微积分

韩玉良 于永胜 李宏艳 编著

清华大学出版社

微积分

韩玉良 于永胜 李宏艳 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是为高等院校经济、管理类专科学生编写的教材.全书分为9章,内容包括:准备知识、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、级数、多元函数的微分学、重积分.

本书可作为高等学校经济、管理类专科生的教材.

图书在版编目(CIP)数据

微积分/韩玉良,于永胜,李宏艳编著.--北京:清华大学出版社,2012.1

ISBN 978-7-302-27452-0

Ⅰ.①微… Ⅱ.①韩… ②于… ③李… Ⅲ.①微积分一高等学校一教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第249231号

责任编辑: 刘 颖

责任校对: 刘玉霞

责任印制: 李红英

出版发行: 清华大学出版社

http://www.tup.com.cn

c-service@tup.tsinghua.edu.cn

社 总 机: 010-62770175

投稿咨询: 010-62772015

地 址: 北京清华大学学研大厦A座

邮 编: 100084

邮购热线: 010-62786544

客户服务: 010-62776969

印 装 者: 北京市清华园胶印厂

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×230mm **印张:** 16 **字数:** 339千字

版 次: 2012年1月第1版 **印次:** 2012年1月第1次印刷

印 数: 1~3000

定 价: 26.00元

产品编号:044482-01

前言

为适应时代的发展，科技的进步，我国人才培养规模和策略发生了很大变化，相应的教育理念和模式也在不断地调整. 作为传统教育科目的数学受到了很大冲击，改革与探索势在必行. 目前已出版的财经类专业的微积分教材很多，但适合专科用的教材却很少，大多数专科学生使用的都是本科用的教材，这给教和学都带来不便. 为此，我们编写了这本适合财经类专科学生使用的微积分教材，这也是我们在多年的教学中探索研究的成果之一.

从教学实际出发，我们的观点是，适合的才可能成为最好的，因此在编写这部教材的过程中，我们始终注意把握财经类专科学生对数学的需求和财经类专科学生的特点. 教材中融入了教师们在教学中长期积累的经验和资料，采取结合数学知识的产生背景、几何展示、经济应用等更为直观更易为专科学生接受的方式来处理较难内容，以达到由浅入深的效果. 精选了许多财经类专业实际应用的案例并配备了相应的应用习题，强调数学建模的思想和方法，以期达到学以致用，服务专业课程的效果.

数学思想是数学的灵魂，在介绍基本概念、基本理论和基本方法时，我们淡化了理论证明，而注重还原数学知识的发现、发展和应用过程，让数学思想贯穿始终，使学生从总体上把握对数学观念、数学思维、数学语言、数学方法的宏观认识，让学生感受到数学的美妙和严谨，提高其科技文化素质. “没有留下翅膀的痕迹，我已飞过天空”，泰戈尔的这行诗句或许可以用于形容素

质教育的一种境界.

可以说,本书的出版是我们多年探索实践的结果,然而对数学教学的研究和探索永无止境,恳请广大读者提出宝贵意见.最后感谢清华大学出版社对本书的大力支持.

作　者

2011 年 10 月

目录

第 1 章 准备知识

本章为课程的学习做准备，先介绍一些在数学中广泛应用的术语和记号，然后介绍几个启发微积分基本概念的典型问题.

1.1 集合与符号

1. 集合

集合这一概念描述如下：一个集合是由确定的一些对象汇集的总体. 组成集合的这些对象被称为集合的**元素**. 通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.

x 是集合 E 的元素这件事记为 $x\in E$（读作 x 属于 E）；

y 不是集合 E 的元素这件事记为 $y\notin E$（读作 y 不属于 E）.

