实用管理数学

SHIYONGGUANLISHUXUE

主编　刘玉忠　王长玉

中国统计出版社

实用管理数学

SHIYONGGUANLISHUXUE

实用管理数学

主编 刘玉忠
王长玉

中国统计出版社

（京）新登字 041 号

图书在版编目（CIP）数据

实用管理数学/刘玉忠，王长玉主编.—北京：中国统计出版社，1994.9
ISBN 7-5037-1761-0

Ⅰ.实… Ⅱ.①刘… ②王… Ⅲ.管理学：数学 Ⅳ.C931.1

中国统计出版社出版
（北京三里河月坛南街 38 号 100826）
中共河南省委党校印刷厂印刷

850×1168 毫米 32 开本 9.75 印张 24 万字
1994 年 10 月第 1 版 1994 年 110 月郑州第 1 次印刷
印数：1—16500 册
*
ISBN 7-5037-1761-0/F·744
定价： 5.50 元

前　言

现代科学技术和我国经济建设的迅速发展，对经济工作和管理工作提出了越来越高的要求。而在现代管理工作和经济工作中，数学的应用日益重要，管理数学已成为从事于现代管理工作和经济科学研究所必备的基础知识。摆在读者面前的这本《实用管理数学》，就是为了满足从事管理工作和经济工作的同志学习现代管理科学和经济科学，提供应必备的数学知识和方法而编写的。

根据我国管理工作者多数的实际水平和多年来成人管理数学教学经验教训，考虑到在职干部学习之目的主要在于应用而不是研究，在编写时，内容上力求深入浅出，通俗易懂，注重于从日常工作的实例引入，重点介绍管理科学中必需的数学知识和各科实用方法，避免繁难的数学推导与技巧性的训练。

全书共十二章，前五章讲解管理数学基础知识，后七章介绍经济管理中常用的数学方法和数学模型。各章既前后照应又自成体系，读者可随意选阅。为使读者在学习中，便于掌握一些基本理论和具体方法，便于实际应用，书中除了列举的例题外，每章后都附有适量习题。

本书是由刘玉忠、王长玉主编，王红蔚、许清涛任副主编，参加编写工作的还有杨占喜、高镜辉、刘德瑞、陈德玉、李宏彬、申国论、皇甫幼洪等同志，最后由刘玉忠同志统编定稿。

在编写过程中，河南省委党校领导同志给予了大力支持，各地市党校有关同志对稿件的修改提出了许多宝贵意见。在此，我们谨致以深深的谢意。另外，在编写时我们参阅了大量书刊资料，恕不一一注明，在此一并致谢。

囿于水平，书中尚有不少疏误之处，敬请读者不吝指正。

编者

1994年6月

目　　录

第一章　函数及其应用

客观世界的一切事物，由于内部矛盾以及相互影响，总是处在不断的运动发展中，它反映在数学上就表现为一定数量的变化，即事物的量可以取不同值——这就是变量。一个量的变化，并不是孤立的，它和周围其它量的变化相互联系和相互制约着。变量之间相互依赖的特殊关系，数学上称为函数。函数是数学的基础，也是经济管理中必不可少的数学知识。

第一节　函数概念

一、概念的引出

人们在研究实际问题时，往往同时有几个变量，而且这几个变量通常并不是孤立的在变化，而是彼此有联系的、遵循着一定的规律变化着的。我们随便举几个例子来看看。

【例 1】 圆的半径 r 和它的面积 A，就不同的圆来说，它们都可以取得许多不同的值。因此，就不同的圆来说，它们都是变量。但重要的是：对于（某一范围内的，例如正值）每一个半径 r 的值，都对应着一个确定的面积 A 值。实际上，这个对应规则可用公式

$$A=\pi r^2$$

来表示。

【例 2】 在真空中自由落体所经的距离 S，以及该物体下落的时间 t 都是变量。假定物体开始降落时间为 0，着地时间为 T，则对于区间 $[0,T]$ 内的每一个下落时间 t 的值都对应着一个确定的下落 s 的值。这个对应规则可用公式

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

来表示。

【例 3】 对于一定质量的气体，确定它的情况，根据它所受的压力 p、所占的体积 V 以及它的温度 t。现在假定气体的温度 t 保持不变，而改变压力 p，则体积 V 也就随着改变。当然，对于某一范围内的每一个压力 p 的值(例如正值)，都对应着一个确定的体积 V 的值。这个对应规则可以用公式

$$V=\frac{k}{p}(k\text{ 是常量})$$

来表示。

【例 4】 某商场为了吸引消费者大批量的购买货物，特规定了如下价格差：

购货 100 单位以下(包括 100 单位)按货物所标的价格出售；

购货小于或等于 500 单位，超过 100 单位的部分按货物所标价格的 90%结算；

购货 500 单位以上，超过 100 单位小于 500 单位的部分按货物所标价格的 90%结算，超过 500 单位的部分按货物所标价格的 80%结算。

用 C 表示购买 x 单位货物的总费用，用 a 表示货物所标价格。因此，C 与购货 x 数额有如下关系：

$$C(x)=\begin{cases} ax & 0\leqslant x\leqslant 100 \\ 100a+(x-100)a\times 90\% & 100<x\leqslant 500 \\ 100a+400a\times 90\%+(x-500)a\times 80\% & 500<x<\infty \end{cases}$$

