大学实验教学系列

DAXUESHIYANJIAOXUEXILIE

医学物理实验

路玉滨 张 宇 王艳丽 主编 马天义 主审

HEUP 哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

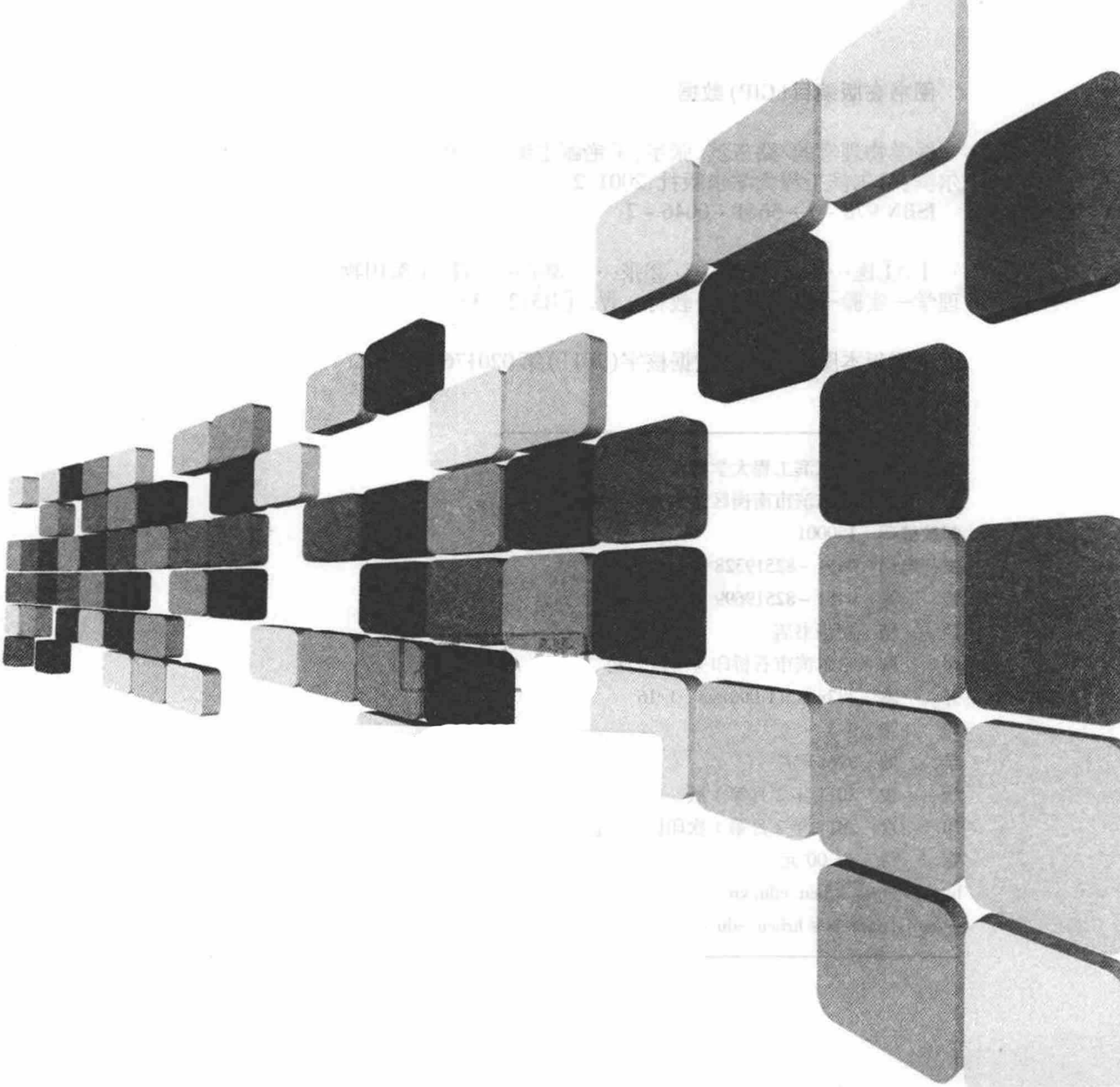
医学物理实验

大学实验教学系列

DAXUESHIYANJIAOXUEXILIE

医学物理实验

路玉滨 张 宇 王艳丽 主编 马天义 主审



内容简介

本书是根据医学物理学教学大纲的要求，在认真总结医学物理学实验教学经验的基础上，结合实验教学的特点编写而成的。系统地介绍了物理实验的基本方法、基本技能及误差理论，适当增加了与医学关系密切的新内容，突出了与医学结合较紧密的基础物理实验方法和新开发的仪器，为培养医学学生的创新能力提供了教学条件。各实验都有明确的目的和要求，并有简明扼要的实验原理和操作步骤，对数据的处理和误差的计算作出了严格的规范，这不仅有利于学生自学，而且还有利于培养学生独立思考、分析和解决实际问题的能力。考虑到实验设备的实际情况，在教材编写过程中对实验内容进行了一定的取舍。

本教材主要供临床医学、儿科、口腔、卫生、卫生检验、医学检验、预防医学、口修、护理、康复、中医、药学、制药等专业使用，也可供中等卫生学校的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

医学物理实验/路玉滨，张宇，王艳丽主编. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2001.2

ISBN 978-7-5661-0046-7

Ⅰ.①医… Ⅱ.①路… ②张… ③王… Ⅲ.①医用物理学—实验—医学院校—教材 Ⅳ.①R312-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第020176号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街124号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1 092mm 1/16
