高等学校少学时数学教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

张双德　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等学校少学时数学教材

高等数学

张双德 主编

天津大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 /张双德主编．—天津：天津大学出版社，2005.8

ISBN 7-5618-2186-7

Ⅰ．高．．．　Ⅱ．张．．．　Ⅲ．高等学校　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 091101 号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨欢
地　　址　天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
网　　址　www.tjup.com
电　　话　发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷　天津市宝坻区第二印刷厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　185mm × 260mm
印　　张　22
字　　数　546 千
版　　次　2005 年 8 月第 1 版
印　　次　2005 年 8 月第 1 次
印　　数　1 – 4 000
定　　价　29.00 元

本书编撰人员：

主　编：张双德

副主编：张学良 张喜红

参编人员：(以姓氏笔画为序)

张学良 张喜红 张双德 岳　华

武　佳 周景萍 郝　海

前　言

随着现代科学技术和信息技术的迅速发展，各门科学和技术都朝着定量化的趋势发展，由此对数学的要求越来越高．高等数学已经不仅是大学理、工，而且也成为经济、农、林、医等几乎所有学科的重要基础课．尤其近年来，作为素质教育的一项重要改革，高等数学也在文科各专业普遍开设．高等数学不再是单纯为其他专业课程提供数学工具，更是成为培养和提高大学生科学与数学素质的重要课程．

有些专业对数学的要求相对较低，开设的高等数学课时较少．如临床医学，预防医学，医学检验，药学，轻工技术，农、林工程，食品科学等．如何选择和讲授这些少学时的高等数学，恰是目前高等数学课程教学改革与实践的一项重要课题．正基于此，为适应高等学校数学教育和教学的改革，针对少学时高等数学课程的教学，在多年从事这些专业高等数学教学实践的基础上，我们编写了这本教材．

在教学实践中，我们体会到作为少学时的高等数学教材应该力求突出以下思想和特点．

1. 在内容选取上，主要以一元函数微积分为主．包括极限与连续，导数与微分，中值定理与导数应用，不定积分，定积分及其应用等；多元函数微积分主要以二元函数为主，介绍二元函数的极限与连续，二元函数微分法，二元函数的极值，二重积分等；此外，还选取了微分方程和无穷级数两部分内容．微分方程主要介绍一阶线性微分方程，可降阶的高阶微分方程，二阶常系数线性微分方程等；无穷级数主要介绍无穷级数的概念和基本性质，数项级数的收敛判别法，幂级数和函数的幂级数展开等．这些内容构成了高等数学最基本、最重要的基础，体现了近代数学的思想精髓．

2. 在内容处理上，加强数学基础的教学．数学课程是学生学习和掌握数学工具的主要形式，是培养学生理性思维的重要载体．因此，加强数学基础内容的教学是第一位的．本书强化了在数学基础理论部分的论述，并且对于一些重要的定理和性质给出了较为严谨的证明．因为许多定理的证明本身就包含了丰富的数学思想和数学方法．尽管如此，但本书并不过分追求严谨的数学形式，许多问题的处理采用了逻辑推导、几何解释和举例说明并用的方式，这样更有助于学生对数学知识的学习和理解．

3. 加强理论联系实际，突出数学模型的教学．高等数学的教育功能之一应当具有培养学生数学意识和应用数学知识解决实际问题的能力．正是基于这种认识，在内容组织中我们尽量展现数学应用的思想和建立实际问题数学模型的方法．建立实际问题的数学模型并非一定需要大量的数学知识，利用基本的微积分知识也可以建立多种问题的数学模型，并可获得很好的结果，微积分产生的本身就是数学建模的一个最好案例．因此，在主要章节后面，精选了许多来自生命科学及经济管理等方面的问题，结合相应课程的内容，用尽可能浅显的方法来建立它们的数学模型．通过这些数学模型的教学，使学生既可从中窥视到数学应用于生命科学与经济的可能，又可培养他们建立简单数学模型的基本思想和方法，应该说这是学习数学更本质的方面．

4. 加强数学与人文知识的联系．数学是人类文化的重要组成部分，如果只注重纯数

学知识的阐述，易使学生产生数学难学和枯燥的感觉，这既不利于学生综合素质的培养，又不利于调动学生的学习兴趣．为此，在教材中我们有意识地嵌入了多篇数学史料和专题作为阅读内容．这既可拓展学生的视野又可激发学生的兴趣，使学生在阅读这些材料的同时去体验数学文化的魅力，增强了教材的可读性．