该例中的两个变量之间的对应关系虽然不很复杂，但却要用几个公式分段才能表达出来。

与上述问题类似的例子，不胜枚举。在这些例子中，如果把各个变量的具体意义撇开不管，则可以看出这些问题的共同点是：含有两个量，不妨记为 x 和 y，它们都是变量；当一个变量(例如 x)

在某一个范围内每取定一值时，另一个变量（例如 y）有确定的值与之对应。

二、函数的概念

如果在某个变化过程中，有两个变量 x 和 y。并且对于变量 x 在某一范围 X 内的每一个确定的值，按照某个对应法则 f，变量 y 总有确定的值与它对应，那么就说 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x)$$

x 称为自变量，y 称为因变量，自变量 x 的取值范围 X 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域。相应的因变量 y 的取值范围称为函数 $y=f(x)$ 的值域。

就上面几个例子来看：

在例 1 中，A 是 r 的函数，定义域是 $r>0$；

在例 2 中，S 是 t 的函数，定义域是 $0\leqslant t\leqslant T$；

在例 3 中，V 是 P 的函数，定义域是 $P>0$；

在例 4 中，C 是 x 的函数，定义域是 $(0,+\infty)$。

函数关系，实质上就是对应规则。在用公式来表示函数的情况下，公式本身就表明，要得到（对应于每一个自变量 x 的值）y 的值，应当对自变量 x 进行哪些运算。这时，这些运算手续就具体地反映了该函数的对应规则。

例如，上一段例 1 和例 2 中的函数，从原则上来说，它们都属于同一类型的对应规则——把自变量的值平方之后再乘以一个常数就得到对应的因变量的值；具体的差别只是所乘的常数不相同而已。（这类函数可以概括地表成 $y=ax^2$，它是一种比较特殊的二次函数）

仔细地检查一下函数的概念，就可以发现，构成函数的要素有三个：

1. 对应规则；

2. 定义域；

3. 值域。

三要素不同的函数（即使有一个要素不相同），就不是相同的函数。例如，

$$y=x+1 \tag{A}$$

和

$$y=\frac{x^2-1}{x-1} \tag{B}$$

两个式子就表示着两个不同的函数。这是因为

①对应规则不同：当 $x\neq1$ 时，有$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$。虽然这时（$x\neq1$ 时）两者的对应规则是相同的，但从整体来看，却是不同的。因为一个〔由（A）式表示的〕在 $x=1$ 时有对应的函数值，而另一个〔由（B）式表示的〕在 $x=1$ 时没有对应的函数值。

②定义域不同：一个是整个实轴，而另一个是整个实轴但要除去 $x=1$ 这一点。

在函数的概念中，只说 x 在某范围 X 内每取定一值之后，y 总有确定的对应值；而不说 x 在某范围内改变时，y 一定要改变。这样一来，局部地不加改变的量以及常量都可以看做是函数。

例如，由公式

$$y=c\cos^2x+c\sin^2x$$

给出的两变量 x、y 间的关系，可知 y 是 x 的函数（因为对于任一个实数 x，y 都有对应的值 c），定义域是整个实轴；但 y 是一个常量 c。这说明：常量 c 可以看做是函数（对于 x 每取定一个值之后，函数 y 有确定的对应值 c）。

在函数的概念中，只说 y 总有确定的值与之对应，而没有指明，到底有几个确定的对应值。

如果自变量的每一个值只对应着因变量的一个值，则称这函数是单值的；否则，称为多值的。例如

$$y=\pm\sqrt{1-x_2}, \qquad -1\leqslant x\leqslant 1$$

便是多值函数(二值函数)。

多值函数可以分成几个单值支来研究。例如上述二值函数可以分成两个单值支,即

$$y=\sqrt{1-x_2},\qquad -1\leqslant x\leqslant 1;$$

$$y=-\sqrt{1-x_2},\quad -1\leqslant x\leqslant 1。$$

今后如果没有特别的声明,所讲的函数都是指单值函数。

在函数的概念中,并没有明确地说出自变量的取值范围 X 究竟是由怎样的一些数组成的。这是因为,需要根据每一个具体的问题,以及 x 和 y 的实际意义才能决定。还要注意到下列两点:

1. 有些函数的定义域并不是数轴上的区间或由区间组合而成,而仅是由一些正整数组成的。例如,在单位圆内接正多边形的问题中,以 x 代表正多边形的边数,y 代表正多边形的面积,则 y 是 x 的函数;但根据这些量的实际意义,x 所能取的值只能是一些正整数。

