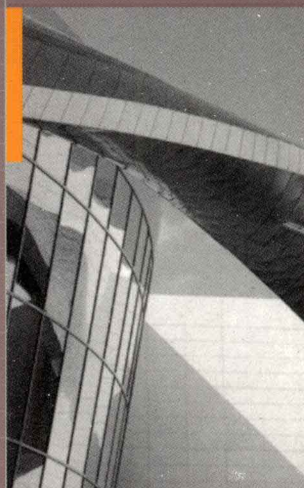
全国教育科学"十一五"规划课题研究成果

大学数学系列教材

微积分

（经管类）（下册）

■ 主　编　徐延安　张　彤
■ 副主编　刘　伟　章月红
陶银罗　胡素芬



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

大学数学系列教材

微　积　分

Weijifen

（经管类）

（下册）

主　编　徐延安　张　彤

副主编　刘　伟　章月红　陶银罗　胡素芬

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书是全国教育科学“十一五”规划课题研究成果之一，是按照教育部关于独立学院培养“本科应用型高级专门人才”的指示精神，面向独立学院经济管理类专业而编写的微积分课程教材。

全书共十一章，分上、下两册。本书是下册，主要包括二元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程、差分方程、MATLAB与微积分等内容。每章后附有数学文化或数学建模的内容，书末附有习题答案与提示。

本书可作为独立学院经济、管理类专业微积分课程教材，也可作为其他本科院校或相关专业微积分课程的选用教材。

图书在版编目（CIP）数据

微积分：经管类. 下册/徐延安，张彤主编. —北京：高等教育出版社，2011.9

ISBN 978－7－04－033537－8

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①徐…②张… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材

Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第155763号

策划编辑 杨 波　责任编辑 杨 波　封面设计 赵 阳　版式设计 马敬茹

插图绘制 黄建英　责任校对 杨凤玲　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400－810－0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	三河市春园印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787 mm × 960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	11.25	版　　次	2011年9月第1版
字　　数	200千字	印　　次	2011年9月第1次印刷
购书热线	010－58581118	定　　价	17.10元

物 料 号　33537－00

目　　录

第六章
二元函数微分学

上册各章涉及的函数都是一元函数．一元函数描述的是两个变量之间的关系，即因变量的取值依赖于自变量的取值，而自变量只有一个．

实际问题中，常遇到两个或两个以上自变量的函数，即因变量的取值依赖于两个或两个以上自变量的取值．例如，商品的需求量不仅依赖于价格的高低，也依赖于当地消费者收入的多少；一个时间段某城市的人口数依赖于出生数、死亡数、流动人口数等．这些影响因素相互独立．因此，需要研究多于一个自变量的函数，称为多元函数．本章将在一元函数微分学的基础上，研究二元函数的微分学．主要介绍二元函数的极限、连续、偏导数、全微分、极值、最值等内容．

由二元函数所得出的结论很容易推广到三元以及三元以上的多元函数．

6.1 空间解析几何简介

空间解析几何的产生是数学史上一个划时代的成就．它通过有序数组(即坐标)和点的一一对应，把数学研究的两个基本对象“数”和“形”统一起来，使得人们既可以用代数方法研究解决几何问题(这是解析几何的基本内容)，也可以用几何方法解决代数问题．本节我们仅简单介绍空间解析几何的一些基本概念，包括空间直角坐标系、空间两点间的距离、空间曲面及其方程等概念．这些内容对我们学习多元函数的微分学和积分学将起到重要的作用．

▷▷ 6.1.1 空间直角坐标系

为了确定平面上任意一点的位置，我们建立了平面直角坐标系，把平面上的点与有序数组(即点的坐标(x,y))对应起来. 现在，为了把空间的任意一点与有序数组对应起来，我们来建立空间直角坐标系.

过空间一定点O，作三条相互垂直的数轴，依次记为x轴(横轴)，y轴(纵轴)，z轴(竖轴)，统称为坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系$Oxyz$(如图6-1-1). 空间直角坐标系有右手系和左手系两种. 右手系即将右手伸直，拇指朝上为z轴的正方向，其余四指的指向为x轴的正方向，四指弯曲$90°$后的指向为y轴的正方向. 我们通常采用右手系，如图6-1-1.

