高等学校教材

高等数学

河北师范大学数学与信息科学学院 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高 等 数 学

Gaodeng Shuxue

河北师范大学数学与信息科学学院　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书是为了适应当前高等教育改革的新形势，按照师范院校和非数学类理工科专业教学要求和教学特点编写而成。内容包括空间解析几何与向量代数、函数、极限与连续，函数的导数与微分，微分中值定理及其应用，积分学，曲线与曲面积分，无穷级数，常微分方程。各章节后附有适量习题，书后附有部分习题参考答案。作为附录，书后还加入了数学软件MATLAB简介和应用举例。

本书可作为师范院校和一般综合性大学非数学类理工科专业本科生的“高等数学”课程教材，还可供从事高等数学教学的教师和科研工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/河北师范大学数学与信息科学学院编．—北京：高等教育出版社，2012.6

ISBN 978-7-04-034854-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①河… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第090742号

策划编辑 贾翠萍　责任编辑 贾翠萍　封面设计 王 雎　版式设计 马敬茹
插图绘制 尹文军　责任校对 金 辉　责任印制 胡晓旭

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京印刷一厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	27	版　　次	2012年6月第1版
字　　数	490千字	印　　次	2012年6月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	39.10元

物 料 号　34854-00

前　言

高等数学是非数学类理工科专业重要的基础课程，对培养学生的逻辑思维能力、计算与应用能力和分析判断能力有着极为重要的作用。随着科学技术的飞速发展和社会的进步，各个学科领域的知识相互交叉渗透，其中数学作为重要的工具显示着巨大的威力，起到不可或缺的作用。

为了适应当前高等教育改革的新形势，我们按照非数学类理工科专业的教学要求和教学特点，并结合编者的教学实践经验编写了这部教材。本书具有如下特点：

1. 注重基础，兼顾深入。与高等教育步入“大众化阶段”的形势相适应，本书的编写注重基本概念、基本理论和基本技巧的介绍，同时为了满足程度较高的学生的学习要求，在每章的总习题中加入了一些技巧性较强的习题。

2. 内容编排整体优化。按照学科发展和学生思维发展规律，将一元函数与多元函数统一安排，保持了知识的系统性和完整性。

3. 加强应用，扩大知识面。在例题和习题的配置上，增加了应用题的比重，体现了高等数学应用的广泛性。

4. 渗透数学史的知识。在每一章的最后，增加了数学史的内容，并设计为“读一读”版块，帮助学生简要了解本章所涉及内容的历史背景、发展历程以及著名数学家的贡献。

全书内容包括空间解析几何与向量代数，函数、极限与连续，函数的导数与微分，微分中值定理及其应用，积分学，曲线与曲面积分，无穷级数，常微分方程。参加本书编写工作的有丁雁鸿、高印芝、郭志芬、谷丽彦、郝国辉、纪奎、李巧銮、梁志和、刘彩坤、刘淑娟、刘献军、田义、徐芳、闫雪芳、杨戈、张金莲、赵振虎、周丽娜。马凯、韩力文、田海燕编写了附录中 MATLAB 概要部分，曹鹏浩为本书绘制了插图。全书的统稿和审校工作由王彦英、朱玉峻和刘丽霞完成。

由于编者水平与经验所限，本教材一定存在许多不足之处，恳请各位专家、读者提出宝贵意见。

编　者

二〇一二年二月

目　　录

第 1 章 空间解析几何与向量代数

解析几何的基本思想是用代数的方法来研究几何问题，基本方法是坐标法. 空间解析几何知识是学习多元函数微积分的基础. 本章首先介绍向量及其运算，其次引进空间直角坐标系，然后介绍曲面的方程，并以向量为工具介绍空间直线、平面与二次曲面的相关知识.

1.1 向量及其线性运算

1.1.1 向量的概念

在工程技术和日常生活中经常遇到的量一般分为两类：一类是只有大小的量，如长度、面积、质量等，这一类量称为数量；另一类是既有大小又有方向的量，如力、速度等，这一类量称为向量.

定义 1 既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**).

在数学上，常用有向线段表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为始点、B 为终点的有向线段所表示的向量，记作 $\overrightarrow{AB}$，如图 1－1. 向量也可以用一个**黑体的**小写字母(书写时，在字母上面加箭头)来表示，如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 或 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 等.

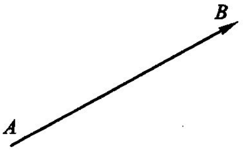

图 1－1

向量的大小称为向量的**模**，也称为向量的**长度**. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模记作 $|\overrightarrow{AB}|$.

模为 1 的向量称为**单位向量**. 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 具有相同方向的单位向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记作 $\boldsymbol{a}^0$.

模为 0 的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$. 零向量的方向不确定，可以认为它的方

向是任意的.

在数学上研究的向量是指可在空间作自由平行移动的向量,它的起点可以是空间中的任意一点,这种向量称为**自由向量**.