如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素，则称 E 是 F 的**子集合**，简称为**子集**，记为

$$E\subset F（读作 E 包含于 F），$$

或者

$$F\supset E（读作 F 包含 E）.$$

如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素，并且集合 F 的任何元素也都是集合 E 的元素（即 $E\subset F$ 并且 $F\subset E$），则称集合 E 与集合 F **相等**，记为

$$E=F.$$

为了方便起见，引入一个不含任何元素的集合——空集 $\varnothing$. 另外还约定：空集 $\varnothing$ 是任何集合 E 的子集，即 $\varnothing\subset E$.

2. 数集

全体自然数的集合，全体整数的集合，全体有理数的集合，全体实数的集合和全体复数的集合都是经常遇到的集合，约定分别用字母 $\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 来表示这些集合，即

$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ 表示全体自然数的集合；

$\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$表示全体整数的集合；

$\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle|\,q\neq0,p,q\in\mathbb{Z}\text{ 且不可约}\right\}$表示全体有理数的集合；

$\mathbb{R}=\{x\,|\,x\in\mathbb{Q}\text{ 或 }x\text{ 为无理数}\}$表示全体实数的集合；

$\mathbb{C}=\{x+\mathrm{i}y\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$表示全体复数的集合.

另外，将正整数、正有理数和正实数的集合分别记为$\mathbb{Z}^+$，$\mathbb{Q}^+$和$\mathbb{R}^+$，显然有

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

和

$$\mathbb{Z}^+\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}^+\subset\mathbb{R}^+.$$

集合可以通过罗列其元素或指出其元素应满足的条件等办法来给出. 例如

$$\{1,2,3,4,5\}$$

表示由 1,2,3,4,5 这 5 个数字组成的集合，而$\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>3\}$表示大于 3 的实数组成的集合. 又如：2 的平方根的集合可以记为 $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2=2\}$或$\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.

在本课程中经常遇到以下形式的实数集的子集.

(1) 区间

为了书写简练，将各种**区间**的符号、名称、定义列成表格，如表 1.1 所示($a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$).

表 1.1

符 号	名 称		定 义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x\,|\,a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a,b]$		半开区间	$\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$		半开区间	$\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$
$(a,+\infty)$	无限区间	开区间	$\{x\,|\,x>a\}$
$[a,+\infty)$		闭区间	$\{x\,|\,x\geqslant a\}$
$(-\infty,a)$		开区间	$\{x\,|\,x<a\}$
$(-\infty,a]$		闭区间	$\{x\,|\,x\leqslant a\}$

(2) 邻域

设 $a\in\mathbb{R}$，$\delta>0$. 数集$\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$表示为$U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta),$$

称为 a 的 δ **邻域**. 当不需要注明邻域的半径 δ 时，常把它表示为$U(a)$，简称 a 的邻域.

数集$\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$表示为$\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\},$$

也就是在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉 a，称为 a 的 δ **去心邻域**. 当不需要注明邻域半径 δ 时，常将它表示为 $\mathring{U}(a)$，简称 a 的去心邻域.

3. 逻辑符号

微积分的语言是文字叙述和数学符号共同组成的，其中有些数学符号是借用数理逻辑的符号，使用这些数理逻辑的符号能使定义、定理的表述简明、准确. 数学语言的符号化是现代数学发展的一个趋势. 本书将普遍使用这些符号.

(1) 连词符号

符号“$\Rightarrow$”表示“蕴涵”或“推得”，或“若……，则……”.

符号“$\Leftrightarrow$”表示“必要充分”，或“等价”，或“当且仅当”.

例如：设 A,B 是两个陈述句，可以是条件，也可以是命题. 则 $A\Rightarrow B$ 表示若命题 A 成立，则命题 B 成立；或命题 A 蕴涵命题 B；称 A 是 B 的充分条件，同时也称 B 是 A 的必要条件. 具体的例子如，n 是整数 $\Rightarrow n$ 是有理数. $A\Leftrightarrow B$ 表示命题 A 与命题 B 等价；或命题 A 蕴涵命题 $B(A\Rightarrow B)$，同时命题 B 也蕴涵命题 $A(B\Rightarrow A)$；或 $A(B)$ 是 $B(A)$ 的必要充分条件.

