高等学校网络教育规划教材

经济数学基础（上）

JINGJISHUXUE JICHU

微 积 分

主编 陆 全 副主编 孙 浩

西北工業大學出版社

高等学校网络教育规划

经济数学基础(上)

微积分

主　编　陆　全
副主编　孙　浩
编　者　陆　全　郑红婵　郭千桥

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书分上、下册。上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学。下册内容包括行列式、矩阵、线性方程组、随机事件与概率、随机变量及其数字特征、统计推断、方差分析与回归分析。

本书既可作为高等学校网络教育的教材使用,也可供其他院校相关专业作为教材选用。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础/陆全主编. —西安:西北工业大学出版社,2009.12

ISBN 978-7-5612-2707-7

Ⅰ.经… Ⅱ.陆… Ⅲ.经济数学—高等学校—教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 223987 号

出版发行: 西北工业大学出版社
通信地址: 西安市友谊西路 127 号 邮编 710072
电　　话: (029)88493844 88491757
网　　址: www.nwpup.com
印 刷 者: 陕西丰源印务有限公司
开　　本: 727 mm×960 mm 1/16
印　　张: 31.5
字　　数: 530 千字
版　　次: 2009 年 12 月第 1 版 2009 年 12 月第 1 次印刷
定　　价: 50.00 元(套)

前　言

随着我国经济建设的不断发展，数学方法在经济领域中得到越来越广泛的应用，经济数学基础成为高等学校经济管理类专业重要的数学基础课程。本书是为适应社会发展对于高等经济与管理人才的要求及经管类教学改革的需要，按照教学大纲的基本要求，集编者多年教学经验并参考了大量国内外资料编写而成的。

本书主要面向接受网络教育的学生使用。与在校大学生相比，他们的学习条件更艰苦，学习时间更紧张，学习环境更困难，但他们追求真理的求知欲望和在校大学生是完全一样的。怎样使本书更能适应网络教育大学生的实际水平，方便他们的学习，基于这些思考，编者做了许多创造性的工作，使本书具有下述特点：①简明化。从节约学生学习时间考虑，教材力求简明扼要，注重对基本理论和主要观点的介绍，对一些人人皆知的知识性问题一般不做过多阐述，尽量避免冗言赘语。②条理化。注重经管类学生的特点，在保证数学概念的准确性和基本理论的系统性的基础上，对传统教学内容进行了必要的调整，尽可能从自然科学及经济分析的实例出发，借助几何直观引入数学概念，深入浅出，循序渐进；淡化运算技巧，并适当降低了部分内容的理论要求，如一元函数极限、线性方程组解的存在性、随机变量函数的分布等内容，力求使教材内容精练，条理清晰，表述流畅，易教易学，以必需、够用为度，以实用为原则。③实用化。注重对学生应用意识与能力的培养，特别是经济学方面应用能力的培养，选用了几何、物理、经济学等多方面的应用实例，有益于学生学以致用，也对提高学习兴趣，拓宽视野有帮助，体现以应用为目的。④兼顾多种需求。注重兼顾各层次学生的需要，强调对经济数学基本概念、基本方法的掌握，例题、习题的选择紧扣知识点，难易适度，题型多样。每节配有同步习题，按章配有特点鲜明的总习题，其中包含足量的是非题、选择题、填空题，便于教与学。⑤配有习题集。便于学生巩固知识点、复习、考试使用。

本书由西北工业大学网络教育学院组织策划，西北工业大学陆全教授任主编，孙浩副教授任副主编。各章分工为：第 1～4 章由陆全编写，第 5，6 章由

郑红婵编写,第 7 章由郭千桥编写,第 8～10 章由吕全义编写,第 11～14 章由孙浩编写,全书由陆全、孙浩统纂定稿。

由于编者水平所限,书中疏漏和不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

编　者

2009 年 8 月

目　录

（上册）

第 1 章　函　　数

函数是对现实世界中各种变量之间的相互依存关系的一种抽象，它是微积分学研究的基本对象. 本章将讨论函数的概念及其基本性质.

一、教学内容

集合的概念，实数及其绝对值，区间与邻域. 函数的概念及性质，复合函数与反函数，基本初等函数与初等函数，常用的经济函数.

二、重要概念、结论与公式

1. 集合、邻域

(1) 集合 $A=\{x \mid x$ 具有的性质$\}$.

(2) 邻域 $U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$.

(3) 去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$.

2. 函数

(1) 有界函数 $f(x):x\in X\subset D$，存在 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$.

(2) 单调增加(减少) 函数 $f(x):x\in I\subset D$，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$.

(3) 奇(偶) 函数 $f(x):x\in[-a,a]$，$f(-x)=-f(x)$ $(f(-x)=f(x))$.