在图6-1-1中，点O称为坐标原点，每两条坐标轴确定一个平面，称为坐标平面. 由x轴，y轴确定的平面称为xy平面，由y轴，z轴确定的平面称为yz平面，由x轴，z轴确定的平面称为xz平面. 通常，将xy平面配置在水平面上. 三个坐标平面将空间分成8个部分，称为8个卦限.

对于空间中任意一点M，过该点作三个平面，分别垂直于x轴，y轴，z轴，且与这三个轴分别交于P，Q，R三点，如图6-1-2. 设$OP=x$，$OQ=y$，$OR=z$，则点M唯一确定了一个三元有序数组(x,y,z). 而对任意一个三元有序数组(x,y,z)，在x轴，y轴，z轴上取点P，Q，R，使$OP=x$，$OQ=y$，$OR=z$，然后过P，Q，R三点分别作垂直于x轴、y轴、z轴的平面，这三个平面相交于一点M，则由一个三元有序数组(x,y,z)唯一地确定了空间的一个点M.

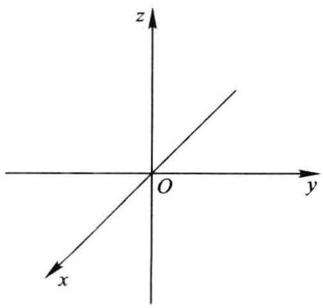


图6-1-1

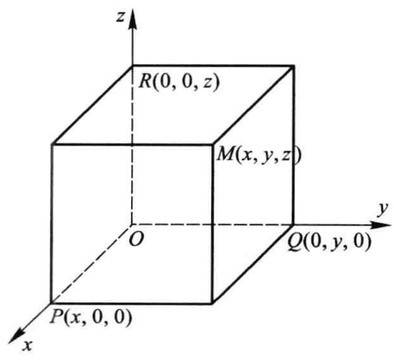


图6-1-2

于是，空间的任意一点M与一个三元有序数组(x,y,z)建立了一一对应关系. 我们称这个三元有序数组为点M的坐标，记为$M(x,y,z)$. 如坐标原点的坐标为$(0,0,0)$，x轴上点的坐标为$(x,0,0)$，y轴上点的坐标为$(0,y,0)$，z轴上点的坐标为$(0,0,z)$.

▷▷ 6.1.2 空间两点间的距离

给定空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，过 M_1，M_2 各作三个平面分别垂直于三个坐标轴. 这六个平面构成了一个以线段 M_1M_2 为一条对角线的长方体，如图 6-1-3.

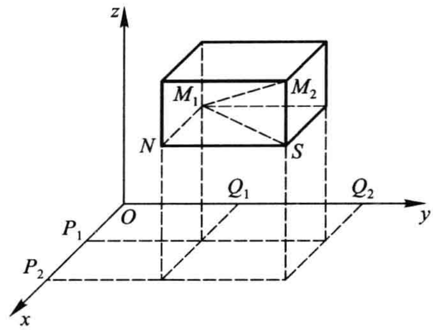


图 6-1-3

由图可知：

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2&=|M_1S|^2+|SM_2|^2\\&=|M_1N|^2+|NS|^2+|SM_2|^2\\&=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2+\\&\quad|z_2-z_1|^2.\end{aligned}$$

于是求得空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$之间的距离公式为

$$\boxed{|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.}$$

特别地，若两点分别为坐标原点$(0,0,0)$和 $M(x,y,z)$，则 $|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 若点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$均位于 xy 平面上，即 $z_1=z_2=0$，则得 xy 平面上任意两点 $M_1(x_1,y_1,0)$与 $M_2(x_2,y_2,0)$间的距离公式

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

例 1 设 P 在 x 轴上，它到点 $P_1(0,\sqrt{2},3)$的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$的距离的两倍，求点 P 的坐标.

解 设 P 点坐标为$(x,0,0)$，

$$|PP_1|=\sqrt{x^2+(\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{x^2+11},$$

$$|PP_2|=\sqrt{x^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{x^2+2},$$

因为$|PP_1|=2|PP_2|$，所以$\sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2}$. 解得 $x=\pm1$，P 点坐标为$(1,0,0)$或$(-1,0,0)$.