再如：$A\subset B\Leftrightarrow$ 任意 $x\in A$，有 $x\in B$.

(2) 量词符号

符号“$\forall$”表示“任意”，或“任意一个”，此符号来自于“all”首字母的大写的上下反转.

符号“$\exists$”表示“存在”，或“能找到”，此符号来自于“exist”首字母的大写的左右反转.

应用上述的数理逻辑符号表述定义、定理比较简练明确. 例如，数集 A **有上界**、**有下界**和**有界**的定义：

$$\text{数集 } A \text{ 有上界} \Leftrightarrow \exists b\in\mathbb{R},\ \forall x\in A,\text{有 } x\leqslant b.$$

$$\text{数集 } A \text{ 有下界} \Leftrightarrow \exists a\in\mathbb{R},\ \forall x\in A,\text{有 } a\leqslant x.$$

$$\text{数集 } A \text{ 有界} \Leftrightarrow \exists M>0,\ \forall x\in A,\text{有 } |x|\leqslant M.$$

设有命题“集合 A 中任意元素 a 都有性质 $P(a)$”，用符号表示为

$$\forall a\in A,\text{有 } P(a).$$

显然，这个命题的否命题是“集合 A 中存在某个元素 a_0 没有性质 $P(a_0)$”，用符号表示为

$$\exists a_0\in A,\text{没有 } P(a_0).$$

这两个命题互为否命题. 由此可见，否定一个命题，要将原命题中的“$\forall$”改为“$\exists$”，将“$\exists$”改为“$\forall$”，并将性质 P 否定. 例如，数集 A 有上界与数集 A 无上界是互为否命题，用符号表示就是：

$$\text{数集 } A \text{ 有上界} \Leftrightarrow \exists b\in\mathbb{R},\ \forall x\in A,\text{有 } x\leqslant b.$$

$$\text{数集 } A \text{ 无上界} \Leftrightarrow \forall b\in\mathbb{R},\ \exists x_0\in A,\text{有 } b<x_0.$$

4. 其他符号

(1) max 与 min

符号“max”表示“最大”(它是 maximum(最大)的缩写).

符号“min”表示“最小”(它是 minimum(最小)的缩写).

例如：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个数. 则：

$$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

表示 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的最大数；

$$\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

表示 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的最小数.

(2) $n!$ 与 $n!!$

符号“$n!$”表示“不超过 n 的所有正整数的连乘积”，读作“n 的阶乘”即

$$n!=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1,\quad 7!=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$$

符号“$n!!$”表示“不超过 n 并与 n 有相同奇偶性的正整数的连乘积”，读作“n 的双阶乘”，即

$$(2k-1)!!=(2k-1)(2k-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1,$$
$$(2k-2)!!=(2k-2)(2k-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2,$$
$$9!!=9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1,\quad 12!!=12\cdot 10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2.$$

规定：$0!=1$.

(3) 连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$

在数学中，常遇到一连串的数相加或一连串的数相乘，例如 $1+2+\cdots+n$ 或者 $m(m-1)\cdots(m-k+1)$ 等. 为简便起见，人们引入连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1x_2\cdots x_n.$$

这里的指标 i 仅仅用以表示求和或求乘积的范围，把 i 换成别的符号 j,k 等，也同样表示同一和或同一乘积，例如

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = x_1+x_2+\cdots+x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\prod_{j=1}^{n} x_j = x_1x_2\cdots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

人们通常把这样的指标称为“哑指标”.

下面举几个例子说明连加符号 $\sum$ 与连乘符号 $\prod$ 的应用.