印　　张 9.5
字　　数 226千字
版　　次 2011年2月第1版
印　　次 2011年2月第1次印刷
定　　价 20.00元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　言

物理学正日益渗透到医学和其他各个领域，而这种渗透无不与物理实验密切相关，医学物理实验正是将物理基础理论运用到医学领域所需的物理实验与诊断手段的桥梁。在医学物理实验课程中，将学习用于医学的有关物理知识、实验手段和技能，只有真正掌握医学物理实验的基本功，才能顺利地把物理原理和技术应用到医学学科而产生质的飞跃，这也将为今后医学课程的学习打好必要的基础。

本书是根据医学物理学教学大纲的要求，在认真总结医学物理学实验教学经验的基础上，根据实验室仪器配备的情况，结合实验教学的特点，及当前物理实验课程和实验中心的建设编写而成的。同时吸取了很多兄弟院校教师提出的宝贵意见，在此致以谢忱。

本书由佳木斯大学理学院大学物理教研室的路玉滨、张宇、王艳丽等教师编写，佳木斯大学理学院大学物理教研室的马天义老师对全书进行了审阅，提出了很多修改意见。几年来，很多教师对本书的书稿提出了不少的建议，编者在此致以谢忱。由于编者水平有限，书中难免存在不妥和错误之处，衷心欢迎读者批评指正。

编　者

2010 年 10 月

目　　录

第1章 绪　　论

1.1 物理实验课的作用

物理学是研究物质运动一般规律的科学,物理学课程的作用在于使学生建立起全面的系统的有关物质运动的物理概念和物理图像,同时培养和训练学生的物理思维能力。物理学又是一门以实验为基础的学科,物理实验不仅是建立物理理论的源泉,而且还是物理理论、物理学说的检验标准。科学实验与生产实践和自然现象的不同在于:实验能在一定条件下再现某一自然现象,让人们有时间和机会去研究现象发生的原因和规律;实验能把复杂的自然现象分解成为若干简单的现象,以进行个别的和综合的研究;实验还可以实现对研究对象的人为控制,以及对现象进行比较和分析。总之,从一定意义上讲,没有科学实验,就不会有今天科学技术的高度发展。