▷▷ 6.1.3 空间曲面及其方程

与平面解析几何中建立曲线与方程的对应关系一样，可以建立空间曲面与包含三个变量的方程 $F(x,y,z)=0$ 的对应关系.

定义 6.1.1 在空间直角坐标系中，如果曲面 S 上任意一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$，而不在曲面 S 上的任何点的坐标都不满足该方程，则方程 $F(x,y,z)=0$ 称为曲面 S 的方程. 而曲面 S 就称为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形. 如图 6-1-4.

下面给出常见的空间曲面.

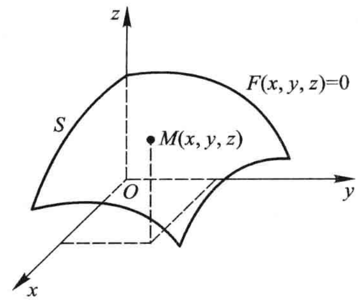


图 6-1-4

例 2　平面是空间中最简单而且最重要的曲面. 平面的一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

其中 A，B，C 是不全为零的常数.

特别地，xy 平面的方程为 $z=0$，yz 平面的方程为 $x=0$，xz 平面的方程为 $y=0$.

例 3　已知 $A(1,2,3)$，$B(2,-1,4)$，求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解　设 $M(x,y,z)$是所求平面上任一点，根据题意，有$|MA|=|MB|$，

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2},$$

化简得 $2x-6y+2z-7=0$.

例 4　求球心在原点，半径为 R 的球面方程.

解　设 $M(x,y,z)$是所求球面上任一点，根据题意，有 $|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=R$，因此，球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$为球面的上半部，如图 6-1-5.

$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$为球面的下半部，如图 6-1-6.

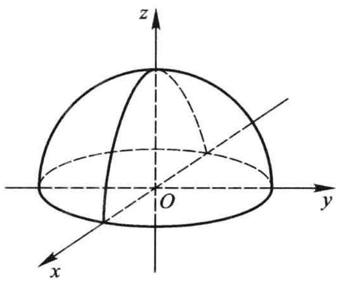


图 6-1-5

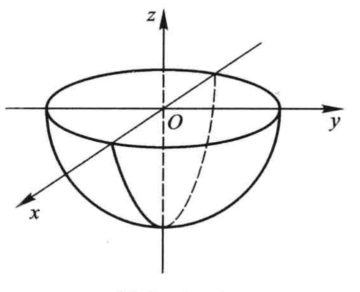


图 6-1-6

例 3，例 4 均是已知曲面上的点所满足的几何条件(即已知点的轨迹)，建立曲面的方程. 另一类问题是已知曲面方程，研究曲面的几何形状.

例 5　求由方程 $x^2+y^2=a^2$ 确定的曲面.

解　方程 $x^2+y^2=a^2$ 在 xy 平面上表示以原点为圆心，半径为 a 的圆. 由于方程不含 z，意味着 z 可取任何值，只要 x，y 满足 $x^2+y^2=a^2$ 就可. 将 xy 平面上的圆沿垂直于 z 轴的方向，上下移动而形成的圆柱面即是所求的曲面. 如图 6-1-7.

例 6　求由方程 $z=x^2+y^2$ 确定的曲面.

解 用平面 $z=a$ 截曲面 $z=x^2+y^2$，其截痕方程为

$$x^2+y^2=a,\ z=a.$$

当 $a=0$ 时，只有点 $(0,0,0)$ 满足方程.

当 $a>0$ 时，截痕为在平面 $z=a$ 上的一个圆，其中圆心为 $(0,0,a)$，半径为 $\sqrt{a}$. 当平面 $z=a$ 向上移动时，截痕的圆也越来越大.

当 $a<0$ 时，平面与曲面无交点.

于是，我们描绘出由方程 $z=x^2+y^2$ 确定的曲面为图 6-1-8. 该曲面称为旋转抛物面. 如果用平面 $x=x_0$ 或 $y=y_0$ 去截该曲面，则截痕均为抛物线.