例 1.1 阶乘 $n!$ 的定义可以写成

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j.$$

例 1.2 二项式定理可以表示为

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_n^j a^j b^{n-j} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k,$$

其中

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1.2 函数

在自然科学、工程技术和某些社会科学中,函数是被广泛应用的数学概念之一,其重要意义远远超出了数学范围.在数学中函数处于基础的核心地位.函数是微积分的研究对象.

1. 函数概念

在一个自然现象或技术过程中,常常有几个量同时变化,它们的变化并非彼此无关,而是互相联系着,这是物质世界的一个普遍规律.

例 1.3 真空中自由落体,物体下落的时间 t 与下落的距离 s 互相联系着.如果物体距地面的高度为 h,$\forall t\in\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$①,都对应一个距离 s.已知 t 与 s 之间的对应关系为

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度,是常数.

例 1.4 球的半径 r 与该球的体积 V 互相联系着:$\forall r\in[0,\infty)$都对应一个球的体积 V.已知 r 与 V 的对应关系是

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

其中 π 是圆周率,是常数.

例 1.5 某地某日时间 t 与气温 T 互相联系着(如图 1.1),对 13 时至 23 时内任意时

---

① 当 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 时,由 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 有 $s=h$,即物体下落到地面.

间 t 都对应着一个气温 T. 已知 t 与 T 的对应关系用图 1.1 中的气温曲线表示. 横坐标表示时间 t,纵坐标表示气温 T,曲线上任意点 $P(t,T)$表示在时间 t 对应着的气温 T.

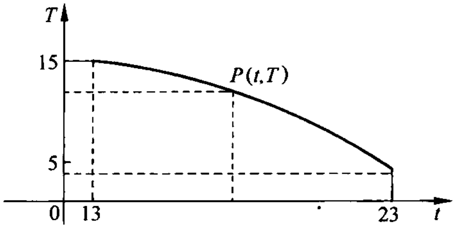

图 1.1

例 1.6 在标准大气压下,温度 T 与水的体积 V 互相联系着. 实测如表 1.2,对数集 $\{0,2,4,6,8,10,12,14\}$ 中每个温度 T 都对应一个体积 V,已知 T 与 V 的对应关系用表 1.2 来表示.

表 1.2

温度/℃	0	2	4	6	8	10	12	14
体积/cm^3	100	99.990	99.987	99.990	99.998	100.012	100.032	100.057

上述 4 个实例,分属于不同的学科,实际意义完全不同. 但是,从数学角度看,它们有一个共同的特征:都有一个数集和一个对应关系,对于数集中任意数 x,按照对应关系都对应$\mathbb{R}$ 中惟一一个数. 于是有如下的函数概念.

定义 1.1 设 A 是非空数集. 若存在对应关系 f,对 A 中任意数 $x(\forall x\in A)$,按照对应关系 f,对应惟一一个 $y\in\mathbb{R}$,则称 f 是定义在 A 上的**函数**,表示为

$$f:A\to\mathbb{R},$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的**函数值**,表示为 $y=f(x)$. x 称为**自变量**,y 称为**因变量**. 数集 A 称为函数 f 的**定义域**,函数值的集合 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ 称为函数 f 的**值域**.

根据函数定义不难看到,上述例题皆为函数的实例.

关于函数概念的几点说明:

(1) 用符号"$f:A\to\mathbb{R}$"表示 f 是定义在数集 A 上的函数,十分清楚、明确. 在本书中,为方便起见,约定将"f 是定义在数集 A 上的函数",用符号"$y=f(x),x\in A$"表示. 当不需要指明函数 f 的定义域时,又可简写为"$y=f(x)$",有时甚至笼统地说"$f(x)$是 x 的函数(值)".

(2) 根据函数定义,虽然函数都存在定义域,但常常并不明确指出函数 $y=f(x)$的定义域,这时认为函数的定义域是自明的,即定义域是使函数 $y=f(x)$有意义的实数 x 的集合 $A=\{x\mid f(x)\in\mathbb{R}\}$. 例如函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$,没有指出它的定义域,那么它的定义域就是

使函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 有意义的实数 x 的集合，即闭区间 $[-1,1]=\{x \mid \sqrt{1-x^2}\in\mathbb{R}\}$.

