G A O D E N G S H U X U E

普通高等教育数学基础课程“十二五”规划教材

（经管类）高等数学 上册

同济大学数学系　刘浩荣　郭景德　蔡林福　董力强　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本套教材按照教育部最新制定的"经济管理类本科数学基础课程教学基本要求"编写,分上、下两册.此为上册,共5章内容,包括:函数、极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用等.书中每节后均配有适量的习题,每章之末均配有复习题.为方便读者查阅参考,在所附习题和复习题之后,都附有答案或提示.

本套教材条理清晰,论述确切;由浅入深,循序渐进;重点突出,难点分散;例题较多,典型性强;深广度恰当,便于教和学.它可作为普通高等院校(特别是"二本"及"三本"院校)或成人高校经管类本科或专升本学生"高等数学"课程的教材,也可供从事经济管理或金融工作的人员,或参加国家自学考试的读者,作为自学用书或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:经管类.上册/刘浩荣等编著.--上海:同济大学出版社,2012.4

ISBN 978-7-5608-4736-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第251726号

普通高等教育数学基础课程"十二五"规划教材

高等数学(经管类)上册

同济大学数学系 刘浩荣 郭景德 蔡林福 董力强 编著

组稿 曹 建 吴丽丽 **责任编辑** 张 莉 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(上海市四平路1239号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经　销 全国各地新华书店

印　刷 同济大学印刷厂

开　本 787 mm×960 mm 1/16

印　张 16

字　数 320 000

印　数 1—4 100

版　次 2012年4月第1版 2012年4月第1次印刷

书　号 ISBN 978-7-5608-4736-8

定　价 29.00元

前　言

近几年来，我国高等教育有了较大的发展，为适应部分高等院校经管类专业（“二本”、“三本”）的教学需要，我们应同济大学出版社之约，遵照教育部最新制定的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”（以下简称“教学基本要求”），编写了这套《高等数学》（经管类）教材．本教材分上、下两册，共9章内容，包括：函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，向量代数与空间解析几何，多元函数微积分及其应用，无穷级数，常微分方程与差分方程简介等．

编写本教材的基本思路是：精简冗余内容，压缩叙述篇幅；降低教学难度，突出应用特色．为使教材具有科学性、知识性、可读性和实用性，我们注意采取了以下一些措施：

(1) 内容“少而精”，取材紧扣“教学基本要求”．与同类教材相比，我们删去了“函数”中与中学知识重复的内容；在“不定积分”一章中删去了“有理函数”及“三角函数有理式”的积分；在“极限”部分，除了用极限的精确定义推证出必需的基本极限公式外，一般对用精确定义证明极限的例题或习题均降低难度，不作教学要求．从而尽量降低难度，压缩篇幅．对于某些超出“教学基本要求”而属于教学中可讲可不讲的内容，即使编入，也均以 * 号标记或用小号字排版，以供不同专业的教师和学生选用或参考．

(2) 在着重讲清数学知识概念和有关理论方法的同时，适当淡化某些定理的证明或公式推导的严密性．例如，根据“教学基本要求”，我们对三个微分中值定理的严格证明均予以省略，只叙述定理的条件和结论，并借助几何图形较为直观地解释其几何意义．此外，对于某些较为繁复的计算或公式推导，能删去的就删去，不能删去的便略去其计算或推导的过程．

(3) 在对教材中各章、节内容的组织上，考虑到应具有科学性和可读性．除了书写的文字尽量通顺流畅外，还注意做到：由浅入深，循序渐进；重点突出，难点分散．例如，在讲重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$时，为分散此教学难点，采用了“分两步走”的方法．先在数列极限存在的单调有界准则基础上，用数据列表的方式，直观地说明数列$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$的极限存在，且定义$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$．然后，在讲“两个重要极限”时，再就$x\to+\infty$时，利用函数极限存在的夹逼准则，证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$．最后，推广

到 $x \to -\infty$ 的情形，从而得到完整的极限公式：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$. 此外，即使是安排每节中所选配的例题，也应遵循“由简单到复杂，由具体到抽象”的原则. 当引入某种新的数学概念时，尽量按照“实践 — 认识 — 实践”的认识规律，先由实际引例出发，抽象出数学概念，从而上升到理论阶段(包括有关性质和计算方法等)，再回到实践中去应用. 为体现教材的科学性，我们特别注意防止前后内容的脱节，即使遇到个别地方需要提前用到后面的知识内容时，也都以适当的方式加以交代说明. 例如，在讲“两个重要极限”时，举例中常要用到利用复合函数连续性求极限的方法，因尚未介绍函数的连续性，故在前面介绍复合函数的极限法则时，顺便给出了一个定理，说明求复合函数极限可以交换极限与函数记号次序的条件，这样便可把复合函数的极限法则先使用起来，而到讲过复合函数的连续性后，再用函数的连续性把前面引入的定理加以叙述，从而做到前后内容互相呼应，融会贯通.