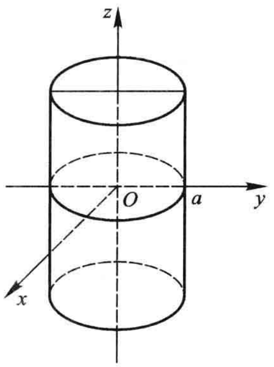


图 6-1-7

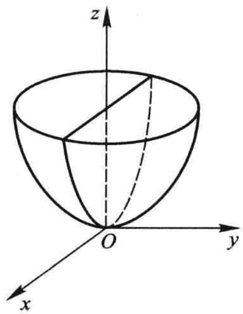


图 6-1-8

6.2 二元函数的概念及其连续性

6.2.1 邻域和区域

点 $P_0(x_0,y_0)$ 的δ邻域：平面上到点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离小于 $\delta(\delta>0)$ 的所有点 $P(x,y)$ 的集合，称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域，记作 $U_\delta(P_0)$. 即

$$U_\delta(P_0)=\{P\,|\,|PP_0|<\delta\}=\{(x,y)\,|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

如图 6-2-1.

点 $P_0(x_0,y_0)$ 的去心 δ 邻域：把点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域去掉中心 P_0 所得的点集，记作 $U_\delta^0(P_0)$. 即

$$U_\delta^0(P_0)=\{P\,|\,0<|PP_0|<\delta\}=\{(x,y)\,|\,0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

如图 6-2-2.

设 E 为一平面点集，P 为平面上的一点，点 P 与点集 E 的关系主要有以

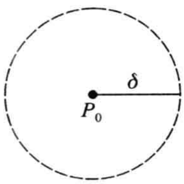


图 6-2-1

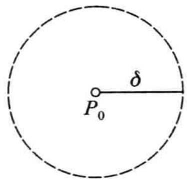


图 6-2-2

下几种：若存在 P 的一个邻域 $U_\delta(P)\subseteq E$，则称 P 为 E 的内点．若存在 P 的一个邻域 $U_\delta(P)\not\subset E$，则称 P 为 E 的外点．若点 P 的任何一个邻域，既有属于点集 E 的点，也有不属于点集 E 的点，则称 P 为 E 的边界点．例如，设点集 $E=\{(x,y)\mid\sqrt{x^2+y^2}<1\}$，则 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$是它的内点，$(2,0)$是它的外点，$(1,0)$是它的边界点．

如果平面点集 E 中的每个点都是内点，则称 E 为开集．如果开集 E 中的任何两点都可用 E 中的折线连接起来，则称 E 为开区域．$U_\delta(P_0)$，$U_\delta^0(P_0)$都是开区域．开区域加上其边界称为闭区域．如 $\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\leqslant\delta\}$就是一个闭区域．

▷▷ 6.2.2 二元函数的定义

定义 6.2.1 设 D 是平面上的一个非空点集，如果对于 D 内的任一点 (x,y)，按照某种法则 f，都有唯一确定的实数 z 与之对应，则称 f 是 D 上的**二元函数**，它在(x,y)处的函数值记为 $f(x,y)$，即 $z=f(x,y)$，其中 x，y 称为自变量，z 称为因变量．点集 D 称为该函数的定义域，数集$\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$称为该函数的值域．

类似地，可定义三元及三元以上的函数．二元及二元以上的函数统称为多元函数．

与一元函数类似，讨论二元函数的自然定义域时，只要求出使二元函数的表达式有意义的点集 D 即可．在讨论实际问题中涉及的二元函数时，其定义域由问题的实际意义确定．

例 1 求下列函数的定义域．

(1) $z=\ln x+\tan y$． (2) $z=\ln(1-x^2-y^2)$．

解 (1) $\begin{cases}x>0,\\ y\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z}),\end{cases}$所以函数定义域为

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x>0,\ y\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})\right\}.$$

(2) $1-x^2-y^2>0$，即 $x^2+y^2<1$，所以函数的定义域为平面上以坐标原点为中心、半径为 1 的圆的内部，即

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}.$$

下面讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 的几何意义.

一元函数 $y=f(x)$ 的几何意义是平面直角坐标系中的曲线. 具体做法是：满足函数 $y=f(x)$ 的二元有序数组 (x,y) 与平面直角坐标系上的点 (x,y) 一一对应. 我们自然要问：二元函数 $z=f(x,y)$ 的几何意义是什么？即希望满足 $z=f(x,y)$ 的三元有序数组 (x,y,z) 与三维直角坐标系（即空间直角坐标系）上的点 (x,y,z) 一一对应. 因此我们要利用空间直角坐标系.

