新编

考研数学必做主观题500题精析

◎蔡子华 主编

全面覆盖最新大纲规定考试要点

题目道道精选 提供最佳主观题专项训练

题解精辟到位 全方位揭示解题高分秘诀

凝集名师丰富经验 深受广大学子信赖

科学出版社

内容简介

本书是根据教育部考试中心制定的全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》编写的．全书分为主观题集与主观题解两部分，内容涉及大纲中要求的高等数学、线性代数及概率论与数理统计三门学科．

本书内容全面，解法新颖，不少题目一题多解且方法独特，是广大考生的良师益友．

图书在版编目(CIP)数据

新编考研数学必做主观题500题精析/蔡子华主编．—北京：科学出版社，2012.1

ISBN 978-7-03-033231-8

Ⅰ.新… Ⅱ.蔡… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第279705号

责任编辑：曾　莉/责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超/封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：787×1092　1/16

2012年1月第　一　版　印张：17

2012年1月第一次印刷　字数：422 000

定价：29.80元

前言

PREFACE

主观题(计算题、证明题及应用题)在硕士研究生入学统一考试数学试卷中占60%以上的比例,其涵盖的内容广泛,综合性强,且解题要求逻辑清楚、推理严密.

《新编考研数学必做主观题500题精析》为帮助报考硕士研究生的朋友扩展解题思路,熟悉常用方法技巧,尽快提高求解主观题的能力而编写,它是深得广大考研学子喜爱的《新编考研数学必做客观题1500题精析》的姊妹篇.全书精选500道考研数学主观题,分为主观题集和主观题解两部分;内容包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计;按计算题、证明题、应用题三个单元编写,适合选考数学一至数学三各卷种的考生备考使用.

主观题集中大多数题是近年来统考数学试卷中未出现过的,内容全面,代表性强.遴选该部分题目的原则是:紧扣硕士研究生入学统一考试数学考试大纲,重视基础,摒弃偏题、怪题,难度与历年统考真题中等及以上的题目相当.为方便读者使用,题集中凡考纲仅对数学一考生要求的内容标有"*"记号,仅对数学二、数学三考生要求的内容相应标有"○"、"△"记号,公共部分无标记(依据最新考试大纲).

主观题解解题思路清晰,方法独特(不少题),过程详细,步骤规范.难度较大的题前有分析后有评注,利于读者深刻理解,切实掌握.

读者可先尝试求解本书第一部分的题目,再在第二部分的帮助下找出自己在理解数学基本概念、基本原理及运用基本方法诸方面的差距,在实战中增强自我发现问题、分析问题和解决问题的能力,从而大幅度提高应试水平.

由于时间仓促,书中错误和疏漏之处难免,欢迎广大读者、数学同仁批评指正.

编　者

2011年11月

目录

CONTENTS

第一部分　主观题集

第二部分 主观题集

第一部分

主观题集

第一篇 计算题

A. 高等数学

一、一元函数微分学

（一）极限

1. 已知 $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+x-2}$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$，且$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$，求 a,b,c.

2. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\right]$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n})]\ (|x|<1)$.

3. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\csc^2 x-\dfrac{1}{x\sin x}\right)$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$；

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1^{1/x}+a_2^{1/x}+\cdots+a_n^{1/x}}{n}\right)^{nx}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\tan 2x\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]$；

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-x\right)$.

4. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\sin\dfrac{1}{n}}{\left(\arctan\dfrac{1}{n}\right)^2}$.

5. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{n^2+1}\sin\dfrac{1}{n^2}\cos n^2$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

6. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{2\pi}{n}\cos\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\dfrac{(n-1)\pi}{n}\cos\dfrac{(n-1)\pi}{n}+\dfrac{n\pi}{n}\cos\dfrac{n\pi}{n}\right]\sin\dfrac{\pi}{n}$.

7. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}}{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\ (p>0)$.

8. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t\,|\cos t|\,\mathrm{d}t}{x^2}$.

9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+i+1}\sin\left(\alpha+\dfrac{i}{n}\beta\right)$.

10. 求 $\lim\limits_{x\to0}\int_{-x}^{x}\dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{|t|}{x}\right)\cos(b-t)\mathrm{d}t$. 其中 b 为常数.

