰子的试验中, 掷一颗骰子时,

“点数小于7”是必然事件，掷两颗骰子时，“点数之和小于7”是随机事件，而掷7颗骰子时“点数之和小于7”就是不可能事件了。

例 1.2.3 将一枚硬币连抛3次，观察正反面出现的情况，试写出该随机试验的样本空间。

解 用“H”表示出现“正面”，“T”表示出现反面。于是，由题设，基本事件是从两个相异元素H、T中，允许重复地取出3个元素的排列，而所有这种排列共有 $2^3=8$ 种可能结果，所以，样本空间是

$$\Omega = \{(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (H, T, T), \\ (T, H, H), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T)\}$$

注 1.2.1 随机试验的样本空间是由试验的所有基本事件所对应的样本点组成的集合。只要根据题设条件，分析基本事件的特征，则样本空间为

$$\Omega = \{e \mid e \text{ 是试验的基本事件}\}$$

基本事件和样本空间是概率论与数理统计中的两个十分重要的概念，样本空间可以是有限集，也可以是无限集。如观察“某射击手在击中目标之前的射击次数”的样本空间是

$$\Omega = \{k \mid k=0, 1, 2, \dots\}$$

例 1.2.4 将a、b两球随机放入3个不同的盒子中，事件A表示第一个盒子内没有球，事件B表示两球在同一个盒子内，写出该随机试验的样本空间以及事件A和B。

解 在该试验中，基本事件可以分成两类，一类是a、b两球放在同一个盒中，共有 $P_3^1=3$ 种可能结果： $(ab, 0, 0), (0, ab, 0), (0, 0, ab)$ 。

另一类是a、b两球分别放在两个不同的盒子中，共有 $P_3^2=6$ 种可能结果： $(a, b, 0), (b, a, 0), (a, 0, b), (b, 0, a), (0, a, b), (0, b, a)$ 。所以，样本空间为

$$\Omega = \{(ab, 0, 0), (0, ab, 0), (0, 0, ab), (a, b, 0), (b, a, 0), \\ (a, 0, b), (b, 0, a), (0, a, b), (0, b, a)\}$$

$$A = \{(0, ab, 0), (0, 0, ab), (0, a, b), (0, b, a)\}$$

$$B = \{(ab, 0, 0), (0, ab, 0), (0, 0, ab)\}$$

在集合论中，通常用“文(Venn)氏图”直观地描述集合及其相互关系。我们在引入了样本空间和样本点的概念之后，也可以借助文氏图来直观地描述一个随机试验以及随机试验所包含的随机事件及其相互关系。即用平面上某一方形(或矩形、或其他平面图形)区域表示必然事件即样本空间 Ω ，用该区域上的子区域表示随机事件，如图1-1所示。

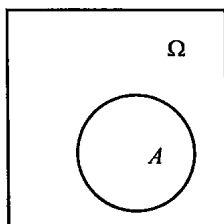


图 1-1

文氏图将有助于我们对一些概念和理论的理解。

1.2.3 随机事件之间的关系与运算

在研究随机试验时，我们发现一个随机试验中往往有多个随机事件，其中有些比较简单，而有些则较为复杂。为了用较简单的事件表示较复杂的事件进而研究较复杂事件的性质和规律，下面引入同一试验中各种事件之间的几种主要关系和运算。

1. 包含关系

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A ，或称事件 A 包含于事件 B ，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ 。

2. 相等关系

如果事件 A 包含事件 B ，事件 B 也包含事件 A ，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A = B$ 。

3. 事件的和（并）

“两事件 A 与 B 中至少有一件发生”也是一个事件，把这一事件称为 A 与 B 的和（并），记为 $A + B$ 或 $A \cup B$ 。

4. 事件的积（交）

“两事件 A 与 B 同时发生”也是一个事件，将这一事件称为 A 与 B 的积（交），记为 AB 或 $A \cap B$ 。

事件的和与积都可以推广到有限多个事件以及可列个事件的情形：

$\sum_{i=1}^n A_i$ 或 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 表示 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个事件发生;

$\sum_{i=1}^{+\infty} A_i$ 或 $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 中至少有一个事件发生;

$\prod_{i=1}^n A_i$ 或 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 表示 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生;

$\prod_{i=1}^{+\infty} A_i$ 或 $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 同时发生。

5. 事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”是一个事件，称为事件 A 与 B 之差，记为 $A - B$ 。

6. 互不相容事件

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB = \Phi$ ，则称事件 A 与 B 互不相容（或称互斥）。

若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 诸事件中，任何两个事件都是互不相容的，即 $A_i A_j = \Phi (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n)$ ，则称 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容（或两两互斥）。

7. 对立事件

“事件 A 不发生”这一事件称为事件 A 的对立事件（或逆事件），记为 $\bar{A}$ 。

注 1.2.2 事件 A 与 B 互不相容，只要求 $AB = \Phi$ ，而事件 A 与 B 对立，则除了要求 $AB = \Phi$ 之外，还要求 $A + B = \Omega$ 。即两个对立事件一定是互不相容事件；反之，两个互不相容的事件不一定是对立事件。

8. 完备事件组

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容，且它们的和是必然事件，即

$\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$ ，则称这 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 构成一个完备事件组。

实际上，完备事件组 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分，并且在每次试验中，事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中必有且仅有一个发生。当 $n=2$ 时，构成完备事件组的两个事件 A_1, A_2 就是相互对立的事件。

上述事件之间的关系可利用文氏图直观地表示出来，如图 1-2 所示：