具有具体实际意义的函数，它的定义域要受实际意义的约束. 例如，上述例 1.4，半径为 r 的球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 这个函数，从抽象的函数来说，r 可取任意实数；从它的实际意义来说，半径 r 不能取负数，因此它的定义域是区间 $[0,\infty)$.

(3) 函数定义指出：$\forall x\in A$，按照对应关系 f，对应惟一一个 $y\in\mathbb{R}$，这样的对应就是所谓的单值对应. 反之，一个 $y\in f(A)$ 就不一定只有一个 $x\in A$，使 $y=f(x)$. 例如函数 $y=\sin x$. $\forall x\in\mathbb{R}$，对应惟一一个 $y=\sin x\in\mathbb{R}$，反之，对 $y=1$，有无限多个 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\in\mathbb{R}$，$k\in\mathbb{Z}$，按照对应关系 $y=\sin x$，x 都对应 1，即

$$\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

(4) 在函数 $y=f(x)$ 的定义中，要求对应于 x 值的 y 值是惟一确定的，这种函数也称为**单值函数**. 如果取消惟一这个要求，即对应于 x 值，可以有两个以上确定的 y 值与之对应，那么函数 $y=f(x)$ 称为**多值函数**. 例如函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 是多(双)值函数.

为了便于讨论，总设法避免函数的多值性. 在一定条件下，多值函数可以分裂为若干**单值支**. 例如，双值函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 就可以分成两个单值支：一支是不小于零的 $y=+\sqrt{r^2-x^2}$，另一支是不大于零的 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$. 已知方程 $x^2+y^2=r^2$ 的图形是中心在原点、半径为 r 的圆周，这同时也就是双值函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 的图形. 两个单值支就相当于把整个圆周分为上下两个半圆周. 所以只要把各个分支弄清楚，由各个分支合起来的多值函数也就了如指掌. 今后如果没有特别声明，所讨论的都限于单值函数.

再看几个函数的例子.

例 1.7 $\forall x\in\mathbb{R}$，对应的 y 是不超过 x 的最大整数. 显然，$\forall x\in\mathbb{R}$，都对应惟一一个 y. 这是一个函数(如图 1.2)，表示为 $y=[x]$，即 $[2.5]=2$，$[3]=3$，$[0]=0$，$[-\pi]=-4$.

例 1.8 有一些函数具有“分段”的表达式，例如，图 1.3～图 1.5 所示的函数.

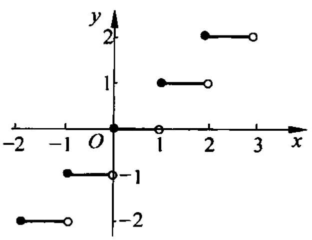

图 1.2

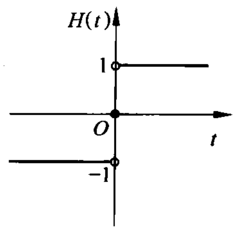

图 1.3

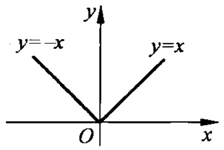

图 1.4

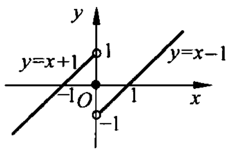

图 1.5

(1) 符号函数 $H(t)=\begin{cases}-1, & t<0,\\ 0, & t=0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$

(2) $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0;\end{cases}$ (3) $y=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0.\end{cases}$

2. 几类具有特殊性质的函数

(1) 有界函数

定义 1.2 设函数 $f(x)$在数集 A 有定义,若函数值的集合

$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$$

有界,即 $\exists M>0$, $\forall x\in A$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 A **有界**,否则称 $f(x)$在 A **无界.**

例如,函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,因为对 $\forall x\in\mathbb{R}$,都有 $|\sin x|\leqslant 1$. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,2)$上是无界的,在$[1,\infty)$ 上是有界的.