20世纪50年代以前,世界各国对物理实验课的作用的认识,还停留在"物理实验课程是物理学课程教学的一个环节"。直到20世纪60年代初,人们才逐渐认识到科学实验在尖端技术发展中的地位,随之而来的是以"新物理运动"为出发点的改革浪潮,该改革浪潮明确地提出了"加强基础理论教学与加强基础实验教学并重"的观点,于是物理实验教学脱离了物理理论教学而单独开设,并从实验课程的特有规律出发强调实验方法、实验素质的训练。实践证明,物理实验课程在培养学生独立地从事科学技术工作的能力、理论联系实际的分析综合能力与思维和表达能力等方面均具有独特的优势。所以说,"物理实验"这门课程与物理理论课程既有着密切的联系,又有很大的区别,它不仅仅是向学生传授知识和技能,而且更重要的是培养学生开拓性研究的能力。在科学研究中,常常是实验中的某些物理现象为我们提供了种种线索,而要从这些线索中作出独特的判断,还需要有丰富的想象力去对蕴藏在所有线索后面的令人惊讶的简单而又非常奇特的图像进行猜测,然后再用实验手段来验证这种猜测的正确性,这个想象过程是很难的,又是最具挑战性的。因而,作为一个物理学家,不仅要进行实验,还要去想象、推演和猜测,也就是假设。所以在物理实验课教学过程中,同学们要认识到从事科学实验和动手能力的形成是以实验的基本知识、基本方法、基本技能的熟练掌握为基础的,还要注意到创造性地从事科学实验更需要物理思维能力,因此要求学生主动地寻求和接受这方面的训练和培养。此外,平时还要养成良好的实验素养,比如良好的观察习惯和正确的记录数据方法以及对实验结果的分析与思考,等等。

1.2 医学物理实验的教学目的

医学物理实验是医学物理学的重要组成部分,是学好医学物理的基础。医学物理学中力学、声学、热学、电磁学、光学、电子学及原子学的实验技术与方法为医学研究及临床诊断和治疗提供了重要手段,因而医学物理学实验是医学学生的必修课程。一个国家、一个医院

医疗水平的高低，在很大程度上取决于医疗设备的现代化和医疗技术手段的先进性，因此医学物理学的理论与实验是它们的基础。

医学物理实验的教学目的：

(1)使学生系统地学习和掌握物理量的测量方法，培养和训练学生进行科学实验的基本技术和技能，使学生学会正确处理实验数据和分析实验结果；

(2)通过实验使学生能够正确掌握物理仪器的使用方法，为进一步掌握复杂的医疗仪器打下良好的基础；

(3)通过对物理现象的细致观察和对物理量的精确测量，使学生加深对物理现象及其规律的理解，会验证某些重要的物理定律，学会与医学有关的物理量的测量方法；

(4)培养学生实事求是的科学作风和严肃认真的工作态度。

1.3 医学物理学实验课的要求

1. 课前认真预习

(1)实验课前必须认真阅读物理实验教材，了解本次实验的目的、原理、实验仪器、实验器材、测量的项目、实验步骤、注意事项、预习提要和思考题。

(2)在充分预习的基础上，画好数据记录表格。

2. 实验中正确操作

(1)先学习实验室规则，再进行操作。

(2)按操作程序把仪器调节至正常使用状态。正确选择量程，计算好该量程下仪器的精密度。

(3)对于电学、电子学实验，必须执行电学、电子学操作规程。

(4)按照实验步骤和注意事项操作。每步操作必须目的明确，不准盲目操作，实验过程中发现异常现象及时向指导教师报告，不准自行处理。

(5)及时认真地记录原始数据，如记录的数据有误时，不应在原数据上改写，应将有误数据打上"×"后，在旁边记下正确的数据。测量完毕后请指导教师检查数据，合格后方可停止实验，并请指导教师签字。