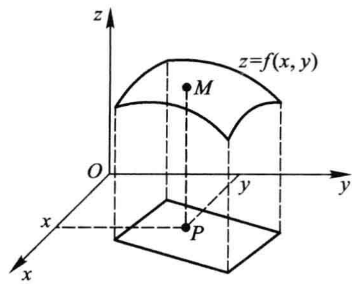


图 6-2-3

设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，对于 D 中的每个点 $P(x,y)$，有唯一的实数 $z=f(x,y)$ 与之对应. 三元有序数组 $(x,y,f(x,y))$ 就确定了空间直角坐标系上的点 $M(x,y,f(x,y))$. 称空间这样的点的全体所组成的集合 M 为二元函数 $z=f(x,y)$（定义域为 D）的图形，它一般是空间中的曲面，如图 6-2-3.

▷▷ 6.2.3 二元函数的极限

二元函数 $z=f(x,y)$ 的极限研究的是平面上的点 (x,y) 在某一变化趋势下，对应的函数值 $z=f(x,y)$ 的变化趋势. 这是将一元函数微分法推广到多元函数微分法的基础.

定义 6.2.2 已知函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域内有定义，A 为一个常数. 当该邻域内的点 $P(x,y)$ 在平面 xy 内以任意方式无限接近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于常数 A，则称常数 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的**极限**. 记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A,$$

$$\text{或}\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,$$

$$\text{或}\ f(x,y)\to A\ ((x,y)\to(x_0,y_0)).$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A\quad \text{或}\quad f(P)\to A\ (P\to P_0).$$

注 ① 本定义是二元函数极限的直观性定义，并没有给出求二元函数极限的方法.

② 本定义的关键之处在于：点 $P(x,y)$ 在平面 xy 内以任意方式无限接近于点 $P_0(x_0,y_0)$. 例如，动点 $P(x,y)$ 可以以直线的方式无限接近于点 P_0，也可以以曲线的方式无限接近于点 P_0. 但不论哪种形式，均有函数值 $f(x,y)$ 无限接近于常数 A. 因此本定义的主要用途之一是来验证二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 极限不存在.

例 2 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y}$.

解 方法一 利用四则运算和两个重要极限，可得

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{y}=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\left(\frac{\sin xy}{xy}\cdot x\right)=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}x=1\cdot 2=2.$$

方法二 利用无穷小的等价关系代换，可得

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{y}=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{xy}{y}=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}x=2.$$

例 3 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解 利用无穷小与有界变量之乘积仍为无穷小，可知：极限值为 0.

例 4 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2}}=0.$

例 5 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

解 当 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 无限接近点 $(0,0)$ 时，原极限如果存在，则其值为

$$\lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}.$$

显然，当 k 取不同值时，上式的值不同. 说明了当点 $P(x,y)$ 沿不同方式无限接近于点 $(0,0)$ 时，函数值 $f(x,y)$ 不能无限接近一个确定的常数. 故原极限不存在.

▷▷ 6.2.4 二元函数的连续性

定义 6.2.3 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义，若

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的每个点都连续，则称函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内连续，或称 $z=f(x,y)$ 是区域 D 内的二元连续函数. 那么，哪些二元函数是连续的呢?

一、由两个独立变量(可设为 x,y)的基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算所构成的可用一个式子来表示的二元函数，称作二元初等函数. 例如 $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{1+x^2}+\sqrt{y}$，$e^{x+\cos y}$ 等都是二元初等函数. 结论：二元初等函数在其有定义的区域内是连续的.

二、二元连续函数的和、差、积、商(分母不为 0)仍是连续函数.

三、二元连续函数的复合函数仍是连续函数.

特别地，在有界闭区域(该闭区域能包含在原点的某个邻域里)上连续的二元函数也有类似于一元函数在闭区间上的所满足的定理. 下面我们不加证明给出这些定理.

定理 6.2.1(最大值和最小值定理) 在有界闭区域 D 上的二元连续函数，在 D 上至少取得它的最大值和最小值各一次.

定理 6.2.2(有界性定理) 在有界闭区域 D 上的二元连续函数在 D 上一定有界.

定理 6.2.3(介值定理) 在有界闭区域 D 上的二元连续函数，若在 D 上取得两个不同的函数值，则它在 D 上取得介于这两值之间的任何值至少一次.