(4) 为使教材突出应用特色，且具有知识性和实用性，我们在微积分应用方面，主要侧重于在几何及经济分析中的一些简单应用. 例如，在定积分的几何应用中，只介绍“平面图形的面积”，“平行截面面积为已知的立体”及“绕坐标轴旋转的旋转体”的体积；在二重积分的应用中，也只介绍“立体的体积”，“曲面的面积”及“平面薄片的质心”等. 与同类教材相比，舍去了“平面曲线的弧长”及“平面薄片的转动惯量”等与经管类专业关系不太大的内容. 此外，突出在经济分析中的应用，希望成为本书的特色之一. 为此，我们参考了许多同类教材，除了编入一般常见的经济分析应用范例外，还特地邀请了同济大学数学系金融数学博士任学敏副教授，为我们提供了不少金融数学的应用实例. 例如，连续复利资金流量的现值，购买债券时确定债券首日购入的价格，股票市场中的“零增长模型”及“不变增长模型”的股价计算等. 另外，为使教材在应用方面更贴近生活，具有实用性，我们在“无穷级数”和“常微分方程与差分方程简介”中，特意选编了有关银行存款的本金计算，债券市场无风险利率，购房贷款及筹措教育经费存款等数学模型. 我们相信，这些应用方面的知识内容不仅有趣，而且有较好的参考价值.

(5) 按照“学练结合，学以致用”的原则，本教材在各节之后均配置了适量的习题作业，在每章之末也都选配了复习题，且为方便读者查阅参考，在习题和复习题之后，均附有答案或提示.

参加本教材编写的有蔡林福(第 1,2,3 章)，董力强(第 4,5 章)，郭景德(第 6,7 章)，刘浩荣(第 8,9 章). 全书由刘浩荣、蔡林福统稿，最后由刘浩荣润笔定稿并选编了附录.

本教材由北京航空航天大学李心灿教授主审. 他虽年事已高，工作繁忙，但仍在百忙中详细审阅了全书，并提出了许多宝贵建议及具体的修改意见，我们深受感悟，谨此表示诚挚而衷心的感谢!

在本教材的编写过程中，我们主要参考了同济大学出版社出版的由刘浩荣、郭景

德编著的《高等数学》(理工类)上、下册及由赵利彬主编的《高等数学》(经管类)上、下册;高等教育出版社出版的,由同济大学数学系编写的《高等数学》(第6版)及由教育部高等教育司组编、北京航空航天大学李心灿教授主编的《高等数学》等教材.此外,本教材的编写和出版,除了得到金融数学博士任学敏副教授的大力支持外,还得到同济大学出版社曹建副总编辑的大力鼎助.在此,我们一并表示衷心的感谢!

本套教材条理清晰,论述确切;由浅入深,循序渐进;重点突出,难点分散;例题较多,典型性强;深广度恰当,便于教和学.它可作为普通高校(特别是"二本"及"三本"院校)或成人高校经管类本科或专升本学生的"高等数学"课程的教材,也可供从事经济管理或金融工作的人员,或参加国家自学考试的读者,作为自学用书或参考书.

由于我们水平有限,书中难免会有不当或错误之处,恳请广大读者和同行批评指正.

编　者

2012年4月于同济大学

目　　录

前　言

第 1 章　函数、极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象.极限理论在本课程中占有重要的位置,它是建立"导数"、"微分"、"积分"等重要概念的必不可少的工具.在经济管理学中,常用的"边际分析"、"弹性分析"等都是以这些概念作为理论基础的.

本章首先讨论函数,然后重点介绍极限概念及其计算,并讨论函数的连续性.

1.1　预备知识

1.1.1　实数与数轴

实数是有理数与无理数的统称.形如$\dfrac{p}{q}$(p, q是整数,且$q\neq 0$)的数称为**有理数**.不能用$\dfrac{p}{q}$(p, q是整数,且$q\neq 0$)形式表示的数称为**无理数**,它是无限不循环小数.如$\sqrt{2}$、π、e 等.

