中学数理化解题丛书

ZhongXue ShuLiHua JieTi CongShu

高中数学解题指引

总主编☆朱铁成

本册主编☆胡建军

廣東省出版集團

全国优秀出版社 广东教育出版社

中学数理化解题丛书

ZhongXue ShuLiHua JieTi CongShu

高中数学解题指引

总主编☆朱铁成

本册主编☆胡建军

廣東省出版集團

全国优秀出版社 广东教育出版社

·广州·

图书在版编目（CIP）数据

高中数学解题指引/胡建军主编．—广州：广东教育出版社，2009．8
（中学数理化解题丛书/朱铁成主编）
ISBN 978－7－5406－7653－7

Ⅰ．高…　Ⅱ．胡…　Ⅲ．数学课—高中—解题
Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 144989 号

责任编辑：梁耀凤
责任技编：肖作勤
装帧设计：陈宇丹

广 东 教 育 出 版 社 出 版 发 行
（广州市环市东路 472 号 12－15 楼）
邮政编码：510075
网址：http://www.gjs.cn
广东新华发行集团股份有限公司经销
佛山市浩文彩色印刷有限公司印刷
（南海区狮山科技工业园 A 区）
890 毫米×1240 毫米　32 开本　11．5 印张　287 000 字
2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷
印数 1－3 000 册
ISBN 978－7－5406－7653－7
定价：18.95 元
质量监督电话：020－87613102　购书咨询电话：020－87621848

出版说明

为了配合新课程的实施，广东教育出版社约请了研究中学教育的大学教授和富有教学经验的中学特级教师、高级教师，编写了这套供初、高中学生使用的《中学数理化解题丛书》。本丛书共6本，其中初中3本，高中3本。作者在编写时以教育部发布的课程标准为指导，注重选编典型的和新颖的题目，突出了“知识与技能”、“过程与方法”、“情感态度与价值观”三维目标，内容基本覆盖了各个学段。

本丛书按章节顺次编排，每章开始有知识提要，简要阐述基本概念、定律、定理和公式等。这些基本知识是解题的依据。

典型题解题型一般分为选择题、填空题、解答题、实验题、作图题、论述题、计算题、综合题、探究题等。典型题解结合各学科典型内容，贴近学生生活，联系社会实际，与现代科技发展相联系；与科学研究方法、情感态度相联系，突出应用知识解决问题，体现解题的探究性和开放性。

题解的释文有“分析”、“解答”、“说明”、“引申”等项目。其中“分析”着重分析解题思路，阐明解题方法与技巧；“解答”则规范地阐述解题的过程与结果；“说明”小结解题意义或注意事项；对本题作一推广或阐述另类解法，以求达到举一反三、触类旁通。

在此，我们向在本书编写及出版过程中给予支持的学校领导及参与本书复核工作的教师表示感谢。

目录 MULU

第一章
集合、简易逻辑、函数

知识提要

集合、简易逻辑是高中数学的基础内容，包括集合的概念、集合的运算、充要条件及简易逻辑等基础知识. 函数是高中数学最重要、最基础的内容，函数的思想方法更是贯穿于整个高中数学. 函数的图象、定义域、值域、函数的奇偶性、单调性等是本章的重点，函数与方程，函数与不等式，函数与数列等知识的综合应用，实际应用问题等，是本章的难点. 本章还应该掌握几种基本函数如常见的一次函数、二次函数、反比例函数、幂函数、指数函数和对数函数的图象和性质，掌握研究函数性质的一般方法以及应用函数的图象和性质解决问题的方法，能灵活运用函数与方程的思想方法解决问题. 本章重要知识点如下：

1. 集合和元素的关系：

$a \in$

如果 a 是集合 A 的元素，则 $a\in A$；

如果 a 不是集合 A 的元素，则 $a\notin A$.

2. 集合和集合的关系：

子集：若 A 是 B 的子集，则 $A\subseteq B$. 空集$\varnothing$是任何集合的子集.

3. 集合的运算：

全集和补集：设 S 是一个集合，A 是 S 的一个子集，由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中 A 的补集，记为 $C_S A=\{x|x\in S，x\notin A\}$，$S$ 称为全集.