(4) 周期函数 $f(x):x\in(-\infty,+\infty)$，存在 $T>0$，使 $f(x+T)=f(x)$.

1.1　集　　合

一、集合的概念

集合是现代数学中最基本的概念之一. 我们称具有某种特定性质的事物的全体为集合，构成集合的事物称为集合的元素. 例如，某学校的全体学生，全

体偶数，直线 $x+y-1=0$ 上所有的点等，都各自构成一个集合.

通常，我们用大写字母 A,B,C 等表示集合，用小写字母 a,b,c 等表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 中的元素，那么记做 $a \in A$，读做 a 属于 A；如果 a 不是集合 A 的元素，那么记做 $a \notin A$，读做 a 不属于 A.

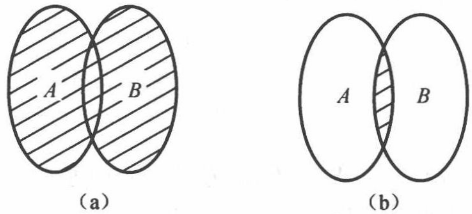
表示集合的方法主要有两种：一是列举法，二是描述法. 列举法就是把集合中的所有元素一一列举出来，写在一个花括号内. 例如，集合 A 由元素 a_1，a_2，…，a_n 组成，则可以表示为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. 而描述法则是指明集合中元素所具有的某种性质，将具有性质 P 的对象 x 所构成的集合表示为

$$A=\{x \mid x\text{ 具有性质 }P\}$$

例如，方程 $x^2+x-2=0$ 的解集可表示为 $A=\{x \mid x^2+x-2=0\}$. 又如 xOy 平面内圆周 $x^2+y^2=1$ 上点的集合可表示为 $B=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$.

设 A,B 是两个集合. 若 A 中的每个元素是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记做 $A \subset B$(或 $B \supset A$)，读做 A 包含于 B(或 B 包含 A). 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等，记做 $A=B$. 关于集合的并与交，有如下定义：

定义 1　设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 和 B 的并，记为 $A \cup B$(见图 1.1(a))，即 $A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.



(a)　　(b)

图　1.1

由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合，称为 A 和 B 的交，记为 $A \cap B$(见图 1.1(b))，即 $A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

含有有限个元素的集合称为有限集；含有无穷多元素的集合称为无限集；不含任何元素的集合称为空集，记做 $\varnothing$. 一般，用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集. 易知 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$，$\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

二、实数与实数的绝对值

大家知道，实数由有理数与无理数两部分组成. 有理数包括正、负整数，

正、负分数及零. 有理数可以表示为$\dfrac{p}{q}$的形式(其中 p,q 为整数,且 $q\neq 0$),也可表示为整数、有限小数或无限循环小数;而无理数为无限不循环小数. 全体实数与数轴上的全体点形成一一对应的关系. 以后,若不特别指出,我们所研究的数都是实数.

在研究有关问题时,我们常用到实数的绝对值的概念. 下面介绍实数绝对值的定义及性质.

定义 2　设 a 为实数,定义 a 的绝对值(记为 $|a|$)为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases}$$

由定义 2 可知,两个实数 a,b 之差的绝对值

$$|a-b|=\begin{cases}a-b, & a\geqslant b\\ b-a, & a<b\end{cases}$$

绝对值的几何意义是: $|a|$ 表示点 a 与原点之间的距离; $|a-b|$ 表示点 a 与点 b 之间的距离.

绝对值有下列基本性质:

(1) $|a|\geqslant 0$; $|a|=|-a|$; $|a|=\sqrt{a^2}$.

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

(3) $\{a\mid |a|<K\}=\{a\mid -K<a<K\}$.

从几何角度看, $|a|<K$ 表示与原点的距离小于 K 的所有点的集合,而 $-K<a<K$ 表示在 $-K$ 与 K 之间的点的集合,它们表示相同的集合.

(4) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$.

由性质(2) 有

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,\quad -|b|\leqslant b\leqslant |b|$$

两边相加得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|$$

由性质(3) 有

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|$$

(5) $|a-b|\geqslant ||a|-|b||$.

由性质(4) 有

$$|a|=|(a-b)+b|\leqslant |a-b|+|b|$$

即

$$|a-b|\geqslant |a|-|b|$$

同理有

$$|a-b| \geqslant |b|-|a| = -(|a|-|b|)$$

于是

$$|a-b| \geqslant ||a|-|b||$$

(6) $|ab|=|a||b|$, $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\ (b\neq 0)$.