实数的主要性质有

(1) 无最小数、也无最大数;

(2) 实数经加、减、乘、除(除数不为零)四则运算后仍为实数;

(3) 任意两个实数可以比较大小;

(4) 连续性,即实数间无空隙.

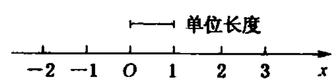

图 1-1

规定了原点、正方向及单位长度的直线称为**实数轴**(简称**数轴**)(图 1-1).有了数轴,可使抽象的实数与直观的数轴上的点建立起一对一的关系:任一实数都可用数轴上的一个点表示;反之,数轴上的每个点都代表一个实数.如数零就用数轴上的原点表示.今后为讨论方便,常把实数与数轴上与其对应的点不加区别.如称数 a 为点 a;反之,亦称点 a 为数 a.

1.1.2　实数的绝对值

一个实数 a 的绝对值记为 $|a|$.它定义为

$$|a|=\begin{cases}-a, & 当 a<0 时,\\ a, & 当 a\geqslant 0 时.\end{cases}$$

$|a|$ 的几何意义是：$|a|$ 表示数轴上的点 a 到原点 O 的距离.

绝对值及其运算有下列性质：

(1) $|a| = \sqrt{a^2}$；　　(2) $|a| \geqslant 0$ （等号仅当 $a=0$ 时成立）；

(3) $|-a| = |a|$；　　(4) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$；

(5) 若 $k>0$，$|a|<k$　等价于 $-k<a<k$，

$b<|b|>k$　等价于 $b<-k$ 或 $b>k$；

(6) $|a+b| \leqslant |a|+|b|$；　　(7) $||a|-|b|| \leqslant |a-b|$；

(8) $|ab| = |a||b|$；　　(9) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$　$(b \neq 0)$.

1.1.3 集合

具有某种属性的对象（或事物）的全体，称为**集合**（简称**集**）. 集合一般用大写字母 A，B，C，N，… 表示. 组成集合的每个单一的对象称做集合的**元素**. 元素一般用小写字母 a，b，c，e 等表示. 给出一个集合 M，若 a 是 M 的元素，记作 $a \in M$，读成 a 属于 M；若 a 不是集合 M 的元素，则记作 $a \overline{\in} M$（或 $a \notin M$），读成 a 不属于 M.

集合的表示法通常有列举法、描述法和图示法三种. 我们只介绍前两种表示法. **列举法**是把集合中的元素不重复、不遗漏、不计次序地列举出来，写在花括号"{}"内. 如方程 $x^2-1=0$ 的解的集合是 $\{-1, 1\}$；全体自然数集可表示为 $\mathbf{N}=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$. **描述法**就是在花括号内，左边写出集合的一个代表元素，右边写出集合的元素所具有的共性. 中间用竖线"|"分开. 如 $x^2-1=0$ 的解集可写成 $\{x \mid x^2-1=0\}$.

若集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即若 $e \in A$，必有 $e \in B$，则称 A 是 B 的**子集**，记作

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A,$$

读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

若集合 A 是集合 B 的子集，而 B 又是 A 的子集，即

$$A \subset B \quad 且 \quad B \subset A,$$

则称**集合 A 与集合 B 相等**，记为 A=B.

例如，$A = \{x \mid x$ 为大于 2 小于 5 的整数$\}$，

$B = \{x \mid x^2-7x+12=0\}$，

则　$A = B$.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 注意，因为 0 是一个元素. 所以集合 $\{0\}$ 不是空集，即 $\{0\} \neq \varnothing$. 显然，集合 $\{x \mid x<1$ 且 $x>2\}$ 及 $\{x \mid x^2+1=0$，x 为实数$\}$，都是空集 $\varnothing$.

有关子集的性质如下：

(1) $A \subset A$，意即集合 A 是自己的子集；

(2) 对任意集合 A，有 $\varnothing \subset A$，即空集是任何集合的子集；

(3) 若 $A \subset B$，$B \subset C$，则 $A \subset C$.