定义 2 如果两个向量的模相等且方向相同,那么叫做**相等向量**.所有的零向量都相等,向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 相等,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

定义 3 平行于同一直线的一组向量叫做**共线向量**(或**平行向量**).

定义 4 平行于同一平面的一组向量叫做**共面向量**.

1.1.2 向量的加减法

定义 5 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,以空间任意一点 O 为始点依次作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$ 得一折线 OAB,从折线的端点 O 到另一端点 B 的向量 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{c}$ 叫做**两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和**,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.这种求两向量的和的方法叫做**三角形法则**,如图 1-2.

根据图 1-3 和定义 2 可得

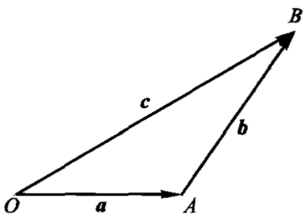

图 1-2

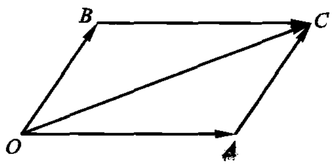

图 1-3

定理 1 如果以两个向量 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 为邻边作一个平行四边形 $OACB$,那么对角线向量 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

这种求两向量的和的方法叫做**平行四边形法则**.

定理 2 向量的加法满足下面的运算规律:

(1) **交换律**:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) **结合律**:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

定义 6 若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$,则称 $\boldsymbol{c}$ 为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差**,并记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

如果把 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起,那么,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 就是由 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量,如图 1-4.

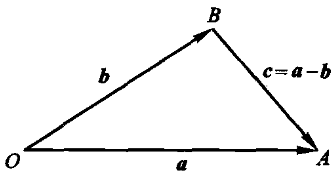

图 1-4

这样对于每一个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{0}-\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等、方向相反的向量,称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的逆向量**,记作

$-\boldsymbol{a}$. 这样 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

由三角形两边之和大于第三边的性质,可得下列不等式:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad 及 \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

1.1.3 数量与向量的乘法

定义 7 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积(简称为**数乘**)是一个向量,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,其模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量,方向不定.

由数与向量乘积的定义知,向量 $\boldsymbol{a}$ 与它的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$ 有以下关系:

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \quad 或 \quad \boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

向量与数的乘法满足以下运算规律:

(1) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}, (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(3) 第一分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(4) 第二分配律:$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加法、减法以及实数与向量的乘法称为**向量的线性运算**.

例 1 化简 $(x-y)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(x+y)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

解
$$\begin{aligned}&(x-y)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(x+y)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\=&(x-y)\boldsymbol{a}+(x-y)\boldsymbol{b}-(x+y)\boldsymbol{a}+(x+y)\boldsymbol{b}\\=&-2y\boldsymbol{a}+2x\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

例 2 证明两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是存在实数 λ 使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

证明 如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线,则取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$,得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,其中 λ 的正负取决于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是同向还是反向. 反之,如果 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,由数乘的定义知,$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线.

例 3 如图 1-5, 设 AM 是 $\triangle ABC$ 的中线,求证 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

证明 因为 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$,

所以 $2\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM})$.

但 $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MB}=\boldsymbol{0}$,

因而 $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,

即 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

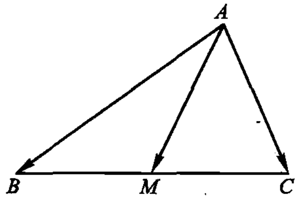

图 1-5

习 题 1.1

1. 要使下列各式成立，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 应满足什么条件？

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$； (2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$； (4) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

(5) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$.

2. 如图 1 - 6， 设 $ABCD-EFGH$ 是一个平行六面体，在下列各对向量中，找出相等的向量和互为逆向量的向量：(1) $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$；(2) $\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CG}$；(3) $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{EG}$；(4) $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{GF}$；(5) $\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CH}$.

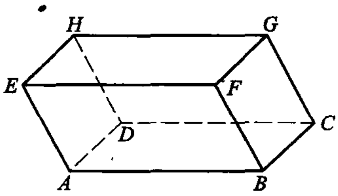

图 1 - 6

3. 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点.

4. 已知四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c},\overrightarrow{CD}=5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}-8\boldsymbol{c}$，对角线 AC,BD 的中点分别为 E,F，求 $\overrightarrow{EF}$.

1.2 空间直角坐标系

代数运算的基本对象是数，几何图形的基本元素是点. 能把空间中的点和一组有序实数一一对应起来的最好工具是坐标系，通过坐标系，我们可以利用代数方法解决几何问题.