三、区间与邻域

在实数构成的集合中,我们常遇到的是区间. 所谓区间,是指数轴上介于某两点之间的所有实数构成的集合. 这两个点称为区间的端点. 设 a,b 为实数,且 $a<b$,区间分为两类:

(1) 有限区间:

开区间 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$.

闭区间 $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$.

半开区间 $(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$, $[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$.

(2) 无穷区间:

$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$$

$$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$$

$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$$

$$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\}$$

$$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$$

在相关问题的讨论中,有时须要考虑某点 x_0 附近的所有点构成的集合,为此,我们引入邻域的概念.

定义3 设 δ 为某正数,称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域,记为 $U(x_0,\delta)$. 其中,x_0 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径,即有(见图 1.2(a))

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$$

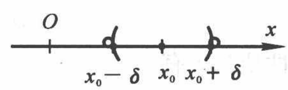
点 x_0 的邻域去掉中心 x_0 后的集合

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$$

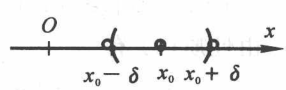
称为点 x_0 的去心邻域,记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$. 即有(见图 1.2(b))

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

称开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 为点 x_0 的左邻域,$(x_0,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的右邻域.



(a)



(b)

图 1.2

例如，$0<|x-2|<1$ 表示以点 $x_0=2$ 为中心，以1为半径的空心邻域 $(1,2)\cup(2,3)$.

习 题 1.1

1. 用列举法表示下列集合.

(1) 方程 $x^2-3x+2=0$ 的根的集合；

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 的交点的集合.

2. 用描述法表示下列集合.

(1) 点 3 的去心 2 邻域；

(2) 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上所有点组成的集合；

(3) x 轴以上的一切点的集合.

3. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,6\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

4. 设 $A=\{x\mid 1<x<3\}$，$B=\{x\mid x<2\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

5. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合.

(1) $|x|<1$；

(2) $|x-2|\leqslant 2$；

(3) $|x-a|<\varepsilon$ (a 为常数，$\varepsilon>0$)；

(4) $|x|\geqslant 2$.

1.2 函 数

一、函数的概念

在观察自然现象的过程中，往往会涉及一些量. 其中有的量始终取固定的数值，这种量叫做常量；还有的量会在过程中变化着，可以取不同的数值，这种量叫做变量. 一般，用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,z 等表示变量. 然而，变量不是孤立存在的，而是相互依赖并遵循着一定的变化规律. 这里我们仅就两个变量之间的关系举两个例子.

例 1 设圆的面积为 S，半径为 r，则这两个变量之间有下列关系：

$$S=\pi r^2$$

当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任取一值时，由上式可以确定一个圆的面积值 S

与其对应.

例 2 研究某商店一天内销售某商品的数量 x 与时间 t 的关系时，实际记录一天中的销售情况如表 1.1 所示.

表 1.1

t	10	12	14	16	18	20	22
x	10	30	55	75	95	130	165

表 1.1 中列出了销售量 x 与时间 t 的对应关系.

以上两例虽然实际意义不同，但本质上都表达了两个变量之间的依赖关系，即确定了一种对应规则. 当其中一个变量在其变化范围内每取定一值时，另一个变量就按这种对应规则确定一值与其对应，两个变量的这种对应关系就是函数的本质.

定义 1 设 x 和 y 为两个变量，D 为非空实数集合，f 为一个对应规则，使每一个 $x \in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记做 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数的定义域，可记为 D_f.

在函数定义中，对每个取定的 $x_0 \in D$，按照对应规则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记做 $f(x_0)$，或 $y\Big|_{x=x_0}=f(x_0)$. 当 x 取遍 D 的一切值时，对应的函数值构成的集合称为函数的值域，记做 Z_f，即

$$Z_f=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$$

例如，例 1 中的 $D_f=(0,+\infty)$，$Z_f=(0,+\infty)$；例 2 中的 $D_f=\{10,12,14,16,18,20,22\}$，$Z_f=\{10,30,55,75,95,130,165\}$. 而公式 $S=\pi r^2$ 和表 1.1 则分别表示例 1 和例 2 中两个函数的对应规则 f.

函数的定义域 D 是使函数关系式有意义的自变量的取值范围，常用不等式、区间或集合来表示. 而在实际问题中，函数的定义域由问题的实际意义确定.

由函数定义可知，函数是由定义域和对应规则两个要素所确定的，两个要素都相同的函数是同一函数. 而值域是由以上二要素派生得到的.

例 3 确定下列函数的定义域 D.

(1) $y=\sqrt{4-x}$；

(2) $y=\ln(x-2)$；

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

解 (1) $D=\{x \mid x \leqslant 4\}=(-\infty,4]$；

(2) $D=\{x \mid x>2\}=(2,+\infty)$；

(3) 定义域满足 $x^2-3x+2>0$，即 $(x-1)(x-2)>0$，故定义域 $D=(-\infty,1) \cup (2,+\infty)$.