设集合 A 是集合 U 的子集. 属于 U 而不属于 A 的所有元素构成的集合，称为 A 在 U 内的**余集**(或称**补集**)，记作 $\overline{A}_U$，即

$$\overline{A}_U = \{b \mid b \in U \quad 且\, b \overline{\in} A,\ A \subset U\}.$$

关于集合，有如下的运算：

(1) 设有集合 A 及 B，由 A 与 B 的一切元素构成的集合，称为 A 与 B 的**并集**(或称**和集**)，记为 $A \cup B$. 即

$$A \cup B = \{e \mid e \in A\ 或\ e \in B\}.$$

(2) 集合 A 与集合 B 的所有公共元素构成的集合，称为 A 与 B 的**交集**，记为 $A \cap B$. 即

$$A \cap B = \{e \mid e \in A\ 且\ e \in B\}.$$

例 1 设 $A = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$，$B = \{x \mid x > 0\}$. 求 $A \cup B$ 及 $A \cap B$.

解 $A \cup B = \{x \mid x \geqslant -2\}$，$A \cap B = \{x \mid 0 < x \leqslant 3\}$.

显然. 集合 A 与 A 在 U 内的余集 $\overline{A}_U$ 的交集不含有任何元素，所以 $A \cap \overline{A}_U = \varnothing$.

本书今后用到的集合是实数集，全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$. 全体自然数构成的集合记作 $\mathbf{N}$. 还有要用到的是元素为点(直线、平面、空间上的点)的集合，称为**点集**. 如集合 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = R^2\}$ 表示 xOy 平面上圆心在原点、半径为 $R(R>0)$ 的圆周上点的全体，它是平面上的一种点集.

1.1.4 区间和邻域

1. 区间

区间是一类常用的集合. 设 a 和 b 都是实数，且 $a < b$，则称实数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为**开区间**. 记作 (a, b)，即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

类似地，闭区间和半开闭区间的定义和记号如下：

闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，

半开闭区间 $[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$ 或 $(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.

以上这些区间都称为**有限区间**，a 和 b 称为**区间的端点**，数 $b - a$ 称为**区间的长度**. 在数轴上，这些区间都可以用长度为有限的线段来表示，如图 1-2 所示(图中，实心点表示区间包括该端点，空心点表示区间不包括该端点).

还有一类区间称为**无限区间**，它们的定义和记号如下所列：

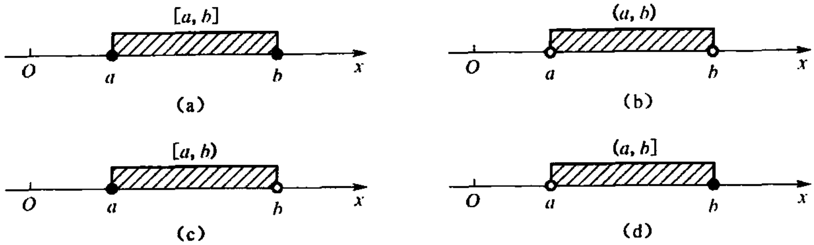

图 1-2

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\},\ (a, +\infty) = \{x \mid x > a\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\},\ (-\infty, b) = \{x \mid x < b\}.$$

其中,记号 $+\infty$ 读作“正无穷大”;记号 $-\infty$ 读作“负无穷大”. 注意,记号“$+\infty$”与“$-\infty$”都不是数!

无限区间$(-\infty, +\infty)$在数轴上对应于整个数轴,而其他无限区间在数轴上对应于长度为无限、且只可向一端无限延伸的直线. 例如,$[a, +\infty)$和$(-\infty, b)$在数轴上的几何表示如图 1-3 所示.

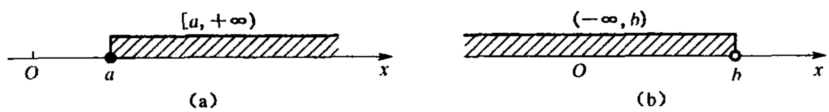

图 1-3

今后在不需要区分上述各种情况时,就用“区间 I”代表各种类型的区间.

2. **邻域**

从绝对值的性质(5)可以看到,满足不等式 $|x| < k$ (k 是实数,$k > 0$) 的一切实数 x 所构成的集合是开区间

$$(-k, k) = \{x \mid -k < x < k\}.$$

在数轴上,该区间关于原点 O 对称,所以我们又称它为**对称区间**. 原点 O 称为**区间的中心**,正数 k 称为**区间的半径**.

类似于上面的讨论可知,设 $\delta > 0$,则集合 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 是一个以 a 为中心、以 δ 为半径的开区间:$(a-\delta, a+\delta)$,此区间又称为点 a 的 **$\boldsymbol{\delta}$-邻域**(图 1-4(a)),记作 $U(a, \delta)$.