1.2.1 点、向量的直角坐标

1. 空间直角坐标系

过空间一点 O，作三条两两互相垂直的数轴 Ox,Oy 与 Oz，它们都以 O 为**坐标原点**，且有相同的长度单位，数轴 Ox,Oy,Oz 分别叫做 **x 轴**，**y 轴**，**z 轴**，统称**坐标轴**. 一般情况下，我们还规定 x 轴，y 轴，z 轴顺序构成**右手系**(图 1 - 7)，即如果右手拇指指向 x 轴的正向，食指指向 y 轴的正向，则中指指向 z 轴的正向. 这样就建立了一个**空间直角坐标系**. 称 O 为坐标系的原点，设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别是与 x 轴，y 轴，z 轴正向同向的单位向量，称为**基本单位向量**. 由于空间直角坐标系完全由 $O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 决定，因此，空间直角坐标系也可用 $\{O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 来表示.

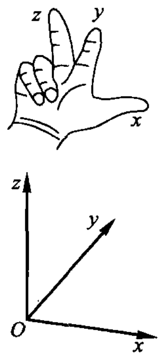

图 1 - 7

在空间直角坐标系中，三个坐标轴两两决定互相垂直的三个平面 xOy，yOz，xOz，称为**坐标平面**. 这三个坐标平面把空间分成八个部分，称为**卦限**（图 1-8）. 在 xOy 平面上方，对应该平面的四个象限的部分分别称为第Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限；在 xOy 平面下方，对应该平面的四个象限的部分分别称为第Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限.

2. 点的直角坐标表示

建立了空间直角坐标系，空间中的点就可以和有序数组建立对应关系，点可以用其直角坐标表示.

设 M 是空间中任意一点，过点 M 分别作与 x 轴，y 轴，z 轴垂直的平面，这三个平面与三条坐标轴的交点分别为 P,Q,R，在坐标轴上的坐标分别为 x,y,z，于是点 M 就惟一地确定了一组有序实数 x,y,z，如图 1-9.

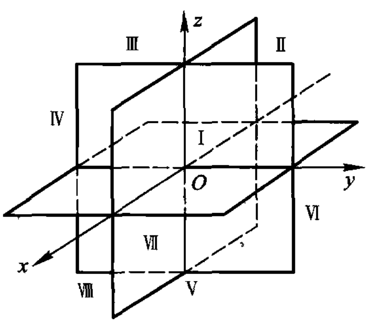

图 1-8

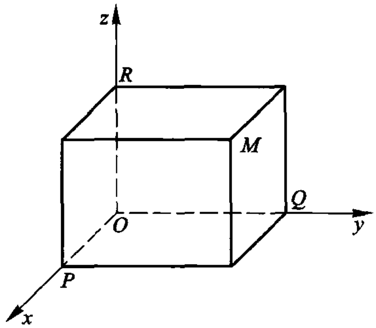

图 1-9

反过来，任意给定一组有序实数 x,y,z，可分别在 x 轴，y 轴，z 轴上取坐标是 x,y,z 的三个点 P,Q,R，过这三点分别作与 x 轴，y 轴，z 轴垂直的平面，三个平面交于空间惟一的一点 M. 可见一组有序实数 x,y,z 惟一确定了空间一个点 M，这样通过空间直角坐标系，就建立了空间的点 M 和有序实数组 x,y,z 的一一对应关系，称 x,y,z 为点 M 的**坐标**，记作 $M(x,y,z)$.

3. 向径及其直角坐标表示

定义 1　在空间直角坐标系下，起点是坐标原点 O，终点是任意一点 M 的向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为**点 M 的向径**.

如图 1-9，设 $M(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，由向量的加法法则知，$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，其中 x,y,z 称为**向径 $\overrightarrow{OM}$ 在直角坐标系下的坐标**，记为 $\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$.

4. 向量的直角坐标表示

在空间直角坐标系中，设向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为

$M_2(x_2,y_2,z_2)$，则向径$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，由向量的减法法则知，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

其中 x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1 称为**向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标**，$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$称为**向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表达式**. 于是得到

定理1 向量的坐标等于其终点坐标减去其起点坐标.

1.2.2 用坐标作向量的运算

有了向量的坐标表示，向量进行加减法、数乘运算，只需对其坐标进行相应的数量运算即可.

定理2 设向量 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则有

(1) **两向量的和的坐标等于两向量对应坐标的和，即**

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\};$$

(2) **数乘向量的坐标等于这个数与向量的对应坐标的积，即** $\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}$；

(3) **两向量相等的充要条件是对应坐标相等，即** $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1=x_2,y_1=y_2,z_1=z_2$；

(4) **两非零向量共线的充要条件是对应坐标成比例，即**

$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

约定：当分母为零时，分子也为零.

证明 下面给出(1)和(4)的证明.

(1) 设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，由向量的加法法则知，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=\{x_1,y_1,z_1\}+\{x_2,y_2,z_2\}\\&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k}\\&=\{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\}.\end{aligned}$$

(4) 由上节例2知，两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是存在实数 λ 使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，即$\{x_1,y_1,z_1\}=\lambda\{x_2,y_2,z_2\}$，所以 $x_1=\lambda x_2,y_1=\lambda y_2,z_1=\lambda z_2$，即 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.

定义2 对于有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}(P_1\neq P_2)$，如果点 P 满足$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则称点