3. 写好实验报告

实验报告的具体内容：

(1)实验日期及实验题目；

(2)实验目的；

(3)实验仪器及其有关的器件(仪器应写出型号，元器件应写出全称及其标值)；

(4)简述实验原理、实验方法及步骤，并画出电路图；

(5)完成测量数据表格及图线、图表等；

(6)实验结果的表示及其讨论；

(7)附有指导教师签字的原始数据。

4. 遵守实验室规则

(1)保持实验室内肃静和整洁,指导教师和学生一律穿白色工作服进入实验室。

(2)实验前根据指导教师的讲述或实验书上的说明检查仪器、元器件,如有缺损应立即向指导教师报告。

(3)未了解仪器性能之前切勿动手操作,使用仪器时必须严格遵守操作规程,学生不许拆卸仪器,不许做与本实验内容无关的实验。

(4)使用消耗品时要注意节约。

(5)实验完毕,要清理仪器及元器件,填写仪器使用登记表;关闭电源和水阀门,做好卫生工作。

(6)如有仪器损坏或器材丢失,按情节轻重,有关责任者要赔偿损失并上交书面检查。

参加实验人员必须严格遵守上述实验室规则。

附:电学、电子学操作规程

1. 能够认清实验仪器、元器件的名称、极性、标值。
2. 按电路图摆好各仪器及元器件位置,根据测量值,选好量程,顺次连接电路。
3. 电路连接完毕后,必须请指导教师检查,确认无误后方可闭合开关。
4. 在实验测量过程中不允许改变仪器、仪表的量程,如须改变量程时,要断开电源(切断电源),在整个电路不通电的情况下,再重新选定量程。
5. 测量出实验数据后,经指导教师审阅许可后,方可拆卸电路。拆卸电路时,要先断开开关,关闭电源,再将实验仪器、各元器件及导线整理复原。

第2章 测量误差、数据处理及不确定度

2.1 测量与误差

1. 测量及其分类

物理实验包括两个重要的方面：一是对物理现象的细致观察，二是对物理量的精确测量。观察是对现象的定性了解，测量是定量的研究。测量是物理实验的基础。研究物理现象，了解物质特性，验证物理原理都要进行测量。

所谓测量就是将待测量与规定的同类标准单位量相比较，在允许的误差范围内测得该待测量的大小。例如，长度的单位是米、厘米和毫米；质量的单位是千克、克和毫克；电流的单位是安培、毫安和微安；时间的单位是秒、毫秒和微秒等。而且每一个测量值都是由数值（倍数）与单位构成的。

根据获得测量结果的方法不同，测量可分为直接测量和间接测量。直接测量是指某些待测量可直接从仪器上读出。例如，用米尺测物体的长度，用天平和砝码测物体的质量，用电流计测量线路中的电流，用秒表测量时间等都是直接测量。间接测量是指许多待测量往往不能直接测得，需要在直接测量的基础上，利用直接测量的量与待测量之间的已知函数关系进行运算，从而得到该待测量的测量结果。例如，测量球体的体积时，先直接测量球的直径 d，再经公式（$V=\pi d^3/6$）可计算出球体的体积。

根据测量条件的差异，测量又可分为等精度测量和非等精度测量。实验中对同一待测量，用同一仪器（或精度相同的仪器），在同一条件下进行的各次测量是等精度测量，否则是非等精度测量。等精度的各个测得量的可靠程度是相同的，因此，只有等精度测量才能进行误差计算。

直接测量的数据是从仪器上直接读取的，因此将直接测量的数据称为读数或原始数据，它是测量的原始依据。在实验中，原始数据必须边测量边记录，不得事后补记。原始数据必须经指导教师检查核实且签字后方可生效。

间接测量的数据是通过对直接测量的原始数据进行某种数学运算得到的，因此有时把间接测量的数据叫做得数。

2. 测量的误差及其分类

任何一个待测量在一定的条件下都存在着确定的客观真实值，这个值被称为该待测量的“真值”。实际测得的量被称为测量值。任何测量仪器、测量方法、测量环境、测量者的观察能力等都不能做到绝对准确，因此测得的结果只能准确到一定的程度，不能认为测量的结果就是它的真值。真值是不可能被确切测得的。

测量误差就是测量值与真值之间的差值。实验证明：测量结果都有误差，误差自始至终

存在于一切科学实验和测量的过程中。

在实验中，每使用一种仪器，进行一次测量，都会引入误差。测量一个物理量用的仪器越多，引入的误差就越多，因此，分析测量中可能产生的误差，应尽可能消除或减少其影响。对测量结果中未能消除的误差作出估算，是物理实验和许多科学实验中必不可少的工作。为此，我们必须了解误差的概念、特性、产生的原因和估算方法等有关知识。