11. 设 $F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t$，$f(u)$ 可微，$f(0)=0$，$f'(0)=1$. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^4}$.

12. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$.

13. 设 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{f''(x)}{2!}h^2+\dfrac{f'''(x+\theta h)}{3!}h^3\ (0<\theta<1)$，$f(x)$ 有四阶连续导数，且 $f^{(4)}(x)\neq0$，求 $\lim\limits_{h\to0}\theta$.

14. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}f[f(x)]$.

15. 设 $f(x,y)$ 有一阶连续偏导数，$f(1,1)=1$，$f'_x(1,1)=2$，$f'_y(1,1)=-3$. 设 $\varphi(x)=f\{x,f[x,f(x,x^2)]\}$，求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln[\varphi(x)]}{x-1}$.

16. 设 $f(u)$ 在点 $u=0$ 的某个邻域内连续，在点 $u=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=3$. 求 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi t^3}$.

17*△. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n}}{\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}$.

18*△. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{k}{3}\right)^k$.

19*△. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

20. 设 $f(x)$ 可微，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}tf(t)\sin\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$.

（二）函数的连续性

1. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 是连续函数，求 a,b 之值.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\sin x$,讨论 $f[g(x)]$ 的连续性.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}b, & x<1,\\ \sqrt{x^2+1}, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 试求 a,b 的值使 $f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ e^x+\beta, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 试根据不同的 α,β,讨论 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性,并指出间断点的类型.

(三) 导数与微分

1*○. 设函数 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3,\\ y=e^y\sin t+1\end{cases}$ 所确定,求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$

2. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ \ln(1-x)+xe^{-x}, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

3. 设函数 $\theta(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,$f(x)=\cos\theta(x)$,$f'(x)=\sin\theta(x)$. 对 $\theta(x_0)\neq n\pi$ 的 x_0,求 $\theta'(x_0)$.

4. 设 $f(x)$ 的定义域为所有非零实数之全体,对任何非零实数 x,y,$f(xy)=f(x)+f(y)$,且 $f'(1)$ 存在.

(1) $f(x)$ 还有哪些点的导数存在? (2) 求 $f(x)$.

5. 设 $f_n(x)=f\{f[\cdots f(x)]\}$ (共 n 重 f),若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $\dfrac{df_n(x)}{dx}$.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $x\leqslant x_0$ 有定义,且二阶导数存在. 问如何选择 a,b,c,可使下面函数有二阶导数存在?

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\leqslant x_0\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0\end{cases}$$

7. 设 $y=\arctan x$,求 $y^{(n)}(0)$.

8. 设 $y=\dfrac{e^x}{x}$,求 $y^{(n)}$.

9. 设 $f(x)=\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x$,求 $f^{(n)}(0)$.

10. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y$ 所确定,其中 f 有二阶导数且 $f'\neq 1$,求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

11. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+xf(x)}{x^3}=0$. 求 $f(0)$,$f'(0)$,$f''(0)$.

12. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 其中 $\varphi(x)$ 具有三阶导数,且 $\varphi(0)=1$,$\varphi'(0)=0$,$\varphi''(0)=1$,$\varphi'''(0)=6$.

(1) 确定 a 的值,使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续;

(2) 求 $f'(x)$;

(3) 讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

13. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 12x-16, & x>2\end{cases}$$

(1) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式;

(2) 讨论 $g(x)$ 的连续性、可导性,并求 $g'(x)$.

(四) 中值定理与导数的应用

1. 设对于 $x\in(-\infty,+\infty)$,$f(x)$ 满足微分方程

$$xf''(x)+\varphi(x)[f'(x)]^2=e^{ax}-1$$

其中 $a\neq 0$ 为常数,$\varphi(x)$ 为连续函数且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x}$ 存在.假设 $f'(x_0)=0$,讨论 $f(x)$ 在点 x_0 是否取得极值,若取得极值是极大值还是极小值.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0,\\ xe^x+1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的极值.

3. 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$,其中 a,b,c 都是常数且 $|a|\neq|b|$.

(1) 证明:$f(x)=-f(-x)$;

(2) 求 $f'(x),f''(x),f^{(n)}(x)$;

(3) 若 $c>0$,$|a|>|b|$,则 a,b 满足什么条件 $f(x)$ 才有极大值和极小值?

