"十二五"规划大学教材

线性代数

苗佳晶 郭渝生◎主　编
沈雪梅◎副主编

XIANXINGDAISHU

东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

线性代数

主　编　苗佳晶　郭渝生
副主编　沈雪梅

东北师范大学出版社
长　春

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 苗佳晶，郭渝生主编．--长春 ：东北师范大学出版社，2012.4
ISBN 978-7-5602-8127-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①苗… ②郭… Ⅲ. ①线性代数
Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 072456 号

□责任编辑：王春彦　□封面设计：魔弹文化
□责任校对：赵世鹏　□责任印制：张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春净月经济开发区金宝街 118 号（邮政编码：130117）
电话：010－82920765
传真：010－82920765
网址：http://www.nenup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
北京魔弹文化制版
北京市彩虹印刷有限责任公司印装
2012 年 4 月第 1 版　2012 年 4 月第 1 次印刷
幅面尺寸：185 mm×260 mm　印张：11.75　字数：301 千字

定价：23.00 元

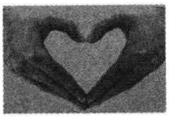
前言

线性代数以线性问题为主要研究对象，具有很广泛的应用性，特别是在数字化时代，大量的工程实际问题和计算结果最后都通过计算线性方程组的解得出，这就更促进了线性代数的广泛应用和发展。所以说，“线性代数”是高等院校大多数专业的学生必修的一门重要基础理论课，也是数学教学三大基础课程之一，具有不可替代的重要地位。另外，线性代数将数学的主要特点浓缩于一身，学生通过对线性代数的学习，可得到良好的逻辑思维能力，运算能力，抽象及分析、综合与推理能力的严格训练。

本书主编为牡丹江师范学院苗佳晶，主要负责编写本书的第一至三章；郭渝生编写本书的第四、五章。副主编为信阳职业技术学院沈雪梅，编写本书的第六、七章。编者多年来从事线性代数的教学工作，并且在教学中做了很多尝试，本书就是编者经过长期教学实践、研究，改进与完善的结果。

本书具有如下特点：每章前均设有本章的主要内容及要求，对本章内容梗概作了简述并给出了本章教学大纲及学习的要求；每章后均配有一定数量的习题和自测题，书末附有习题和自测题答案，以便学生能对自己的学习结果进行检测；本书在有关章节中还加入了线性代数在工程、经济、管理等方面的应用。

编　者



目录 CONTENTS

第一章 行列式

本章概述

线性代数是数学的一个分支，它以研究向量空间与线性映射为对象，线性代数出现于17世纪。历史上线性代数的第一个问题是关于解线性方程组的问题，最初线性方程组的问题大都来源于生活实践，正是实际应用问题刺激了这一学科的诞生与发展.

行列式出现于研究线性方程组的求解中，它最早是一种速记的表达形式，现在已是数学中一种非常有用的工具。第一个研究行列式理论与线性方程组的求解相分离的人，是法国数学家范德蒙德，时间是1772年，他提出了利用二阶子式和它们的余子式来展开行列式的法则，就对行列式本身进行研究而言，他是行列式理论的奠基人.

1815年，法国数学家柯西(A. L. Cauchy，1789—1857)首先提出行列式这个名称，他在一篇论文中给出了有关行列式的第一个系统的、几乎是近代的处理，其中主要结果之一是行列式的乘法公式。另外，他第一个把行列式的元素排成方阵，采用双重足标标记法；改进并证明了拉普拉斯的行列式展开定理。1841年，英国数学家凯莱(A. Cayley，1821—1895)首先创造了行列式记号“‖”。

1.1 行列式的定义

二阶行列式与三阶行列式的内容在中学课程中已经涉及，本节先对这些知识进行复习与总结，然后以归纳的方法给出 n 阶行列式的定义，最后介绍几种常用的特殊行列式.

1.1.1 二阶行列式的定义

记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

其中数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫做行列式的**元素**，横排叫做**行**，竖排叫做**列**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 叫做**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 叫做**列标**，表明该元素位于第 j 列。由上述定义可知，二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的代数和。这个规律性表现在行列式的记号中就是**“对角线法则”**。如图 1-1 所示，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**，于是，二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积.