测量误差的来源是多方面的，就其性质而言可分为系统误差和偶然误差。

(1)系统误差

在一定的测量条件下做多次重复测量，误差的数值和正负号有较明显的规律，这种误差被称为系统误差，又被称为恒定误差。系统误差主要是由于仪器本身的缺陷或没有按规定条件使用仪器(如天平臂长不相等，砝码的质量不准，仪器零点未校准等)；定理或公式本身不够严密或实验方法粗糙；实验者技术不够熟练或有不良习惯，使测量值总是有规律地朝某一方向偏离真值而产生的。系统误差可以通过校准仪器，改进实验装置和实验方法或对测量结果进行理论上的修正加以消除或尽可能减少。

(2)偶然误差

偶然误差又被称为随机误差，是指在一定的测量条件下，做多次重复的测量，误差出现的数值和正负号没有明显规律。这种误差是由许多不可预测的偶然因素造成的，例如，测量时外界温度、湿度的微小起伏，空间电磁场的干扰，不规则的机械振动和电压的随机波动等，使实验过程中的物理现象和仪器的性能时刻发生有涨落的变化。偶然误差的出现，就某一次测量值来说是没有规律的，其大小和方向都是不能预知的；但对一个量进行足够的多次测量时，则会发现它们的偶然误差是按一定的统计规律分布的，并且正、负误差出现的机会是相等的。因此，增加重复测量的次数可以减小偶然误差，但是偶然误差是不可能被消除的。

必须强调的是，误差与测量中的错误是根本不同的概念。测量中的错误是由于实验者粗心大意，在测量、记录或计算时读错、记错、算错或实验设计错误，操作不当等造成的。测量中的错误不是误差，它完全可以且必须避免。

3. 对测量结果的评价

测量结果主要用精度、正确度、精密度三者之间的关系进行评价。

测量结果的正确度与精密度分别是对两类不同性质的系统误差和偶然误差的描述。从测量中可以知道，系统误差越大，被测量的测量结果对其真值的偏差也越大。通常将系统误差的大小作为反映正确度高低的定量指标。另一方面，对同一被测量做多次重复测量，各测量值之间的接近程度被用于对测量值精密度的描述。因此，在测量中偶然误差越大，则多次重复测量同一被测量所得的各次测量值之间的偏离也越大，即越分散，表明测量值的精密度越低，可见偶然误差可以作为反映精密度高低的定量指标。

精度又被称为精确度，被用来描述测量结果与真值的接近程度。精确度包含了正确度和精密度两方面的含义。只有当系统误差和偶然误差都小时才能认为精确度高。精确度描述对同一被测量做多次重复测量时，所有测量值对其真值的接近程度以及各测量值之间的接近程度。

正确度、精密度和精确度三者之间的关系，可以以打靶时弹着点的分布情况来说明，如图 2.1 所示。图 2.1(a)表示精密度高，即偶然误差小，但是位置不正，所有击中点均离靶心较远，即有一较大的系统误差，正确度低；图 2.1(b)表示的精密度不如图 2.1(a)，击中点较

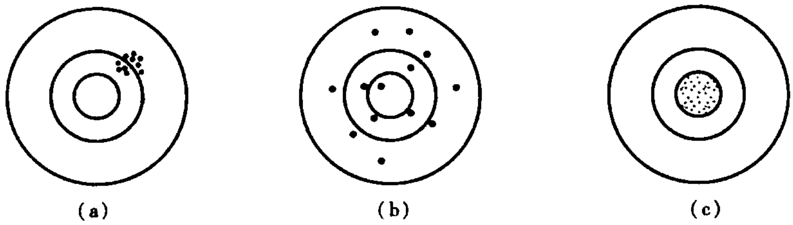


图 2.1　打靶时弹着点分布情况图

分散，但正确度较图 2.1(a)高，即系统误差较图 2.1(a)小；图 2.1(c)表示精密度和正确度都高，偶然误差和系统误差均较小，精确度高。

2.2　系统误差的修正

在许多情况下，系统误差是影响测量结果精确度的主要因素，然而它又常常表现不明显，因此，找出系统误差，设法修正或消除它的影响，是误差分析的一项重要内容。

系统误差的表现各式各样，必须认真研究分析测量原理、仪器及装置的配置、仪器调整和使用的方法、测量条件的选择以及环境因素等与实验全过程都有关的各个环节，采用相应合适的手段去消除系统误差对测量结果的影响。

