College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

工程数学

数学物理方程与特殊函数

（第四版）

学习指南与习题解答

东南大学数学系　王元明　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学学习辅导丛书

工程数学

数学物理方程与特殊函数（第四版）学习指南与习题解答

Shuxue Wuli Fangcheng yu Teshu Hanshu

(Di-si Ban)

Xuexi Zhinan yu Xiti Jieda

东南大学数学系

王元明　编

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

修订版前言

这本教学辅导书是与我编写的《数学物理方程与特殊函数(第四版)》配套使用的。由于该教材已出版修订版(第四版),所以这本辅导书也应作相应修改。与第一版主要差异有以下两点:

第一,由于在教材(第四版)第三章已增加了傅里叶变换与拉普拉斯变换的有关内容,所以本书第一章中的相关内容将被删去。不过为了让读者更深入地理解积分变换的知识,我们把教材(第四版)中没有给出证明的几个理论结果在本书内给出证明,即书中§1.5积分变换中几个理论结果的证明。

第二,本书对教材(第四版)中所有习题作了详细解答。由于在第一版中已经对所有习题都作了释疑与启示,其中有些习题给出的启示已经与解答无异,书中就不再对这部分习题的解答作补充了。

高等教育出版社诸位同志对本书的修改与出版给予了许多帮助和支持,特别是于丽娜和李茜两位同志更是付出了许多辛勤的劳动,作者在此向他们表示衷心的感谢。

王元明

2011.11.28

前　言

“数学物理方程与特殊函数”(有时简称为“数学物理方程”)是理工科各专业学生的一门重要的数学课程。她之所以重要是因为她研究的问题直接来源于物理学、电子学及力学等基础学科,也可以说她是数学与这些学科之间的一座桥梁。长期以来,学生都普遍反映这门课程比较难学,主要表现在:数学推导冗长、习题不好做。

这门课是不是难学?如果说是难,到底难在何处?其实,通过仔细分析不难发现,学生感觉到难学是因为以下两个原因:

第一,在建立定解问题时需要用到物理学、电子学、力学等学科中的一些基本原理和方法,读者对相关内容不太熟悉或不会灵活运用;

第二,在进行理论分析和解题时需要用到数学中其他分支的一些理论和技巧,如微积分、常微分方程、傅里叶分析、复变函数、积分变换等。对这些内容有些学生当初就没有学好,有的学生即使当时学得不错,但到用的时候也已经遗忘得差不多了,解题时就会感到困难。

为了帮助学生克服上述困难、学好这门课程,高等教育出版社建议我写一本这门课程的教学辅导书,与我编写的《工程数学——数学物理方程与特殊函数(第三版)》(以后简称教材)配套使用。一开始,我没有接受这个建议,因为我认为要学好一门课程,主要依靠学生自己的努力(当然也要靠教师把课教好),要自己做习题,不能依赖各种各样的辅导材料,更不能从辅导书上抄习题解答。当然,一本好的辅导书对读者确实能起到启迪和指导的作用。但要写一本好的学习辅导书,谈何容易!

数个月以后,高等教育出版社高等理工分社的李艳馥同志又

多次来电,和我商讨写辅导书一事,我终于被她的责任心和诚意所感动,答应试一试。

基于我前面的认识,决定以“温故、启示、巩固”作为写这本材料的准则。具体地说,就是使这本书包括三个方面的内容:第一,对《数学物理方程与特殊函数》一书中所涉及的其他数学分支的内容作一个梗概的复习;第二,对该书中的一些主要内容和所有的习题作一些点评和释疑,这些“点评和释疑”足以帮助读者更深入地理解所学的方法和完成书中所有的习题了;第三,补充一些综合性的题目并给出必要的分析与答案。

我的愿望是:这本书对读者真正有所帮助。当然,愿望与结果往往并不是完全一致的,究竟效果如何,有待读者来评说了。

高等教育出版社理工分社的同志,特别是李艳馥、周传红等诸位编辑为本书的问世付出了辛勤的劳动,作者在此向他们表示衷心的感谢。

王元明

2004.3.1

目　　录

第一章

基础知识

在第一版前言中我们已经说过，学生之所以感到“数学物理方程与特殊函数”这门课比较难学，原因之一就是它要用到其他数学分支中的一些知识，如常微分方程、积分学中的一些公式与方法、傅里叶分析、复变函数、拉普拉斯变换等. 为了便于读者复习，在这一章中我们将对这些知识作一个概要的描述.