交集和并集：$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$；$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

4. 四种命题：

原命题和逆否命题互为逆否命题，它们的真假一致；

逆命题和否命题互为逆否命题，它们的真假一致.

5. 充要条件：

如果 $p\Rightarrow q$ 且 $q\not\Rightarrow p$，则称 p 是 q 的充分不必要条件；

如果 $q\Rightarrow p$ 且 $p\not\Rightarrow q$，则称 p 是 q 的必要不充分条件；

如果 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，则称 p 是 q 的充要条件；

如果 $p\not\Rightarrow q$ 且 $q\not\Rightarrow p$，则称 p 是 q 的既不充分又不必要条件.

6. 函数的概念：

设 A，B 是两个集合，如果按照某种对应关系 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，称该对应为集合 A 到集合 B 的映射. 函数是非空数集 A 到 B 的映射.

7. 函数的单调性：

对属于定义域内某个区间的任意两个自变量 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$），称 $f(x)$ 在该区间上为增函数；

对属于定义域内某个区间的任意两个自变量 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$（或 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$），称 $f(x)$ 在该区间上为减函数.

8. 函数的奇偶性：

对函数 $f(x)$ 的定义域 D 内的任意 x 值，若满足 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若满足 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

9. 反函数：

（1）反函数的定义域为原函数的值域；

（2）函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于

直线 $y=x$ 对称.

10. 指数函数 $y=a^x$，当 $a>1$ 时在 $\mathbf{R}$ 上为增函数；当 $0<a<1$ 时在 $\mathbf{R}$ 上为减函数.

对数函数 $y=\log_a x$，当 $a>1$ 时在（0，$+\infty$）上为增函数；当 $0<a<1$ 时在（0，$+\infty$）上为减函数.

典型题解

一、选择题

1. 设集合 $U=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}\}$，$A\{(x,y)|2x-y+m>0\}$，$B=\{(x,y)|x+y-n\leqslant 0\}$，那么 $P(2,3)\in A\cap(C_UB)$ 的充要条件是（　　）.

A. $m>-1$，$n<5$　　B. $m<-1$，$n<5$

C. $m>-1$，$n>5$　　D. $m<-1$，$n>5$

[分析] $P(2,3)\in A\cap(C_UB)$ 的充要条件是 $P(2,3)\in A$ 且 $P(2,3)\in C_UB$，所以可将其转化成关于 m,n 的不等式.

[解答] $P(2,3)\in A\cap(C_UB)$，即 $P(2,3)\in A$ 且 $P(2,3)\in C_UB$.

又 $\because C_UB=\{(x,y)\ |x+y-n>0\}$，

$\therefore\begin{cases}4-3+m>0,\\2+3-n>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m>-1,\\n<5.\end{cases}$ 故选 A.

[说明] 高中数学中常见的集合一般有数集、点集和由几何图形组成的集合等，在学习集合这一部分内容时，应掌握集合的表示方法，分清楚集合中的元素是实数，还是点等，如本题中集合 U，A，B 是平面上的点的集合. 解决有关充要条件的问题时应考虑周全，注意是否有特例.

2. 定义集合 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$，若 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{2,3,5\}$，则 $A-B$ 的子集个数为（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

[解答] $\because A-B=\{1,7\}$，$\therefore A-B$ 的子集个数为 $2^2=4$ 个.故选 D.

[说明] 一般地，集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的子集个数为 2^n 个，非空子集的个数为 2^n-1 个，真子集个数为 2^n-1 个.

3. $a\in\mathbf{R}$，$|a|<3$ 成立的一个必要不充分条件是（　　）.

A. $a<3$　　B. $|a|<2$

C. $a^2<9$　　D. $0<a<2$

[分析] 必要不充分条件是指条件不能推出结论，而结论能推出条件. 若 $x\in P\Rightarrow x\in Q$，则称 P 是 Q 的充分条件；若 $x\in Q\Rightarrow x\in P$，则称 P 是 Q 的必要条件.

[解答] A 是必要不充分条件，B，D 为充分不必要条件，C 为充要条件. 故选 A.