下面简单介绍几种修正系统误差的方法：

(1)对理论公式进行适当的修正；

(2)严格遵守仪器、装置的调节要求和使用条件；

(3)采用特殊的测量方法，例如，用复称法消除天平臂长不相等所引起的误差；用电桥测电阻时，采用比较方法，用标准电阻代替待测电阻使电桥重新达到平衡，这时标准电阻的数值就是待测电阻值，这样可避免桥臂的系统误差；分光计采用对称测量方法以消除偏心误差，等等。

上面只介绍了几种较简单的分析、修正系统误差的方法，但系统误差的问题往往都是很复杂的，解决它的方法也是多种多样的，应该在实际工作中不断地学习和研究。

2.3　偶然误差的估计及测量结果的表示

现在我们假定在没有系统误差存在的情况下来讨论偶然误差问题。

直接测量和间接测量都有误差。间接测量的数据依赖于直接测量，直接测量的误差也必然影响到间接测量的误差，二者之间必然存在一定的联系。我们首先讨论直接测量的误差，接着再讨论间接测量的误差，最后介绍测量结果的表示法。误差的表示方法有两种：一种是绝对误差，另一种是相对误差，二者存在一定的联系。

1. 直接测量的误差

(1)单次直接测量偶然误差的估计

实际工作中，有时测量不能重复，有时不需要精确测量，我们可采取一次测量并估计误差。估计误差要根据仪器上注明误差以及测量条件来确定，没有注明的仪器，可取仪器的最

小分度的一半作为单次测量误差。例如，用米尺测量物体的长度，最小分度为 1 mm，误差可取 0.5 mm。从教学角度看，只做一次测量的误差值，可根据各实验的不同情况以及在实验中学生实验技巧的高低来具体地对待。

(2)多次测量偶然误差的估计

①以算术平均值代表测量结果

在测量次数足够多的情况下，偶然误差服从统计规律，测量结果比真值大的概率和测量值比真值小的概率几乎相等。在操作方法正确的情况下，各次测量的结果都应在真值附近。

设被测量的真值为 n，测量次数为 K，各次测量值分别为 $N_1, N_2, \cdots, N_k$，则各次测量值与真值的差分别为

$$\Delta n_1 = N_1 - n, \Delta n_2 = N_2 - n, \cdots, \Delta n_k = N_k - n$$

根据前面的分析，这些差值有正有负，在测量次数足够多的情况下

$$\lim_{K\to\infty}(\Delta n_1 + \Delta n_2 + \cdots + \Delta n_K) = 0 \tag{2.1}$$

则可得

$$n = \lim_{K\to\infty}\frac{N_1 + N_2 + \cdots + N_K}{K} \tag{2.2}$$

式(2.2)表明无限多次测量结果的平均值等于真值。

在实际测量中，实验次数总是有限的，则式(2.1)不等于零，算术平均值也不等于真值，但接近于真值，测量的次数越多，就越接近于真值。算术平均值用 $\overline{N}$ 表示，即

$$\overline{N} = \sum_{i=1}^{k}\frac{N_i}{K} = \frac{1}{K}(N_1 + N_2 + \cdots + N_k) \tag{2.3}$$

②标准偏差

根据误差的定义可知，由于真值不能确定，那么误差也只能估计。估计偶然误差的方法有很多种，最通用的是用标准偏差来表示偶然误差。

设对某一物理量在测量条件相同的情况下进行 K 次无明显系统误差的独立测量，我们用被测量的算术平均值来表示测量结果，每一次测量值 N_i 与算术平均值 $\overline{N}$ 之差被称为残差，即

$$\Delta N_i = N_i - \overline{N}, \quad i = 1, 2, \cdots, K \tag{2.4}$$

显然这些残差有正、有负、有大、有小。常用"均方根"法对它们进行统计，得到的结果就是单个测量值的标准偏差，用 σ 表示，即

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i - \overline{N})^2}{K - 1}} \tag{2.5}$$

上述的标准偏差又被称为测量列的标准偏差，主要强调由一列测量值求出的标准偏差，是估计一个测量值误差情况的，而且对测量值中的任何一个都一样。

K 次测量结果的平均值 $\overline{N}$ 的标准偏差为 $\sigma_{\overline{N}}$，即

$$\sigma_{\overline{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{K}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i - \overline{N})^2}{K(K - 1)}} \tag{2.6}$$