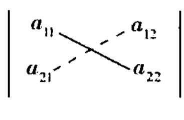


图 1-1

下面，我们利用二阶列式的概念来讨论二元线性方程组的解.

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1.1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (1.2) \end{cases}$$

式(1.1)$\times a_{22}-$式(1.2)$\times a_{12}$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}. \tag{1.3}$$

式(1.2)$\times a_{11}-$式(1.1)$\times a_{21}$,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}. \tag{1.4}$$

利用二阶行列式的定义,记

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=b_1a_{11}-b_2a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则式(1.3)、式(1.4)可改为

$$Dx_1=D_1,Dx_2=D_2.$$

于是,在系数行列式 $D\neq 0$ 的条件下,式(1.1)、式(1.2)构成的方程组有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D}.$$

1.1.2 三阶行列式的定义

类似地,我们定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

将上式右端按第一行的元素得取公因子,可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

式(1.5)具有两个特点:

(1)三阶行列式可表示为第一行元素分别与一个二阶行列式乘积的代数和;

(2)元素 a_{11},a_{12},a_{13}后面的二阶行列式是从原三阶行列式中分别划去元素 a_{11},a_{12},a_{13}所在的行与列后剩下的元素按原来顺序所组成的,分别称其为元素 a_{11},a_{12},a_{13}的**余子式**,记为 M_{11},M_{12},M_{13},即

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称其为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

于是，式(1.5)也可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}A_{1j}. \tag{1.6}$$

式(1.6)称为三阶行列式

注：根据上述推导过程，读者也可以得到三阶行列式按其它行或列展开的展开式，例如，三阶行列式按第二列展开的展开式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A\ 32=\sum_{j=1}^{3}a_{i2}A_{i2}. \tag{1.7}$$

此外，关于三阶行列式的上述概念也可以推广到更高阶的行列式中去.

1.1.3 n 阶行列式的定义

前面，我们首先定义了二阶行列式，并指出了三阶行列式可通过按行或列展开的方法转化为二阶行列式来计算。一般地，可给出 n 阶行列式的一种归纳定义.

定义　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_1n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_nn \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，其中横排称为**行**，竖排称为**列**。它表示一个由确定的递推运算关系所得到的数：当 $n=1$ 时，规定 $D_1=a|a_{11}|=a_{11}$；当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21};$$

当 $n>2$ 时，

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}. \tag{1.8}$$

其中 A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**，且

$$A_{1j}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

这里 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的**余子式**，它是在 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在的行与列后余下的元素按原

来顺序构成的 $n-1$ 阶行列式.

例如,在四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$ 中,元素 a_{32} 的余子式和代数余子式为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}.$$

式(1.8)称为 n 阶行列式**按第一行展开的展开式**。事实上,我们可以证明 n 阶行列式可按其任意一行或列展开,例如,将定义中的 n 阶行列式按第 i 行或第 j 列展开,可得展开式

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}(i=1,2,\cdots,n), \tag{1.9}$$

或 $$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}(i=1,2,\cdots,n)n \tag{1.10}$$

例 1 解方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=8 \\ x_1-2x_2=3 \end{cases}$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times1=-7$,

$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-7,D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-8\times1=$ -14,因 $D\neq0$,故题设方程组有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2.$$

例 2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

解 按第一行展开,得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}=1\times A_{11}+2\times A_{12}+3\times A_{13}$$

$$=1\times(1-)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}+2\times(1-)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=1\times0+2\times(-29)+3\times0=-58.$$

注:读者可尝试将行列式按第二列展开进行计算。

例 3 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}3 & 0 & 0 & -5\\ -4 & 1 & 0 & 2\\ 6 & 5 & 7 & 0\\ -3 & 4 & -2 & -1\end{vmatrix}$.

解 由行列式的定义,有

$$D_4=3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & 7 & 0\\ 4 & -2 & -1\end{vmatrix}+(-5)\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}-4 & 1 & 0\\ 6 & 5 & 7\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}$$

$$=3\left[1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7 & 0\\ -2 & -1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & 7\\ 4 & -2\end{vmatrix}\right]$$

$$+5\left[(-4)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5 & 7\\ 4 & -2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6 & 7\\ -3 & -2\end{vmatrix}\right]$$

$$=3[-7+2(-10-28)]+5[(-4)\cdot(-10-28)]-(-12+21)=466.$$

例 4 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3 & 2 & 0 & 8\\ 4 & -9 & 2 & 10\\ -1 & 6 & 0 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{vmatrix}$.