[说明] (1) 判断充要条件必须分清哪一个是条件，哪一个是结论. 本题中备选答案是条件，而“$|a|<3$”为结论.

(2) 判断充要条件的常用方法有：定义法、集合法、逆否命题法等. 用集合法判断时，如果 $P\subseteq Q$，那么 $x\in P$ 是 $x\in Q$ 的充分条件，$x\in Q$ 是 $x\in P$ 的必要条件. 本例可类似判断.

4. 集合 $P=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$，$Q=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 2\}$，下面对应中，不能构成从 P 到 Q 的映射的对应法则 f 是（　　）.

A. $f:x\rightarrow y=\dfrac{1}{2}x$　　B. $f:x\rightarrow y=\dfrac{1}{3}x$

C. $f:x\rightarrow y=\dfrac{2}{3}x$　　D. $f:x\rightarrow y=\dfrac{1}{8}x$

[分析] f 能构成映射的条件是：对 P 中任何一个元素，按照对应法则 f，在 Q 中能找到唯一的对应元素.

[解答] 选 C.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & (x\leqslant 1),\\ 4-\sqrt{x-1} & (x>1),\end{cases}$ 则使得 $f(x)\geqslant 1$ 的自变量 x 的取值范围为（　　）.

A. $(-\infty,\ -2]\cup[0,\ 10]$　　B. $(-\infty,\ -2]\cup[0,\ 1]$

C. $(-\infty, -2] \cup [1, 10]$　　D. $[-2, 0] \cup [1, 10]$

[解答] 由题意有$\begin{cases} x\leqslant 1, \\ (x+1)^2\geqslant 1, \end{cases}$ 或$\begin{cases} x>1, \\ 4-\sqrt{x-1}\geqslant 1, \end{cases}$

解得 $x\leqslant -2$ 或 $0\leqslant x\leqslant 1$ 或 $1<x\leqslant 10$，即 $x\leqslant -2$ 或 $0\leqslant x\leqslant 10$. 选 A.

6. 函数 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$的单调性为（　　）.

A. 在 $(-1, +\infty)$ 内单调递增

B. 在 $(-1, +\infty)$ 内单调递减

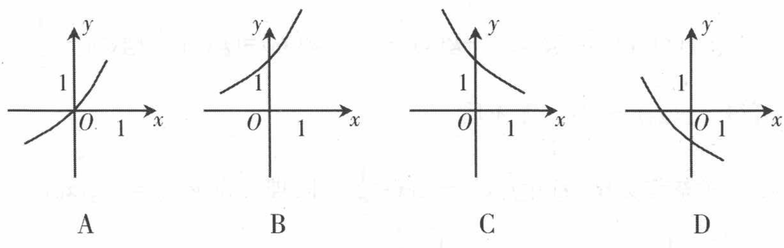
C. 在 $(1, +\infty)$ 内单调递增

D. 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减

[解答] 函数 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}=2+\dfrac{-1}{x-1}$的图象是由双曲线 $y=-\dfrac{1}{x}$向右平移一个单位、向上平移两个单位得到的. 选 C.

[说明] 探究形如 $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$型函数的图象、性质时，常通过“分离”将其变形为 $y=\dfrac{c}{a}+\dfrac{ad-bc}{ax+b}$的形式，再根据 $y=\dfrac{1}{x}$的图象、性质来研究.

7. 已知函数 $y=\log_2 x$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$，则函数 $y=f^{-1}(1-x)$ 的图象是（　　）.



（第 7 题）

[解答] $f^{-1}(x)=2^x$，$f^{-1}(1-x)=2^{1-x}=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. 选 C.

[说明] $y=f^{-1}(1-x)$ 并不是 $y=f(1-x)$ 的反函数，要正确加以区分.

8. 若定义在区间（$-1,0$）内的函数 $f(x)=\log_{2a}(x+1)$ 满足 $f(x)>0$，则 a 的取值范围是（　　）.

A. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　B. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$　C. $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　D. $(0,+\infty)$

[**分析**] 对数式 $\log_a b$ 的符号判定，应结合对数函数 $y=\log_a x$ 的图象来进行：

当 $a>1$，$b>1$ 或 $0<a<1$，$0<b<1$ 时，$\log_a b>0$；

当 $a>1$，$0<b<1$ 或 $0<a<1$，$b>1$ 时，$\log_a b<0$.

[**解答**] 当 $x\in(-1,0)$ 时，$x+1\in(0,1)$，而 $\log_2 a(x+1)>0$，所以 $2a\in(0,1)$，即 $a\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. 故选 A.

9. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数，且方程 $x-f[g(x)]=0$ 有实数解，则 $g[f(x)]$ 不可能是（　　）.

A. $x^2+x-\dfrac{1}{5}$　　　　B. $x^2+x+\dfrac{1}{5}$

C. $x^2-\dfrac{1}{5}$　　　　D. $x^2+\dfrac{1}{5}$

[**解答**] 设方程 $x-f[g(x)]=0$ 有实数解 x_0，则 $x_0=f[g(x_0)]$.

考察选项 A，若 $g[f(x)]=x^2+x-\dfrac{1}{5}$，将该式中 x 用 $g(x_0)$ 替代可得

$$g[f(g(x_0))]=[g(x_0)]^2+g(x_0)-\frac{1}{5},\therefore g(x_0)=[g(x_0)]^2+g(x_0)-\frac{1}{5},$$

可得 $[g(x_0)]^2=\dfrac{1}{5}$，无矛盾；

考察选项 B，若 $g[f(x)]=x^2+x+\dfrac{1}{5}$，同理可得 $g(x_0)=[g(x_0)]^2+g(x_0)+\dfrac{1}{5}$，故 $[g(x_0)]^2=-\dfrac{1}{5}$ 不可能；C，D 选项可用同样方法处理，无矛盾. 故选 B.

[**说明**] 本例所用方法是解答选择题的一种特殊方法：验证法. 本例还有其他解法.

二、填空题

1. 设 $M=\{x\,|\,x^2-2x-3=0\}$，$N=\{x\,|\,ax-1=0\}$，若 $M\cap N=N$，则所有满足条件的 a 的集合为__________.

[解答] $M=\{x\,|\,x=3$ 或 $x=-1\}$， 由 $M\cap N=N$ 得 $N\subseteq M$.

(1) 若 $N=\varnothing$，则 $a=0$；

(2) 若 $N\neq\varnothing$，则 $N=\{3\}$或 $N=\{-1\}$，$a=\dfrac{1}{3}$或-1.

所以，满足条件的 a 的集合为$\left\{0,\ \dfrac{1}{3},\ -1\right\}$.

[说明] (1) 题中若出现 $M\cup N=M$，$M\cap N=N$ 或 $N\subseteq M$ 的条件，应首先考虑 $N=\varnothing$这种特殊情况.

(2) 应注意下面这些都是 $N\subseteq M$ 的充要条件：①$M\cap N=N$；②$M\cup N=M$；③$M\cup(C_UN)=N$；④$N\cap(C_UM)=\varnothing$.

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,\ 1]$，函数 $g(x)=f(x+a)+f(x-a)\left(-\dfrac{1}{2}<a<0\right)$的定义域为__________.

[分析] 求 $g(x)$ 的定义域就是求使 $f(x+a)$ 和 $f(x-a)$ 同时有意义的 x 的取值范围，此时 $x+a$ 和 $x-a$ 都应落在区间 $[0,\ 1]$ 内.

[解答] 由题意有$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$

$\because -\dfrac{1}{2}<a<0$，$\therefore g(x)$的定义域为$\{x\,|\,-a\leqslant x\leqslant 1+a\}$.

3. 若函数 $y=\dfrac{ax-1}{\sqrt{ax^2+4ax+3}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围为__________.

[解答] 函数的定义域为 $\mathbf{R}$，可转化为 $ax^2+4ax+3>0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上恒成立.

(1) 当 $a=0$ 时符合条件；

(2) 当 $a>0$ 时，令 $\Delta=16a^2-12a<0$，得 $0<a<\dfrac{3}{4}$；

(3) 当 $a<0$ 时不符合题意.