除此之外，为了便于学习和理解所学的内容，在每节前我们给出了该节的学习要点和要求，每节后组织了思考题和习题，以章为单元给出了小结和复习题．这种设计将有助于学生对知识的学习和把握．

本书在编写过程中得到了学校教务处和基础部的大力支持，郝海和武佳两位老师做了大量工作，该书的大部分内容由武佳同志录入．同时也得到了新疆医科大学，长治医学院和武警呼和浩特指挥学校同仁的支持和帮助，在此一并向他们表示由衷的感谢．写作中我们参考了大量的有关著述和文献，也一并向这些作者表示真诚的谢意．这里我们要特别感谢天津大学出版社的鼎立相助．

面向21世纪的高等数学课程建设和教学改革，应该是多模式、多层次、多视角、多品种的，我们所做的工作仅是一种初步尝试．由于水平有限，加之时间仓促，不合理，不恰当甚或错误之处在所难免，恳请专家、同行和所有读者批评指正．

编　者

目　录

第 1 章 函数、极限与连续

函数和极限是高等数学中最基本的概念和方法．微积分中几乎所有的概念都离不开极限，极限理论构筑了高等数学的理论基础．连续函数是重要的一类函数，微积分学的主要研究对象就是连续函数．本章将对函数、函数极限、函数的连续性等概念给出严格的数学定义，并对其主要的性质和运算法则作系统的介绍．

1.0 实数概述

微积分是在实数范围内研究函数的，为此，我们在讨论函数之前，先对实数的概念和性质略加叙述．

1.0.1 数的扩充

人类在认识自然和改造自然的实践中，对数的认识是从自然数开始的，自然数从 1 算起，全体自然数组成的集合称为**自然数集**，记为$\mathbf{N}$．在自然数集$\mathbf{N}$中，关于数的加法和乘法运算是封闭的，但对减法运算不封闭．为使减法运算封闭，人们引进了数 0 与负整数，从而自然数集$\mathbf{N}$扩充为**整数集**$\mathbf{Z}$．在整数集$\mathbf{Z}$中，关于数的加法、减法和乘法运算是封闭的，但对除法运算不封闭．为使除法运算封闭，必须引入分数，从而整数集$\mathbf{Z}$被扩充为**有理数集**$\mathbf{Q}$，这里

$$\mathbf{Q}=\{p/q \mid p,q\in \mathbf{Z}, q\neq 0\}.$$

在有理数集$\mathbf{Q}$中，加、减、乘、除都可畅行无阻(当然 0 不能作除数)，因而有理数集对于四则运算是封闭的．但是有理数集对开方运算不封闭，即有理数的开方可能不再是有理数，例如$\sqrt{2},\sqrt{3}$等就不是有理数，这一点很容易证明．

事实上，若假设$\sqrt{2}$是有理数，则$\sqrt{2}$可表示为$\dfrac{p}{q}$的形式，即$\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$，其中$p,q\in \mathbf{Z}$且互素．这样一来p,q不能同时为偶数，不妨设q是奇数，于是$p=\sqrt{2}q$，两边平方得$p^2=2q^2$，由此知p^2是偶数，从而知p是偶数．记$p=2r$，由上式得$q^2=2r^2$，这说明q^2是偶数，从而q是偶数，这与q是奇数的假设相矛盾，即假设$\sqrt{2}$是有理数导致了矛盾，故$\sqrt{2}$不是有理数．

由于任何有理数都可表示为有限小数(包括整数)或无限循环小数．既然$\sqrt{2}$不是有理数，它必是无限不循环小数，我们知道

$$\sqrt{2}=1.41421356\cdots.$$

为了与有理数相区别，人们把这类数(无限不循环小数)称为无理数．

有理数与无理数一起构成实数，全体实数组成的集合，称为**实数集**，记为$\mathbf{R}$．

由上述数集的逐步扩充可见，在这些集合间显然有

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

1.0.2 实数的性质

(1)有序性　即任意两个实数 a 与 b 可以比较大小，即在下列三个关系中有且仅有一个成立：$a>b, a=b, a<b$.

(2)封闭性　即对任意两个实数施行加、减、乘、除（除数不为 0）运算后仍得实数.

(3)稠密性　即在任何两个不同的实数之间都还存在着无穷多个不同的实数.