如果把邻域的中心 a 除去,即集合

$$\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

称为点 a 的**去心 $\boldsymbol{\delta}$-邻域**(图 1-4(b)),记作 $U(\hat{a}, \delta)$或$\mathring{U}(a, \delta)$. 注意,这里的 $0 < |x-a|$ 表明了 $x \neq a$.

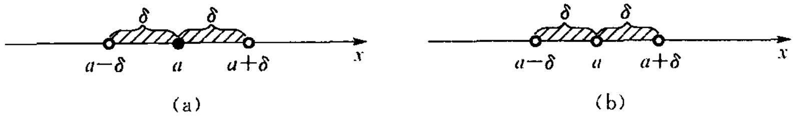

图 1-4

例 2 用区间表示集合 $S=\{x \mid a^2<x^2<b^2$ 且 $x\neq 0, |a|<|b|\}$.

解 由 $|x|=\sqrt{x^2}$, $a^2<x^2<b^2$,可得 $|a|<|x|<|b|$. 因 $x\neq 0$,故当 $x>0$ 时,有 $|a|<x<|b|$,即 $x\in(|a|, |b|)$;而当 $x<0$ 时,有 $|a|<-x<|b|$,即 $-|b|<x<-|a|$,即 $x\in(-|b|, -|a|)$. 于是,集合 $S=(-|b|, -|a|)\cup(|a|, |b|)$.

习题 1.1

1. 用花括号记法表示下列集合.

(1) 所有奇数的集合;(2) 平面上满足不等式 $4\leqslant x^2+y^2\leqslant 8$ 的点集.

2. 设 $A=\{x \mid 1<x<2\}$, $B=\{x \mid -8<x<1.5\}$,求 $A\cup B$, $A\cap B$.

3. 解含有绝对值符号的不等式 $|2x-3|\leqslant 5$.

4. 分别用邻域及集合的记号,表示点 3 的 δ- 邻域及去心的 δ- 邻域 $\left(\delta=\frac{1}{3}\right)$.

5. 用区间表示集合 $T=\{x \mid x^2-(a+b)x+ab<0\}$,其中 $a\leqslant b$.

答 案

1. (1) $\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$; (2) $\{(x, y) \mid 4\leqslant x^2+y^2\leqslant 8\}$.

2. $A\cup B=\{x \mid -8<x<2\}$; $A\cap B=\{x \mid 1<x<1.5\}$.

3. $-1\leqslant x\leqslant 4$.

4. $U\left(3, \frac{1}{3}\right)=\left\{x \,\middle|\, |x-3|<\frac{1}{3}\right\}$; $U\left(\hat{3}, \frac{1}{3}\right)=\left\{x \,\middle|\, 0<|x-3|<\frac{1}{3}\right\}$.

5. 当 $a<b$ 时,$T=(a, b)$;当 $a=b$ 时,$T=\varnothing$.

1.2 函 数

1.2.1 函数的概念

发生在自然界或者社会经济方面的许多现象,它们是不断变化的,而且有很多还是相互关联的. 在观察事物的过程中,如近来央行的多次加息,使银行的存贷款数量、客户的数量产生不断的变化. 这些变化的量称为**变量**. 也有一些不发生变化(相对而言),如银行的存贷款利率在调整后的一段时期内不变. 这种相对不变的量称为**常量**.

仅仅观察到一些变量的变化还不能深入揭示事物的本质.为此,研究两个变量之间的一种依赖关系就显得十分重要.

例 1　某商品共有 1 000 件,以单价 30 元销售.设 x 为销售量,R 为对应的总收入.当 x 在$\{0, 1, 2, \cdots, 1000\}$中任取一个值时,按照单价 30 元的规定,即总收入 $R = 30x$,便有唯一确定的值与它相对应.

例 2　公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

指出了当物体自由降落过程中距离 s 与时间 t 的一种相互依赖关系.假定物体着地的时刻为 T,当 t 取$[0, T]$中的某一数值时,通过上式,s 便有唯一确定的值与它相对应.

例 3　由中学几何知识,半径为 R 的内接正 n 边形的周长 L_n 的计算公式是

$$L_n = 2nR\sin\frac{\pi}{n}\quad(n \geqslant 3,\ n\text{ 为自然数}).$$

若边数 n 是变化的,根据该公式,L_n 也按依赖关系在变化.当边数 n 在数集$\{n \mid n \geqslant 3,\ n\text{ 是自然数}\}$中取定某数值时,通过上式,$L_n$ 便有唯一确定的值与它相对应.