由上面的定理，如果我们知道，若 $z=f(x,y)$ 是初等函数，而 (x_0,y_0) 是其定义域内的一个点，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

例 6 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\dfrac{e^x+y}{x+y}$.

解 令 $z=\dfrac{e^x+y}{x+y}$，它是初等函数，$(0,1)$ 是其定义区域内的一个点，因此

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\frac{e^x+y}{x+y}=\frac{e^0+1}{0+1}=2.$$

例 7 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}&=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{xy}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}\\&=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}\\&=\frac{1}{\sqrt{0\times 0+1}+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

习题 6.2

1. 求下列函数的定义域.

(1) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}+\sqrt{y-x}$. (2) $f(x,y)=\arcsin x+\arccos y$.

(3) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

2. 证明$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x+y}{y}$不存在.

3. 求$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

4. 求$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\left[\ln(y-x)+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right]$.

5. 求$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+y}}{x-y}$.

6.3 偏导数

对于一元函数 $y=f(x)$，导数 $f'(x)$表示的是 y 相对于自变量 x 的变化率，即：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. 对于二元函数 $z=f(x,y)$，我们自然要讨论 z 相对于自变量 x，y 的变化率. 在某点(x_0,y_0)附近，x，y 的变化有无穷多种. 我们选择其中两种：1. 固定 $y=y_0$，变量 x 沿平行于 x 轴方向趋向于 x_0. 2. 固定 $x=x_0$，变量 y 沿平行于 y 轴方向趋向于 y_0.

6.3.1 二元函数的一阶偏导数

定义 6.3.1 设函数 $z=f(x,y)$在 $P_0(x_0,y_0)$的某邻域内有定义，固定 $y=y_0$，若

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$**关于 x 的偏导数**，记作 $f'_x(x_0,y_0)$，$z'_x(x_0,y_0)$或$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$.

类似地，若固定 $x=x_0$，极限$\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$存在，则称此极限值为 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$**关于 y 的偏导数**，记作 $f'_y(x_0,y_0)$，$z'_y(x_0,

$y_0)$或$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$.

偏导数定义可推广到三元及三元以上的函数的偏导数.

例 1 设 $z=f(x,y)=x^2y+y^2$，求 $f'_x(1,2)$，$f'_y(1,2)$.

解 $f'_x(1,2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x,2)-f(1,2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2(1+\Delta x)^2-2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}2(2+\Delta x)=4$.

$$f'_y(1,2)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,2+\Delta y)-f(1,2)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1\cdot(2+\Delta y)+(2+\Delta y)^2-6}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{5\Delta y+\Delta y^2}{\Delta y}=5.$$

例 2 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 求 $f(x,y)$在原点处的两个偏导数.

解 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$.

由于 x，y 的位置是对称的，故 $f'_y(0,0)=0$.

定义 6.3.2 若二元函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内的每一点(x,y)处对 x 的偏导数 $f'_x(x,y)$都存在，则称 $z=f(x,y)$在区域 D 内对 x 的偏导数 $f'_x(x,y)$存在. 此时，对于 D 内的每一点(x,y)，都有唯一的偏导数 $f'_x(x,y)$与之对应，因而 $f'_x(x,y)$是定义在 D 上的一个新的二元函数，称为 $z=f(x,y)$在区域 D 内对 x 的偏导函数，简称为**偏导数**，记作 $f'_x(x,y)$，$z'_x(x,y)$或$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial x}$. 类似地，可以定义二元函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内对 y 的偏导数，记作 $f'_y(x,y)$，$z'_y(x,y)$或$\frac{\partial f}{\partial y}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

显然，函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$关于 x，y 的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$，就是偏导函数 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$在点(x_0,y_0)处的函数值. 如上面的例 1，

$$f'_x(1,2)=f'_x(x,y)\big|_{(1,2)}=2xy\big|_{(1,2)}=4,$$
$$f'_y(1,2)=f'_y(x,y)\big|_{(1,2)}=(x^2+2y)\big|_{(1,2)}=5.$$

关于二元函数的偏导数，补充以下几点：

(1) $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$是一个整体，不能看成商. 而一元函数 $y=f(x)$的导数 $f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$可以看成商.