解 因为第三列中有三个零元素,可按第三列展开,得

$$D=2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 2 & 8\\ -1 & 6 & -7\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix},$$

对于上面的三阶行列式,按第三行展开,得

$$D=-2\cdot5\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 6\end{vmatrix}=200.$$

注:由此可见,计算行列式时,选择先按零元素多的行或列展开可大大简化行列式的计算,这是计算行列式的常用技巧之一。

1.1.4 几个常用的特殊行列式

形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{与} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行列式分别称为**上三角形行列式**与**下三角形行列式**，其特点是主对角线以下或以上的元素全为零.

我们先来计算下三角形行列式的值。根据 n 阶行列式的定义，每次均通过按第一行展开的方法来降低行列式的阶数，而每次第一行都仅有第一项不为零，故有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对上三角形行列式，我们可通过每次按最后一行展开的方法来降低行列式的阶数，而每次最后一行都仅有最后一项不为零，同样可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，非主对角线上元素全为零的行列式称为**对角行列式**，易知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

综上所述可知，上、下三角形行列式和对角行列式的值都等于其主对角线上元素的乘积.

1.2 行列式的性质

行列式的奥妙在于对行列式的行或列进行了某些变换(如行与列互换、交换两行(列)位置、某行(列)乘以某个数、某行(列)乘以某数后加到另一行(列)等)后,行列式虽然会发生相应的变化,但变换前后两个行列式的值却仍保持着线性关系,这意味着,我们可以利用这些关系大大简化高阶行列式的计算。本节我们首先要讨论行列式在这方面的重要性质,然后,进一步讨论如何利用这些性质计算高阶行列式的值.

1.2.1 行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式,称为 D 的**转置行列式**,记为 D^{T} 或 D',即

若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

注:由性质 1 知道,行列式中的行与列具有相同的地位,行列式的行具有的性质,它的列也同样具有.

性质 2 交换行列式的两行(列),行列式变号.

注:交换 i,j 两行(列)记为 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$.

推论 1 若行列式中有两行(列)的对应元素相同,则此行列式为零.

证明 互换 D 中相同的两行(列),有 $D=-D$,故 $D=0$.

性质 3 用数 k 乘行列式的某一行(列),等于用数 k 乘此行列式,即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD.$$

注:第 i 行(列)乘以 k,记为 $r_i\times k$(或 $c_i\times k$).

推论 2 行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 3 行列式中若有两行(列)元素成比例,则此行列式为零.

例如,行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}$,因为第一列与第二列对应元素成比例,根据推论 3,可直接得到 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}=0.$

性质 4 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1+D_2.$$

性质 5 将行列式的某一行(列)的秘有元素都乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变.

例如,以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上,则有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1(i\neq j).$$

证明 $D_1 \xlongequal{\text{性质 4}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{性质 3}} D+0=D.$

注:以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上,记作 r_i+kr_j;以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上,记作 c_i+kc_j.

1.2.2 利用"三角化"计算行列式

计算行列式时,常用行列式的性质,把它化为三角形行列式来计算。例如,化为上三角形行列式的步骤是:

如果第一列第一个元素为 0,先将第一行与其它行交换,使得第一列第一个元素不为 0,然后把第一行分别乘以适当的数加到其它各行,使得第一列除第一个元素外其余元素全为 0;再用同样的方法处理除去第一行和第一列后余下的低一阶行列式;如此继续下去,直至使它成为上三角形行列式,这时主对角线上元素的乘积就是所求行列式的值.

注:今大部分用于计算一般行列式的计算机程序都是按上述方法进行设计的。可以证明,利用行变换计算 n 阶行列式需要大约 $2n^3/3$ 次算术运算．任何一台现代的微型计算机都可以在几分之一秒内计算出 50 阶行列式的值,运算量大约为 83 300 次。如果用行列式的定义来计算,其运算量大约为 49×50! 次,这显然是个非常大的数值。

例 1 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$,求 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -3a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$