以上三个例子来自不同的问题,抽象到数学上,它们有相同的一些特征:它们都分别说明了两个变量间有某种相互依赖的关系,这种关系给出了某种对应法则;并且,两变量中,当一个变量在一定范围内取定某一数值时,按照这种法则,另一变量必有唯一确定的数值与之对应.下面给出函数的概念.

定义 1　设 D 是某一实数集,若当变量 x 在 D 中每取一个数值时,另一变量 y 按照一定法则 f 总有唯一确定的数值与它对应,[①]则称 **y 是 x 的函数**,记作

$$y = f(x).$$

此时,称 x 为**自变量**,称 y 为**函数**(或**因变量**),实数集 D 称为函数的**定义域**.这里,对应法则 f 是对圆括弧中的 x 的一种约定(包括各种运算等).例如,$y = x^2 + 1$.对应法则为自变量 x 自乘二次再加 1.又如,$y = \lg x$ 对应法则是自变量 x 取以 10 为底的对数.

由函数的定义知,当自变量 x 取定数值 $x = x_0 \in D$ 时,函数 y 有唯一确定的数值与之对应,则称该数值为函数 $y = f(x)$有 x_0 处的**函数值**,记作

$$f(x_0)\quad\text{或}\quad y\big|_{x=x_0}.$$

此时,亦称函数 $f(x)$ 在 x_0 处**有定义**,这样,函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 的含意是,使 $y = f(x)$ 处处有定义的那些自变量 x 的实数值全体.若区间 I 是定义域 D 的子集.则

---

① 这里定义的函数又称为**单值函数**.如果对于定义域中的某个数值 x,变量 y 按照一定的法则有两个或两个以上的数值与它对应,则称这样的函数为**多值函数**.本书中主要讨论单值函数.

$y=f(x)$ 在区间 I 有定义，并称 I 为 $y=f(x)$ 的**定义区间**. 当自变量 x 遍取定义域 D 内的各个数值时，相应的函数值全体构成的数集

$$W=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**，并把在 xOy 平面上的点集

$$S=\{(x,\ y) \mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图像.

在实际问题中，函数的定义域是由问题的实际意义确定的. 如例 1 的销售问题中，销售量 x 只能取数集 $\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 1\,000\}$ 中的数，所以，这个数集就是函数 $R=30x$ 的定义域；例 2 中的时间 $t\geqslant 0$，且 t 也不能大于落地时间 T，该函数的定义域为 $[0,\ T]$；例 3 中自变量 n 是正多边形的边数，所以 $n\geqslant 3$，函数 L_n 的定义域为

$$D=\{n \mid n\geqslant 3,\ n \text{ 为自然数}\}.$$

撇开问题的实际意义，如果函数是由数学式子表示的，那么，函数的定义域规定为：使该数学式子有意义的（例如，分式的分母不能为零；开偶次方根时，被开方数要不小于零；对数的真数要大于零；反正弦函数 $\arcsin x$ 与反余弦函数 $\arccos x$，都必须 $|x|\leqslant 1$；等等）那些自变量值的全体所构成的实数集.

例 4 求函数的定义域（用集合或区间表示）.

(1) $y=\sqrt{2x-1}+\dfrac{1}{3x-2}$； (2) $y=\lg(x+1)+\arcsin\dfrac{x-1}{3}$.

解 (1) 要使函数 y 有定义，x 必须使得右边的两个算式都有意义，故 x 应满足不等式组

$$\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\ 3x-2\neq 0,\end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases}x\geqslant \dfrac{1}{2},\\ x\neq \dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

于是，所求函数的定义域可用集合或区间分别表示为

$$D=\left\{x \middle| x\geqslant \frac{1}{2} \text{ 且 } x\neq \frac{2}{3}\right\} \quad \text{或} \quad D=\left[\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},\ +\infty\right).$$

(2) 因为要使函数 y 有定义，必须使得 $\lg(x+1)$ 与 $\arcsin\dfrac{x-1}{3}$ 都有意义，所以，x 必须满足不等式组

$$\begin{cases}x+1>0,\\ \left|\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 1,\end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases}x>-1,\\ -1\leqslant\dfrac{x-1}{3}\leqslant 1.\end{cases}$$