综上所述，$0\leqslant a<\dfrac{3}{4}$.

4. 函数 $y=3^{x^2-1}$ $(-1\leqslant x<0)$ 的反函数是________________.

[**分析**] 求反函数一般由下列三个步骤完成：即求 x 关于 y 的解析式，然后交换 x，y，最后求原函数的值域，即为反函数的定义域.

[**解答**] 由 $y=3^{x^2-1}$ 得 $x^2-1=\log_3 y$，即 $x^2=\log_3 y+1$.

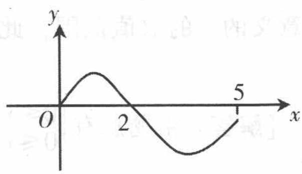
由 $-1\leqslant x<0$ 得 $x=-\sqrt{1+\log_3 y}$.

$\because x^2-1\in(-1,\ 0]$，$\therefore y=3^{x^2-1}\in\left(\dfrac{1}{3},\ 1\right]$.

$\therefore y=3^{x^2-1}$ 的反函数为 $y=-\sqrt{1+\log_3 x}$ $\left(\dfrac{1}{3}<x\leqslant 1\right)$.

[**说明**] 解决有关反函数的问题，应特别注意以下几方面：反函数存在的条件是有且只有唯一的 x 与 y 对应，反函数的定义域是原函数的值域，反函数与原函数的图象关于直线对称.

5. 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5,\ 5]$. 若当 $x\in[0,\ 5]$ 时，$f(x)$ 的图象如图所示，则不等式 $xf(x)<0$ 的解集是________.



(第 5 题)

[**解答**] 由题意有 $\begin{cases}x>0,\\ f(x)<0,\end{cases}$

或 $\begin{cases}x<0,\\ f(x)>0,\end{cases}$

$\therefore$ 解集为 $[-5,\ -2)\cup(0,\ 2)$.

6. 已知函数 $y=f(x)$ 是奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=3^x-1$. 设 $f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$，则 $g(-8)=$________.

[**解答**] 当 $x<0$ 时，$f(x)=-f(-x)=-(3^{-x}-1)=1-3^{-x}$.

设 $g(-8)=t$，则 $f(t)=-8$，

$\therefore \begin{cases} t\geqslant 0, \\ 3^t-1=-8, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} t<0, \\ 1-3^{-t}=-8, \end{cases}$ 解得 $t=-2$.

7. 已知函数 $f(x)=\log_3 \dfrac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[0,2]$，则 $m=$________，$n=$________.

［解答］由题意 $y=\dfrac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$ 的值域为 $[1,9]$，即 $(y-m)x^2-8x+(y-n)=0$.

令 $\Delta=64-4(y-n)(y-m)\geqslant 0$，所以 $y^2-(m+n)y+mn-16\leqslant 0$ 的解为 $[1,9]$.

$\therefore m+n=10$，$mn-16=9$，即 $m=5$，$n=5$.

［说明］求形如 $y=\dfrac{dx^2+ex+f}{ax^2+bx+c}$ 的函数的值域，常用判别式法求解. 若 x 的取值范围有限制，可用导数法求解.

8. 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，且 $f(x)$ 的图象过点 $A(0,3)$ 和 $B(3,-1)$，则不等式 $|f(x+1)-1|<2$ 的解集为________________.

［解答］由题意有 $f(0)=3$，$f(3)=-1$. $\because |f(x+1)-1|<2$，即 $-1<f(x+1)<3$，$f(3)<f(x+1)<f(0)$，$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，$\therefore 0<x+1<3$，

故解集为 $\{x|-1<x<2\}$.

［说明］解有关抽象函数的不等式，一般先将不等式转化为 $f(x_1)<f(x_2)$ 的形式，然后根据 $f(x)$ 的单调性求解. 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则 $x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$；若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，则 $x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

9. 已知函数 $f(x)=\log_a(ax^2-x)$ 在区间 $[2,4]$ 上单调递增，则 a 的取值范围为________.

［分析］应综合考虑函数 $t=ax^2-x$ 在区间 $[2,4]$ 上大于 0 和复合函数的增减性法则.