(4)连续性　当建立了数轴后，实数集与数轴上的点集之间有一一对应关系，即每一个实数在数轴上都有唯一的一个点与之相对应；反之，数轴上的每一个点都有唯一的一个实数与之对应. 直观地说，实数集不仅密布数轴而且布满数轴(注意，有理数集不具有这一性质，例如在数轴上可以画出表示 $\sqrt{2}$ 的点，但 $\sqrt{2}$ 却不是有理数). 正是基于这种性质，通常我们把实数与其在数轴上对应的点不加区别.

(5)阿基米德(Archimedes)性　即对任意两个正实数 a,b，必存在自然数 n，使 $na>b$ 由此可知，任何正实数 x，必有非负整数 n，使得 $n\leqslant x<n+1$.

1.0.3 区间与邻域

今后我们总是在一定的限制范围内讨论变量的变化问题，而变量的变化范围常常是一个区间，而区间有开的、闭的或半开半闭的不同形式. 满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的全体称为开区间，记为 (a,b)，即 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的全体称为闭区间，记为 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的实数 x 的全体称为左闭右开区间，记为 $[a,b)$，即 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$；同理，容易理解 $(a,b],[a,+\infty),(-\infty,b),(-\infty,+\infty)$ 等区间的含义.

今后在讨论问题时，我们经常遇到一种特殊的区间——邻域.

设 a 为某一定数，$\delta>0$，则称数集 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 **δ 邻域**，记为 $U(a,\delta)$，

即
$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

其中 a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**. 在没有必要指明 δ 时，就简称为点 a 的某邻域，记为 $U(a)$，如图 1.1.

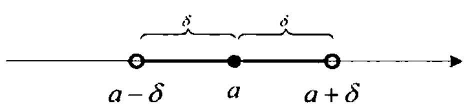

图 1.1

数集 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的**空心邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

当没有必要指明 δ 时，就简称点 a 的某空心邻域，记为 $\mathring{U}(a)$，如图 1.2.

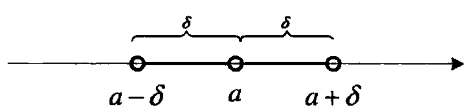

图 1.2

可见，邻域是一种特殊的开区间.

1.1 函数

【学习要点和要求】 理解函数概念，熟悉函数的几种特性；理解分段函数、反函数、复合函数的概念，并能将一个复合函数分解为几个简单函数.

1.1.1 函数概念

在中学中，我们已经学习了很多函数，例如：

(1) 幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$；

(2) 指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq1)$；

(3) 对数函数 $y=\log_{a}x(a>0,a\neq1)$；

(4) 三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x$；

(5) 反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arc}\cot x$ 等.

这些函数的共同之处在于每个函数都包含两个变量，它们的变化范围都是数集，且两个数集的元素之间存在着一种对应关系，把这些特征抽象出来，便得到函数的定义.

定义 1.1 设有非空数集 X 与 Y，若存在某种对应规则 f，对于每个 $x\in X$，都有唯一的 $y\in Y$ 与之对应，则称 **f 是 X 到 Y 的一个函数**，与 x 相对应的 y 记作 $f(x)$，称为 f 在 x 处的值. 上述函数关系记为

$$f:X\to Y,x\mapsto f(x),$$

x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. X 称为函数 f 的**定义域**，$f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$ 称为函数 f 的**值域**.

定义中当 X 与 Y 为一般集合时，称 f 是 X 到 Y 的**映射**. 可见函数是一种特殊映射.

在函数定义中，对应规则 f 称为函数，$f(x)$ 称为函数值，故 f 与 $f(x)$ 不同，但在习惯上，特别在微积分教材中常用 $f(x)$ 表示函数，这可从上下文中不难予以区别.

注意：在上述函数定义中，要求对每个 x，通过 f 都有“唯一”的 y 值相对应，由此定义的函数称为单值函数. 若对每一个 x，通过 f 有两个或两个以上的 y 值相对应，这样的函数称为多值函数. 在本书中我们主要讨论单值函数.

定义域与对应规则是函数的两个要素，若两个函数 f_1,f_2 有相同的定义域 X，且对每个 $x\in X$，有 $f_1(x)=f_2(x)$，就认为这两个函数相等或相同.

例如，$f(x)=\sqrt{x^2}$ 和 $g(x)=|x|$，由于 f,g 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，且 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $f(x)=g(x)=|x|$，故 f,g 是两个相等的函数，即 $f(x)=g(x)$. 而 $f(x)=\dfrac{x}{x},g(x)=1$，由于 f 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$g$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，故 $f\neq g$.

函数的表示方法主要有三种：解析法(即函数用数学式子表达)，图形法和表格法，