例 4 下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=x-1, g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$；

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$.

解 (1) 不相同. 因为 $f(x)$ 的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域 $D_g=(-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$，$D_f \neq D_g$.

(2) 不相同. 因为虽然定义域 $D_f=D_g=(-\infty,+\infty)$，但 $g(x)=|x|$，两函数对应规则不同.

函数的表示方法主要有三种：图示法、表格法和公式法（解析法）. 图示法可使抽象问题直观化，表格法（如函数用表、统计报表）便于求函数值，公式法便于运算和分析，微积分主要讨论用公式法表示的函数.

所谓函数 $y=f(x)$ 的图形，是指平面直角坐标系 xOy 中点的集合

$$\{(x,y) \mid y=f(x), x \in D_f\}$$

一个函数的图形通常是平面内的一条曲线.

下面给出几个常用的函数.

例 5 绝对值函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases} -x, & x<0 \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，它的图形如图 1.3 所示.

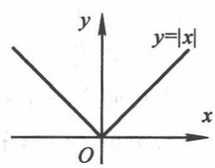


图 1.3

例 6 符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$，图形如图 1.4 所示.

例 7 取整函数 $y=[x]$ 表示“变量 y 是不超过 x 的最大整数”.

函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$，对应规则是 y 取不超过 x 的最大整数. 例如，$\left[-\dfrac{3}{2}\right]=-2$，$\left[\dfrac{1}{2}\right]=0$，$[\sqrt{10}]=3$，它的图形为阶梯形，如图 1.5 所示.

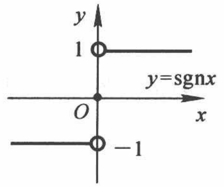


图 1.4

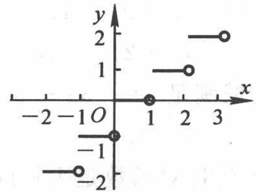


图 1.5

例 5 ～ 例 7 中的函数具有如下特征：在自变量的不同取值范围内，其对应规则由不同的解析式表示，通常称这样的函数为分段函数. 它是自然科学、工程技术和经济管理中常用的函数形式.

二、函数的几种特征

研究一个函数，结合几何图形，我们常关注其单调性、有界性、奇偶性和周期性这几种重要特征.

1. 单调性

定义 2 设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义，对于任意的 $x_1, x_2 \in D$，有 $x_1 < x_2$：

(1) 若 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加；

(2) 若 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调减少.

函数单调增加或单调减少统称函数是单调的.

从几何直观上看，单调增加函数的图形是 D 上随 x 的增加而上升的曲线，如图 1.6(a) 所示；单调减少函数的图形是 D 上随 x 的增加而下降的曲线，如图 1.6(b) 所示.

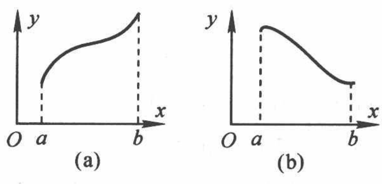


图 1.6

例如,函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的,在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的,但在定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数.

2. 有界性

定义 3　设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义,若存在一个正数 M,使得对一切 $x\in D$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 D 上有界,否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

例如,函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,因为对于一切 $x\in(-\infty,+\infty)$,总有 $|\sin x|\leqslant 1$. 又如函数 $y=e^x$ 在区间 $(-\infty,0]$ 内有界,总有 $|e^x|\leqslant 1$,但在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

3. 奇偶性

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称:

(1) 如果对于任意的 $x\in D$,总有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;

(2) 如果对于任意的 $x\in D$,总有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称(见图 1.7(a)),奇函数的图形关于原点对称(见图 1.7(b)).

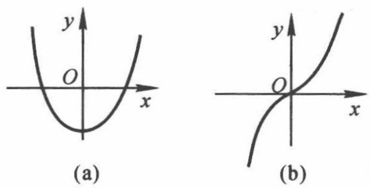


图　1.7

例 8　判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^2+1$;

(2) $f(x)=x^2\sin x$;

(3) $f(x)=x+\cos x$.

解　(1) 因为 $f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$,所以 $f(x)=x^2+1$ 为偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=(-x)^2\sin(-x)=-x^2\sin x=-f(x)$,所以 $f(x)=x^2\sin x$ 是奇函数.

(3) 因为 $f(-x)=(-x)+\cos(-x)=-x+\cos x\neq f(x)$,且 $f(-x)\neq -f(x)$,所以 $f(x)=x+\cos x$ 既非偶函数,也非奇函数.