§1.1　二阶线性常系数常微分方程

在这一节内，我们将复习二阶线性常微分方程解的结构以及常系数情形解的求法.

1.1.1　二阶线性常微分方程及解的结构

二阶线性常微分方程的一般形式为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \tag{1.1.1}$$

其中 $p(x)$，$q(x)$，$r(x)$是某区间 I 上的已知函数. 如果 $r(x)\equiv 0$，则称(1.1.1)是齐次的；若 $r(x)\not\equiv 0$，则称(1.1.1)为非齐次的.

对于线性齐次方程来说，有一个重要的特性，即若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$都是

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1.1.2}$$

的解,则对任意常数 C_1, C_2,函数 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 仍是(1.1.2)的解,这个结果很容易验证.如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 在 I 上是线性无关的,即在 I 上等式

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \equiv 0$$

仅当 $\alpha = \beta = 0$ (α, β 为常数)时才成立,则 $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 就是(1.1.2)的通解.所谓通解就是说(1.1.2)的任一个解都可以表示成为这个形式(即 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的一个线性组合).例如方程

$$y'' + y = 0 \tag{1.1.3}$$

有两个解:

$$y_1(x) = \cos x, \qquad y_2(x) = \sin x.$$

而且这两解是线性无关的,所以(1.1.3)的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

据上所述,为了求出线性齐次方程(1.1.2)的通解,只要设法找到它的两个线性无关的特解即可.

对于二阶线性非齐次方程(1.1.1)(其中 $r(x) \neq 0$)而言,可以证明下列结论:

若 y_* 是(1.1.1)的一个特解,则它的任一个解 $y(x)$ 都可以表成

$$y(x) = y_*(x) + Y(x), \tag{1.1.4}$$

其中 $Y(x)$ 是对应的齐次方程(1.1.2)的某个解.

事实上,由 $y_*(x)$ 及 $y(x)$ 都是(1.1.1)的解,即

$$y''_* + py'_* + qy_* = r,$$

$$y'' + py' + qy = r.$$

两式相减得

$$(y-y_*)''+p(y-y_*)'+q(y-y_*)=0.$$

记

$$Y=y-y_*,$$

则 Y 是齐次方程(1.1.2)的解,故 $y=y_*+Y$.

利用这个结果可知,若 Y 是(1.1.2)的通解,则由(1.1.4)所给出的函数 $y(x)$ 必是(1.1.1)的通解,即

非齐次方程的通解 = 非齐次方程的一个特解 + 对应的齐次方程的通解. (1.1.5)

这个结果与代数学里线性方程组的理论是一致的.它表明,为了求出二阶线性非齐次方程(1.1.1)的通解,只要先求出它的一个特解,再求出对应的齐次方程的通解.例如考虑方程

$$y''+y=e^x. \tag{1.1.6}$$

在前面我们已经求出它所对应的齐次方程(1.1.3)的通解为 $C_1\cos x+C_2\sin x$.

另外,我们容易验证(1.1.6)有一个特解 $y_*(x)=\frac{1}{2}e^x$,所以(1.1.6)的通解为

$$y(x)=\frac{1}{2}e^x+C_1\cos x+C_2\sin x,$$

其中 C_1,C_2 是任意常数.

1.1.2 二阶线性常系数齐次方程

在这一段内,我们讨论如何求出线性齐次方程的通解的问题.下面将要说明,当 p,q 是常数时,可以用代数的方法求出(1.1.2)的通解.

假设 $y(x)$ 是(1.1.2)的解,其中 p,q 均为常数,则在 I 内

$$y''(x)+py'(x)+qy(x)\equiv 0,$$

即 y'',py',qy 能够抵消掉. 由于 p,q 是常数,故只有当 y,y' 与 y''都是同一类型的函数时才能办到. 对于什么样的函数,它和它的一阶、二阶导数是同一类型的呢? 指数函数具有这样的特点.