4*○. 设曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=3t+t^3,\end{cases}$ 其中 $t>0$,求曲线的凹凸区间和拐点.

5. 设 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

(1) 求函数 y 的单调区间及极值;

(2) 求函数图像的凹凸区间及拐点;

(3) 求函数图像的渐近线;

(4) 作出函数的图形.

6. 求曲线 $x=\dfrac{t+2}{t^2-1},y=\dfrac{1}{t(t^2-1)}$ 的渐近线.

7. 若以 $A(k)$ 表示函数 $y=x^2-2kx$ 在$[-1,2]$上的最大值与最小值之差,试求 $A(k)$ 的最小值 $(-\infty<k<+\infty)$.

(五) 有关方程的根的问题

1. 在区间 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上研究方程 $\sin^3x\cos x=a\ (a>0)$ 实根的个数.

2. 研究方程 $x\ln x+A=0$ 实根的个数.

3. 设 $f(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx$,其中 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是实数,且

$a_n > |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$. 讨论方程 $f^{(n)}(x) = 0$ 实根的个数.

4. 设 $f(x)$ 是 n 次多项式：

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad (a_n \neq 0)$$

且 $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(m)}(x_0) = 0, f^{(m+1)}(x_0) \neq 0\ (m < n-1)$. 试问 $x = x_0$ 是方程 $f(x) = 0$ 的多少重根？

二、一元函数积分学

（一）不定积分

1. 求下列各不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx$；

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + (1 + x^2)^{3/2}}} dx$；

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}\ (a > 0, b > 0)$；

(4) $\displaystyle\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1 + x^2)^{3/2}} dx$；

(5) $\displaystyle\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$；

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6 (1 + x^2)}$；

(7) $\displaystyle\int \frac{\sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sin 2\sqrt{x}} dx$；

(8) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx$；

(9) $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x(1 + x e^x)} dx$；

(10) $\displaystyle\int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx$；

(11) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x \sqrt{1 + \ln^2 x}}$；

(12) $\displaystyle\int (x + |x| + 1)^2 dx$.

2. 建立 $I_m = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^m x}$ 的递推公式.

3. 设 $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x$，当 $0 < x < 1$ 时，求 $f(x)$.

4. 设 $f'(\ln x) = \begin{cases} e, & 1 \leqslant x \leqslant e, \\ x, & e < x < +\infty, \end{cases}$ 且 $f(1) = e$，求 $f(x)$.

5. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，当 $x \geqslant 0$ 时有 $f(x)F(x) = \sin^2 2x$，且 $F(0) = 1, F(x) \geqslant 0$，求 $f(x)$.

6. 求出两多项式函数 $P(x), Q(x)$，使得下面等式成立：

$$\int [(2x^4 - 1)\cos x + (8x^3 - x^2 - 1)\sin x] dx = P(x)\cos x + Q(x)\sin x + C$$

（二）定积分

1. 计算下列定积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\, dx$；

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \left[\max(1, x^2) + \sin^2 x \ln \frac{4 + x}{4 - x}\right] dx$；

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^9 x - \sin^9 x}{\cos x + \sin x} dx$；

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$；

(5) $\int_{e}^{1}\sin(\ln x)\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_{0}^{\pi}\cos^{n}x\cos nx\,\mathrm{d}x$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $\int_{2}^{4}f(x-2)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

3. 设函数 $f(x)$ 处处可导，且 $\int_{x}^{2x}f(t)\mathrm{d}t=\sin x\cos 3x+x$. 试求 $f(0)$，$f'(0)$.

4. 设函数 $g(x)$ 处处连续，且 $g(1)=6$，$\int_{0}^{1}g(x)\mathrm{d}x=8$，$f(x)=\frac{1}{2}\int_{0}^{x}(x-t)^{2}g(t)\mathrm{d}t$. 试求 $f''(1)$，$f'''(1)$.

5. 不恒等于 0 的连续函数 $f(x)$ $(x\in(-\pi,\pi))$ 满足 $f^{2}(x)=\int_{0}^{x}f(t)\frac{1+\sin t}{1+\cos t}\mathrm{d}t$，求 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

6*○. 设 $f(x)=\int_{1}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{(t^{2}+1)(t^{2}+9)}$，试求 $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{f'(x)}{1+f^{2}(x)}\mathrm{d}x$.