［解答］当 $a>1$ 时，$y=\log_a t$ 为增函数，故 $t=ax^2-x$ 在区间 $[2,4]$ 上也为增函数，

且大于 0，$\therefore\begin{cases}a\cdot 2^2-2>0,\\ \dfrac{1}{2a}\leqslant 2.\end{cases}$ 注意到 $a>1$，$\therefore a>1$.

当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a t$ 为减函数，故 $t=ax^2-x$ 在区间 [2，4] 上也为减函数，

且大于 0，$\therefore\begin{cases}a\cdot 4^2-4>0,\\ \dfrac{1}{2a}\geqslant 4.\end{cases}$ 无解.

综上所述，$a>1$.

三、解答题

1. 求下列函数的值域：

（1）$y=\dfrac{3x}{x^2+4}$；（2）$y=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$；（3）$y=2x+\sqrt{1-2x}$；

（4）$y=\dfrac{3x}{x^2+4}$（$x>0$）.

[解答]（1）由 $y=\dfrac{3x}{x^2+4}$ 可得 $yx^2-3x+4y=0$.

当 $y=0$ 时，$x=0$；

当 $y\neq 0$ 时，由 $\Delta\geqslant 0$ 可得 $-\dfrac{3}{4}\leqslant y<0$ 或 $0<y\leqslant\dfrac{3}{4}$.

$\therefore$ 原函数的值域为 $\left[-\dfrac{3}{4}，\dfrac{3}{4}\right]$.

（2）由 $y=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$ 得 $2^x=\dfrac{1-y}{y+1}$. $\because 2^x>0$. $\therefore\dfrac{1-y}{1+y}>0$，$-1<y<1$.

$\therefore$ 原函数的值域为 $(-1，1)$.

（3）设 $t=\sqrt{1-2x}$（$t\geqslant 0$），则 $x=\dfrac{1-t^2}{2}$.

$\therefore y=1-t^2+t=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$，

即 $y\leqslant\dfrac{5}{4}$. $\therefore$ 原函数的值域为 $\left(-\infty，\dfrac{5}{4}\right)$.

(4) $y=\frac{3x}{x^2+4}=\frac{3}{x+\frac{4}{x}}$. $\because x+\frac{4}{x}\geqslant 4$，$\therefore$ 原函数的值域为 $\left[0,\ \frac{3}{4}\right]$.

［说明］(1) 形如 $y=ax+b+\sqrt{cx+d}$ 的函数求值域，一般都设 $t=\sqrt{cx+d}$，再转化为二次函数在某个区间上的值域问题.

(2) 形如 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的函数求值域时，一般都采用反函数法，也可以"分离"分子中的 x，再求值域. 例如第二小题可这样解答：$y=\frac{1-2^x}{1+2^x}=\frac{2}{1+2^x}-1$，$\because 1+2^x\in(1,\ +\infty)$，$\therefore \frac{2}{1+2^x}\in(0,\ 2)$，即 $y\in(-1,\ 1)$.

(3) 形如 $y=\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$（分子分母至少有一个为二次型的都适用）的函数求值域时，常用判别式法.

(4) 分式型的函数，若 x 的取值范围有所限制，常用基本不等式求值域，也可利用导数求值域.

2. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$；　(2) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x-1}$；

(3) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$；　(4) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+ax)$.

［解答］(1) 原函数的定义域为 $\{x\mid -1\leqslant x<1\}$，不关于原点对称，所以 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(2) 原函数的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$，$f(x)=\frac{2^x+1}{2(2^x-1)}$，$f(-x)=\frac{2^{-x}+1}{2(2^{-x}-1)}=\frac{1+2^x}{2(1-2^x)}$，满足 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数.

(3) 定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)+f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=0$，所以 $f(x)$ 是奇函数.

(4) 若 $f(x)$ 是奇函数，必有 $\ln(\sqrt{x^2+1}+ax)+\ln(\sqrt{x^2+1}-ax)=0$ 恒成立，即 $x^2+1-a^2x^2=1$ 恒成立，$\therefore a=\pm 1$.