现在令 $y=e^{kx}$是方程

$$y''+py'+qy=0 \quad (p,q\text{ 是常数}) \tag{1.1.7}$$

的解,将它代入方程得

$$(k^2+pk+q)e^{kx}\equiv 0.$$

由此可得

$$k^2+pk+q=0, \tag{1.1.8}$$

这是一个一元二次的代数方程,称为(1.1.7)的特征方程,它的两个根是

$$k_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2},\quad k_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}. \tag{1.1.9}$$

与它们相对应的两个函数 $y_1(x)=e^{k_1x}$与 $y_2(x)=e^{k_2x}$必是(1.1.7)的解. 现在的问题是:这两个函数能否构成(1.1.7)的通解? 或者说,$y_1(x)$与 $y_2(x)$是否线性无关? 下面分三种情况来说明:

1. $p^2-4q>0$

这时由(1.1.9)所给出的 k_1,k_2 是两个不相等的实根,且

$$\frac{e^{k_1x}}{e^{k_2x}}=e^{(k_1-k_2)x}\neq\text{常数},$$

即 $y_1(x)=e^{k_1x}$与 $y_2(x)=e^{k_2x}$是线性无关的,所以

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x} \tag{1.1.10}$$

是(1.1.7)的通解.

2. $p^2-4q<0$

这时 k_1,k_2 是(1.1.8)的一对共轭的复根,设

$$k_1=\alpha+i\beta,\quad k_2=\alpha-i\beta,$$

则

$$y_1(x) = e^{k_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

与

$$y_2(x) = e^{k_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

是(1.1.7)的两个线性无关的解.但是它们都是复函数,用起来不太方便,所以我们不利用它们来构造(1.1.7)的通解,而是取它们的线性组合:

$$\hat{y}_1(x) = \frac{1}{2}(e^{k_1 x} + e^{k_2 x}) = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$\hat{y}_2(x) = \frac{1}{2i}(e^{k_1 x} - e^{k_2 x}) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

由微分方程的线性性可知,$\hat{y}_1(x)$,$\hat{y}_2(x)$也是(1.1.7)的解,而且它们是线性无关的,所以(1.1.7)的通解为

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x), \qquad (1.1.11)$$

其中 C_1,C_2 是任意常数.

3. $p^2-4q=0$

这时 $k_1=k_2$,即(1.1.8)有重根,将这个重根记作 k,则 $y_1(x)=e^{kx}$必是(1.1.7)的一个解.剩下的问题是找一个与 e^{kx}线性无关的解.为了与 e^{kx}线性无关,将另一个解表示成 $y=u(x)e^{kx}$的形式,其中 $u(x)$ 是待定的函数,但不能是常数.以 $y=u(x)e^{kx}$ 代入(1.1.7)得

$$e^{kx}[u'' + (2k+p)u' + (k^2+pk+q)u] = 0.$$

利用(1.1.8)和(1.1.9)得

$$u'' = 0.$$

取 $u(x)=x$,则得到(1.1.7)的另一个解 $y=xe^{kx}$,这时(1.1.7)的通解为

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{kx}. \qquad (1.1.12)$$

至此,对于二阶线性常系数齐次微分方程来说,其求解问题已获得彻底解决.

例 1.1.1 求 $y''-3y'+2y=0$ 的通解.

解 先写出与这个方程相对应的特征方程

$$k^2-3k+2=0.$$

它有两个相异的实根 $k_1=1,k_2=2$,故所求的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x},$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

例 1.1.2 求解下列初值问题:

$$\begin{cases} y''+2y'+4y=0, \\ y(0)=y'(0)=1. \end{cases}$$

解 先求方程的通解,其特征方程为

$$k^2+2k+4=0,$$

它的两个根为 $k_1=-1+\sqrt{3}i,k_2=-1-\sqrt{3}i$,所以方程的通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x).$$

利用初始条件确定 C_1,C_2:

$$1=y(0)=C_1,$$

$$1=y'(0)=-C_1+\sqrt{3}C_2,$$

故 $C_1=1,C_2=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$,即所求的初值问题的解为

$$y=e^{-x}\left(\cos\sqrt{3}x+\frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x\right).$$

例 1.1.3 求 $y''-4y'+4y=0$ 的通解.

解 特征方程为

$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$

它有重根 $k=2$，故所求的通解为

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x),$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

1.1.3 参数变易法

在这一段内，我们要研究二阶线性常系数非齐次方程

$$y'' + py' + qy = r(x) \tag{1.1.13}$$

的解法，其中 p,q 是常数，$r(x)$ 是某区间 I 上的已知函数，$r(x) \neq 0$.