7. 设函数 $f(x)$ 可导且有 $f'(x)+xf'(x-1)=4$，又

$$\int_{0}^{1}f(xt)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}f(t-1)\mathrm{d}t=2x^{3}+x^{2}+\frac{2}{x}$$

求 $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x$.

8. 计算下列定积分：

(1) $\int_{0}^{n\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{0}^{n\pi}x\,|\sin x|\cos 2x\cos 4x\,\mathrm{d}x$.

9. 设函数 $f(x)$ 是任意的二次多项式，$g(x)$ 是某个二次多项式，且已知

$$\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right]$$

求 $\int_{a}^{b}g(x)\mathrm{d}x$.

10. 计算下列反常(广义)积分：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}(|x|-x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^{2}|}}$.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式.

12. 设 $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的连续偶函数，且 $f(x)>0$. 又 $F(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)\mathrm{d}t$ $(a>0)$，求 $F(x)$ 在 $[-a,a]$ 上的最小值.

三、多元函数微分学

1. 设 $z=f[x^{2}-y^{2},\cos(xy)]$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，求 $\frac{\partial z}{\partial r}$. 其中 f 有一阶连续偏导数.

2. 设 $z=\frac{y}{f(x^{2}-y^{2})}$，其中 f 为可微函数. 求 $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 若函数 $f(x,y,z)$ 恒满足关系式 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$ 就称为 k 次齐次函数,验证 k 次齐次函数满足关系式(其中 f 存在一阶连续偏导数)

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$$

4. 设函数 $z=F\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x,xy\right)$,其中 F 有二阶连续偏导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

5. 设 $z=x^2 f\left[1+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right]$,$f,\varphi$ 为可微函数,求 $\mathrm{d}z$.

6. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数,其中 φ 具有二阶导数且 $\varphi'\neq -1$.

(1) 求 $\mathrm{d}z$;

(2) 记 $u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$,求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

7. 设 $z=f(x,y)$,$\varphi(x,y)=0$,其中 f 和 φ 对 x,y 具有二阶连续偏导数且 $\varphi_y'\neq 0$,求 z 对 x 的二阶导数.

8. 设函数 $z=z(x,y)$ 的 z_x',z_y',z_{xy}'' 均存在且连续,试用变换 $u=x-2\sqrt{y}$,$v=x+2\sqrt{y}$ 把 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$ $(y\geqslant 0)$ 化成 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$,并求 $z(x,y)$.

9. 已知 $\begin{cases}xu+yv=1,\\x+y+u+v=0,\end{cases}$ 其中 $u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$,求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

10*. 设 $u=\frac{f(r)}{r}$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,$f(r)$ 二阶可导,$f(1)=0$,$f(2)=1$. 又 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\,u)=0$,求函数值 $u(1,1,1)$.

11. 求由方程 $x^2+y^2+z^2-xz-yz-2x-2y+2z-6=0$ 确定的函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

12. 求函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在区域 D: $|x|+|y|\leqslant 1$ 上的最大、最小值.

四、多元函数积分学

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D |\sin(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 为 $0\leqslant x\leqslant \pi$,$0\leqslant y\leqslant \pi$;

(2) $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D:$y\geqslant 0$,$x^2+y^2\leqslant 1$,$x^2+y^2\geqslant 2x$;

(3) $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}$,其中 D 是由 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ 与 $y=-x$ 所围平面区域;

(4) $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,其中 D 是由 $x+y=1$,$x=0$,$y=0$,$y=\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$ 所围成的平面区域;

(5) $\iint\limits_D (x^2+y^3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 其中 D 为:$0\leqslant x\leqslant 2$,$-2\leqslant y\leqslant 2$,$x^2+y^2\geqslant 2x$;

(6) $\iint\limits_D (x^2+|xy|+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:(x^2+y^2)^2\leqslant 2xy$.

2. 设 $F(t)=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$f(x,y)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $D:x+y\leqslant t$，求 $F(t)$.

3*. 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_\Omega \mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

(2) $\iiint\limits_\Omega \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 Ω 为由 $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=0$，$z=0$ 所围立体.

(3) $\iiint\limits_\Omega |xyz|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为由 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，$x^2+y^2=1$，$z=0$ 所围立体.