式(2.6)表示多次测量减小了偶然误差。

③算术平均误差

还有一种偶然误差的估计方法就是算术平均误差,其表示方法为

$$\delta_N = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K} | \delta_{N_i} | \tag{2.7}$$

式中,$\delta_{N_i} = N_i - \overline{N}$。

算术平均误差常用于误差分析、实验设计或作粗略的误差计算。

2. 间接测量的误差

在很多实验中,我们进行的测量都是间接测量。间接测量的结果是由直接测量结果根据一定的数学公式计算出来的,因此直接测量结果的误差必然会影响到间接测量结果,这种影响的大小也可以由相应的数学公式计算出来。表达各直接测量结果的误差与间接测量结果的误差之间的关系式被称为误差传递公式。

(1)误差传递的基本公式

设间接测得量的数学表达式为

$$N = f(x, y, z, \cdots) \tag{2.8}$$

式中,$x, y, z, \cdots$为独立的物理量(直接测得量)。对式(2.8)求全微分,有

$$\mathrm{d}N = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \cdots \tag{2.9}$$

式(2.9)表示当$x, y, z, \cdots$有微小改变$\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z, \cdots$时,$N$就改变$\mathrm{d}N$。通常误差远小于测量值,把$\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z, \cdots, \mathrm{d}N$看作误差。

把式(2.8)取对数后,再求全微分,有

$$\ln N = \ln f(x, y, z, \cdots) \tag{2.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = \frac{\partial \ln f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \ln f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \ln f}{\partial z}\mathrm{d}z + \cdots \tag{2.11}$$

式(2.9)和式(2.11)就是误差传递的基本公式。式(2.9)中$\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x, \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y, \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z\cdots$及式(2.11)中的$\frac{\partial \ln f}{\partial x}\mathrm{d}x, \frac{\partial \ln f}{\partial y}\mathrm{d}y, \frac{\partial \ln f}{\partial z}\mathrm{d}z\cdots$各项叫做分误差;$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\cdots$及$\frac{\partial \ln f}{\partial x}, \frac{\partial \ln f}{\partial y}, \frac{\partial \ln f}{\partial z}\cdots$叫做误差的传递系数。由式(2.9)及式(2.11)可见:一个量的测量误差对于总误差的贡献,不仅取决于其本身误差的大小、还取决于误差传递系数。对于和、差的函数,用式(2.9)方便;对于积、商的函数,用式(2.11)方便。

(2)偶然误差的传递与合成

由各部分的分误差组合成总误差,就是误差的合成,误差的传递公式(2.9)和式(2.11)中包括了误差的合成。

各个独立量测量结果的偶然误差,是以一定方式合成的。可以证明,它们的合成方式是平方和平方根合成,即由式(2.9)及式(2.11)有

$$\sigma_N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \cdots} \tag{2.12}$$

$$\frac{\sigma_N}{N} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \cdots} \tag{2.13}$$

常用函数的标准偏差传递公式如表 2.1 所示。

表 2.1　常用函数的标准偏差传递公式

函数表达式	标准偏差传递公式(合成公式)
$N = x + y$	$\sigma_N = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$
$N = x - y$	$\sigma_N = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$
$N = xy$	$\frac{\sigma_N}{N} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$N = \frac{x}{y}$	$\frac{\sigma_N}{N} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$N = \frac{x^k y^m}{z^n}$	$\frac{\sigma_N}{N} = \sqrt{k^2\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + m^2\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + n^2\left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2}$
$N = kx$	$\sigma_N = k\sigma_x, \frac{\sigma_N}{N} = \frac{\sigma_x}{x}$
$N = \sqrt[k]{x}$	$\frac{\sigma_N}{N} = \frac{1}{k}\frac{\sigma_x}{x}$
$N = \sin x$	$\frac{\sigma_N}{N} = \lvert\cos\rvert\sigma_x$
$N = \ln x$	$\sigma_N = \frac{\sigma_x}{x}$