根据前面的分析，我们只需要求出(1.1.13)的一个特解 $y_*(x)$. 如何求得这个特解呢？我们从对应的齐次方程的通解出发，通过参数变易法来获得. 设齐次方程的通解为

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{1.1.14}$$

这里的 C_1, C_2 是任意常数，$y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是齐次方程的两个线性无关的解. 所谓参数变易法就是设想非齐次方程(1.1.13)有一个形如

$$y_*(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \tag{1.1.15}$$

的解，这里 C_1, C_2 不再是常数了，而是两个待定的函数，即(1.1.14)中的两个参数已经变易为函数了. 下面的任务就是选择 $C_1(x)$ 与 $C_2(x)$ 使(1.1.15)确定的 $y_*(x)$ 是(1.1.13)的一个解. 为此，只要把(1.1.15)的 $y_*(x)$ 代入(1.1.13). 由(1.1.15)有

$$\begin{aligned} y'_*(x) &= C'_1(x) y_1(x) + C'_2(x) y_2(x) \\ &\quad + C_1(x) y'_1(x) + C_2(x) y'_2(x), \end{aligned}$$

因为只要求出一个特解，即只要确定一组函数 $C_1(x)$ 与 $C_2(x)$，所以我们就有比较大的自由度，可以对 $C_1(x)$ 与 $C_2(x)$ 加一些限制，例如选 $C_1(x), C_2(x)$ 使

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0, \tag{1.1.16}$$

这样一来，$y'_*(x)$就简单了，即

$$y'_*(x)=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x).$$

再求二阶导数得

$$y''_*(x)=C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x).$$

把y_*，y'_*，y''_*代入(1.1.13)得

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)+p(C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x))+q(C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x))=r(x).$$

再利用$y_1(x)$，$y_2(x)$都是(1.1.7)的解，故上式可简化成

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=r(x). \tag{1.1.17}$$

方程(1.1.16)与(1.1.17)是关于$C_1'(x)$与$C_2'(x)$的线性代数方程组，解这个方程组可得

$$\begin{aligned}C_1'(x)&=\begin{vmatrix}0 & y_2(x)\\ r(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix},\\ C_2'(x)&=\begin{vmatrix}y_1(x) & 0\\ y_1'(x) & r(x)\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{1.1.18}$$

再积分一次即可求出$C_1(x)$与$C_2(x)$.

这里有一点需要说明一下，即(1.1.18)右端分母中的二阶行列式会不会等于零，对于这一点已经有结论了，即当$y_1(x)$与$y_2(x)$是线性无关时，这个行列式(称为它们的**朗斯基**(**Wronsky**)**行列式**)是处处不为零的. 所以(1.1.18)右端有意义.

例 1.1.4 求$y''+y=\tan x$的通解.

解 容易求出对应的齐次方程的通解是

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

用参数变易法,就是要解方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \tan x. \end{cases}$$

由此得

$$C_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix} = -\tan x \cdot \sin x = -\frac{1}{\cos x} + \cos x,$$

$$C_2'(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix} = \sin x.$$

通过积分得

$$C_1(x) = \sin x - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

$$C_2(x) = -\cos x.$$

故所求的通解为

$$\begin{aligned} y &= \left(\sin x - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\cos x - \cos x\sin x \\ &\quad + C_1\cos x + C_2\sin x \\ &= -\cos x\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C_1\cos x + C_2\sin x, \end{aligned}$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

注 在教材中除了要遇到二阶线性常微分方程以外,还经常要遇到(特别是习题中)一阶线性常微分方程

$$y' + p(x)y = q(x).$$

它的通解也可用参数变易法获得为

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right],$$

其中 C 为任意常数.

1.1.4 欧拉(Euler)方程

在《数学物理方程与特殊函数(第四版)》中还要用到一类特殊二阶线性常微分方程

$$x^2y''+a_1xy'+a_2y=f(x), \tag{1.1.19}$$

其中 a_1,a_2 为常数. 这个方程就是二阶**欧拉方程**,它不是常系数的,但其系数很特殊,即二阶导数项的系数是 x^2,一阶导数项的系数是 a_1x,零阶导数项的系数是常数 a_2.

欧拉方程有一个特点,即通过自变量的变换后它可以化为常系数的. 事实上,令

$$x=e^t, \tag{1.1.20}$$

则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)'_x=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

代入(1.1.19)得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(a_1-1)\frac{dy}{dt}+a_2y=f(e^t). \tag{1.1.21}$$

这是一个二阶线性常系数微分方程. 假若(1.1.21)的特征方程的根是 k_1,k_2,则与(1.1.21)对应的齐次方程有两个解 $y_1=e^{k_1t},y_2=e^{k_2t}$,再通过变量代换(1.1.20)还原为 x,得(1.1.19)的齐次方程