(4) $\iiint\limits_\Omega (x+y)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为由 $z=xy$，$x=y$，$x=1$，$z=0$ 所围立体.

4*. 计算下列曲线积分：

(1) $\oint_\Gamma xyz\mathrm{d}z$，其中 Γ 是由平面 $y=z$ 截球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所得截线，从 z 轴正向看去是逆时针方向；

(2) $\oint_C \dfrac{(y+x^2y^2+x^4)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 C 为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的正向；

(3) $\oint_L \dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2-xy+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=4$ 的正向；

(4) $\int_L (3xy+\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y=x^2-2x$ 上以点 $O(0,0)$ 为起点，以点 $A(4,8)$ 为终点的曲线段；

(5) $\oint_L |y|\mathrm{d}x+|x|\mathrm{d}y$，其中 L 为以点 $A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(-1,0)$ 为顶点的三角形正向边界.

5*. 设积分 $I_1=\int_{\overline{AMB}}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y$，$I_2=\int_{\overset{\frown}{ANB}}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y$，其中 $\overline{AMB}$ 为连接点 $A(1,1)$，$B(2,6)$ 的直线段，$\overset{\frown}{ANB}$ 为连接 A，B 的抛物线段 $y=2x^2-x$. 试求 I_2-I_1.

6*. 设曲线积分 $\oint_L 2[x\varphi(y)+\psi(y)]\mathrm{d}x+[x^2\psi(y)+2xy^2-2x\varphi(y)]\mathrm{d}y=0$，其中 L 为任意一条平面曲线.

(1) 已知 $\varphi(0)=-2$，$\psi(0)=1$，求可微函数 $\varphi(y)$，$\psi(y)$；

(2) 求沿 L 从原点 $(0,0)$ 到点 $M\left(\pi,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的曲线积分.

7*. 确定 λ 的值，使得在不经过直线 $y=0$ 的区域上，曲线积分

$$I=\int_L \frac{x(x^2+y^2)^\lambda}{y}\mathrm{d}x-\frac{x^2(x^2+y^2)^\lambda}{y^2}\mathrm{d}y$$

与路径无关. 并求当 L 从点 $A(1,1)$ 到 $B(0,2)$ 时 I 的值.

8*. 计算 $\oint_\Gamma 2y\mathrm{d}x-z\mathrm{d}y-x\mathrm{d}z$. 曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\ x+z=R,\end{cases}$ Γ 的方向由 x 轴的正向看是逆时针方向.

9*. 设函数 $f(t)$ 在$(-\infty,+\infty)$内有连续导数,且满足

$$\int_0^{x-y-2} f(t)\mathrm{d}t = 2x^2+2y^2-4xy+9$$

(1) 求 $f(t)$;

(2) 计算$\int_L f(x-y-2)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$,$L$ 是点 $O(0,0)$ 至 $A(1,2)$ 的任意光滑曲线.

10*. 计算下列曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$,其中$\Sigma$为圆柱面 $x^2+y^2=R^2$,平面 $z=-H$ 和 $z=H$ 所围立体的表面;

(2) $\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\,\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$为 $|x|+|y|+|z|=1$;

(3) $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 限于 $x^2+y^2=x,z\geqslant 0$ 部分的外侧.

11*. 将$\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}$化成对面积的曲面积分再求其值,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

12*. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=h$ $(h>0)$ 所截下的有限部分的外侧.

13*. 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$,其中$\Sigma$:$z-1=-(x^2+y^2)$ $(z\geqslant 0)$ 的外侧.

14*. 设当 $t\in(-\infty,+\infty)$ 时 $f(t),g(t),h(t)$ 为连续函数,曲面Σ为长方体Ω:$0\leqslant x\leqslant a$,$0\leqslant y\leqslant b$,$0\leqslant z\leqslant c$ 表面的外侧,计算$\iint\limits_{\Sigma}f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

15*. 求$\iint\limits_{\Sigma}[yf(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[xf(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[2xyf(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数,Σ是曲面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于 $z=2$ 与 $z=8$ 之间部分的内侧.

五、级　　数*△

(一) 常数项级数

1. 判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}\sin\dfrac{\pi}{n}$;

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\ln\dfrac{n+1}{n-1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^p$;