由表 2.1 可见，加减法用绝对误差平方和，乘除法用相对误差平方和，都取正号。归纳起来，求间接测量结果误差(标准偏差的平方和平方根合成)的步骤为：

①对函数求全微分(或先取对数再求全微分)；

②合并同变量的系数；

③将微分号变成误差号，求平方和，注意各项均用“+”号相连。

科学实验中一般都采用平方和平方根法来估计间接测量结果的偶然误差，或假定偶然误差是在极端条件下合成的，我们将对公式(2.9)和式(2.11)取绝对值相加，即

$$\Delta N = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right| + \cdots \tag{2.14}$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \left|\frac{\partial \ln f}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial y}\Delta y\right| + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial z}\Delta z\right| + \cdots \tag{2.15}$$

以上这种是误差的算术合成法，常用于误差分析、实验设计或作粗略的误差计算。常用函数的算术合成误差传递公式如表 2.2 所示。

表 2.2　常用函数的算术合成误差传递公式

函数表达式	误差合成(传递)公式
$N = x + y$	$\Delta N = \Delta x + \Delta y$
$N = x - y$	$\Delta N = \Delta x + \Delta y$
$N = xy$	$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$

表 2.2(续)

函数表达式	误差合成(传递)公式
$N=\frac{x}{y}$	$\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}$
$N=\frac{x^k y^m}{z^n}$	$\frac{\Delta N}{N}=k\frac{\Delta x}{x}+m\frac{\Delta y}{y}+n\frac{\Delta z}{z}$
$N=kx$	$\Delta N=k\Delta x,\frac{\Delta N}{N}=\frac{\Delta x}{x}$
$N=\sqrt[k]{X}$	$\frac{\Delta N}{N}=\frac{1}{k}\frac{\Delta x}{x}$

表 2. 2 中的这些公式:加减法用绝对误差相加,乘除法用相对误差相加,公式中每一项都取正值。

3. 测量结果的表示方法

(1)绝对误差

通常把测量结果及其偶然误差写成 $N \pm \Delta N$,其中 N 是测量值,它可以是一次测量值,也可以是多次测量的平均值 $\overline{N}$,ΔN 是绝对误差。对于多次测量的结果,一般用$\overline{N} \pm \sigma_{\overline{N}}$代替 $N \pm \Delta N$。例如:测得一长度为 $L=7.04 \pm 0.06$ cm,这个表示法不能理解为 L 只有 $7.04+0.06=7.10$ cm和 $7.04-0.06=6.98$ cm 两个值,而是表示 L 在 7.04 附近 ± 0.06 cm 这个范围内包含真值的一定的可能性(概率)。因此,不排除多次测量中有部分测量值在 $N \pm \Delta N$ 以外。不同的估计方法得到的 ΔN 表示在 $N \pm \Delta N$ 范围内包含真值的不同概率,或者说,对于不同的置信度,ΔN 的大小是不同的。

(2)相对误差

绝对误差可以说明测量结果的误差范围,但不能更客观地反映测量的准确程度。例如,测量某物体的长度的平均值为 1.000 cm,绝对误差为 1 mm,测另一物体的长度的平均值为 1.0 cm,绝对误差也为 1 mm,但误差对于平均值的百分比,前者是不小于后者的,显然前者测量的准确程度高于后者。为此引入相对误差的概念,相对误差也被称为百分误差,用 E 来表示,即

$$E=\frac{\Delta N}{N}\times 100\%\left(\text{即等于}\frac{\sigma}{N}\times 100\% \text{ 或}\frac{\sigma_{\overline{N}}}{N}\times 100\%\right) \tag{2.16}$$

相对误差与绝对误差之间的关系为

$$\Delta N=N\times E=N\times\left(\frac{\Delta N}{N}\right) \tag{2.17}$$

考虑到相对误差,测量结果应表示为

$$N=N\pm\Delta N=N(1\pm E) \tag{2.18}$$

则多次测量结果可表示为

$$N=\overline{N}\pm\sigma_{\overline{N}}=\overline{N}(1+E) \tag{2.19}$$

一般情况下相对误差可取两位数字。

由误差传递公式可以看出,当间接测量量为和、差的函数时,应先计算绝对误差;而当间