2. 如果用一个公式来表示一个函数,但又没有标明 x、y 的实际意义,这就成为一个纯粹的数学上的函数(在数学上正是要暂时撇开具体的内容,以便进行一般性的研究,所以出现这种情况也是必然的)。这时,使公式有对应值 y 的一切 x 的全体,就算做由该公式所表示的函数的定义域,并记在公式的旁边(如果不记在公式的旁边,我们仍把函数的定义域理解成上述的那样)。例如,

$$y=ax^2,-\infty<x<+\infty;$$

$$y=\sqrt{1-x^2},-1\leqslant x\leqslant 1;$$

$$y=\frac{1}{x},x\neq 0。$$

从前面所讲的例 1 和例 2,以及这里的第一函数就不难发现,一个有具体意义的函数,它的定义域,可能要比不含具体意义时的较小。

三、函数的符号和函数的特殊值

变量 y 是变量 x 的函数这一事实，记成

$$y=f(x)$$

或 $y=F(x)$，$y=\varphi(x)$ 等等，括号前的字母 f 或 F、φ 等等，表明 y 和 x 存在着对应规则，因而可以任意选用。但为了避免混淆，在同一问题中，不要用同一字母来作为不同的对应规则的符号。

$y=f(x)$ 仍以读成"y 是 x 的函数"为宜。

如果对于自变量 x 的某一个已知值 a，函数 $y=f(x)$ 具有确定的对应值，那末就说当 $x=a$ 时（或在点 $x=a$ 处）函数是有定义的。

当 $x=a$ 时函数 $y=f(x)$ 的对应值，叫做函数当 $x=a$ 时（或在 $x=a$ 处）的函数值或函数当 $x=a$ 时（或在 $x=a$ 处）的特殊值。用符号 $f(a)$ 来表示。

【例 5】 函数 $f(x)=3x+2$ 当 $x=2$ 时，函数的对应值为 8，即

$$f(2)=3\times2+2=8。$$

【例 6】 如果以 f 代表上述例 2 中的对应规则 $f(t)=\frac{1}{2}gt^2$，则有

$$f(1)=\frac{1}{2}g\times1^2=\frac{1}{2}g,$$

$$f(2)=\frac{1}{2}g\times2^2=2g,$$

$$f(T)=\frac{1}{2}gT^2。$$

【例 7】 若函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & -1\leqslant x\leqslant0\\ x-1 & 0<x\leqslant1,\end{cases}$

求当 $x=1$，$x=0$ 时的函数值。

解：当 $x=1$ 时，

$$f(1)=1-1=0,$$

当 $x=0$ 时，

$$f(0)=0+1=1。$$

但是要注意，在该例中 $f(2)$，$f(10)$ 等等是没有意义的。因为该函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,1]$，所以自变量 x 在 $[-1,1]$ 以外取值，函数 $f(x)$ 没有定义。

第二节 函数的表示法

给出一个函数，就是建立了一种对应关系。表示这种对应关系有很多方法，常用的有三种，即公式法(解析法)、列表法和图象法。

一、公式法

如果函数是由数学式子表示出来的，就称为公式表示法。例如，$y=x^2$，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\sin x$ 等等，都是用公式法表示的函数。

这种表示方法便于理论研究，但是不直观，而且某些复杂的问题和社会经济现象很难用一个简单的公式来表达，因此还需要掌握其它方法。

二、列表法

把一系列自变量与其对应的因变量列成表格，给出函数的对应关系，就称为列表法。

例如，某工厂的年产量记录表如下表所示：

年　　份	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
产量(吨)	2.8	3.1	3.0	4.5	4.2	4.6	5.6	7.3

这个表表示了一个工厂 8 年内的时间与总产量之间的函数关系，这种表示方法就是列表法。这种方法容易找到自变量与函数的

对应值，但是有局限性，通常不可能把自变量的全部值给出来，有时表达函数关系也不够清楚。

三、图象法

图象法是用图形(通常是一条曲线)给出函数的对应关系的方法。这种方法表示函数关系比较直观，对函数的变化规律和性质一目了然，但是从图形上查函数值时，不够准确。

这三种函数表示方法相互之间是有联系的。例如，有了函数表达式，就可以列出表格，然后再以自变量为横轴、因变量为纵轴来建立起直角坐标系，按照表中数据就可以画出函数图形。

【例 8】 电话公司根据自己的通话设施和各单位打电话的次数，规定了不同的收费标准，其收费方法有如下两种：

①每月通话不超过 50 次收费 20 元，超过 50 次的部分每次以 0.60 元计算。

②每月通话不超过 50 次，每次以 0.60 元计算，超过 50 次的部分每次以 0.30 元计算。

试确定每种收费方法的总费用函数 y 与通话次数 x 的函数关系，并作出图形，分析经营策略。

解：①当 $x\leqslant 50$ 时，$y_1=20$，

当 $x>50$ 时，$y_1=20+0.60\times(x-50)$。

所以 $$y_1=\begin{cases}20 & x\leqslant 50\\ 0.6x-10 & x>50\end{cases}$$

②当 $x\leqslant 50$ 时，$y_2=0.60x$，

当 $x>50$ 时，$y_2=0.60\times 50+0.30\times(x-50)$

所以 $$y_2=\begin{cases}0.60x & x\leqslant 50\\ 15+0.30x & x>50\end{cases}$$

这两种收费方法的费用函数 y 与通话次数 x 的函数关系，用图形