(2) 单调函数

定义 1.3 设函数 $f(x)$在数集 A 有定义,若 $\forall x_1,x_2\in A$ 且 $x_1<x_2$,有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$在 A **严格单调增加(严格单调减少)**. 上述不等式改为

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$在 A **单调增加(单调减少)**.

例如,函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是严格单调增加的. 函数 $y=2x^2+1$ 在$(-\infty,0)$内是严格单调减少的,在$[0,+\infty)$内是严格单调增加的. 因此,在$(-\infty,+\infty)$内,$y=2x^2+1$ 不是单调函数.

(3) 奇函数与偶函数

定义 1.4 设函数 $f(x)$定义在数集 A,若 $\forall x\in A$,有 $-x\in A$,且

$$f(-x)=-f(x)\quad (f(-x)=f(x)),$$

则称函数 $f(x)$是**奇函数**(**偶函数**).

如果点(x_0,y_0)在奇函数 $y=f(x)$的图像上,即 $y_0=f(x_0)$,则

$$f(-x_0)=-f(x_0)=-y_0,$$

即$(-x_0,-y_0)$也在奇函数 $y=f(x)$的图像上,于是奇函数的图像关于原点对称.

同理可知,偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如,函数 $y=x^4-2x^2$,$y=\sqrt{1-x^2}$,$y=\dfrac{\sin x}{x}$ 等均为偶函数;函数 $y=\dfrac{1}{x}$,$y=x^3$,$y=x^2\sin x$等均为奇函数.

(4) 周期函数

定义 1.5 设函数 $f(x)$定义在数集 A,若$\exists l>0$,$\forall x\in A$,有 $x\pm l\in A$,且

$$f(x\pm l)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$是**周期函数**,l 称为函数 $f(x)$的一个**周期**.

若 l 是函数 $f(x)$的周期,则 $2l$ 也是它的周期.不难用归纳法证明,若 l 是函数 $f(x)$的周期,则 $nl(n\in\mathbb{Z}^+)$也是它的周期.若函数 $f(x)$有最小的正周期,通常将这个最小正周期称为函数 $f(x)$的**基本周期**,简称为**周期**.

例如,$y=\sin x$ 就是周期函数,周期为 2π.再如,常函数 $y=1$ 也是周期函数,任意正的实数都是它的周期.

3. 复合函数与反函数

(1) 复合函数

由两个或两个以上的函数用所谓"中间变量"传递的方法能产生新的函数.例如函数

$$z=\ln y \quad 与 \quad y=x-1,$$

由"中间变量" y 的传递生成新函数

$$z=\ln(x-1).$$

在这里,z 是 y 的函数,y 又是 x 的函数,于是通过中间变量 y 的传递得到 z 是 x 的函数.为了使函数 $z=\ln y$ 有意义,必须要求 $y>0$,为使 $y=x-1>0$,必须要求 $x>1$.于是对函数 $z=\ln(x-1)$来说,必须要求 $x>1$.

定义 1.6 设函数 $z=f(y)$定义在数集 B 上,函数 $y=\varphi(x)$定义在数集 A 上,G 是 A 中使 $y=\varphi(x)\in B$ 的 x 的非空子集,即

$$G=\{x\mid x\in A,\ \varphi(x)x\in B\}\neq\varnothing,$$

$\forall x\in G$,按照对应关系 φ,对应惟一一个 $y\in B$,再按照对应关系 f,对应惟一一个 z,即 $\forall x\in G$ 对应惟一一个 z,于是在 G 上定义了一个函数,表示为 $f\circ\varphi$,称为函数 $y=\varphi(x)$与 $z=f(y)$的**复合函数**,即

$$(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)],\quad x\in G,$$