

G A O D E N G S H U X U E



普通高等教育数学基础课程“十二五”规划教材

(经管类)

高等数学 上册

同济大学数学系 刘浩荣 郭景德 蔡林福 董力强 编著



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本套教材按照教育部最新制定的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写,分上、下两册。此为上册,共5章内容,包括:函数、极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用等。书中每节后均配有适量的习题,每章之末均配有复习题。为方便读者查阅参考,在所附习题和复习题之后,都附有答案或提示。

本套教材条理清晰,论述确切;由浅入深,循序渐进;重点突出,难点分散;例题较多,典型性强;深广度恰当,便于教和学。它可作为普通高等院校(特别是“二本”及“三本”院校)或成人高校经管类本科或专升本学生“高等数学”课程的教材,也可供从事经济管理或金融工作的人员,或参加国家自学考试的考生,作为自学用书或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:经管类.上册 / 刘浩荣等编著. -- 上海:同济大学出版社,2012.4
ISBN 978-7-5608-4736-8

I. ①高… II. ①刘… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 251726 号

普通高等教育数学基础课程“十二五”规划教材

高等数学(经管类)上册

同济大学数学系 刘浩荣 郭景德 蔡林福 董力强 编著

组稿 曹建 吴丽丽 责任编辑 张莉 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向葵

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787 mm×960 mm 1/16

印 张 16

字 数 320 000

印 数 1—4 100

版 次 2012 年 4 月第 1 版 2012 年 4 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-4736-8

定 价 29.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

前 言

近几年来,我国高等教育有了较大的发展,为适应部分高等院校经管类专业(“二本”、“三本”)的教学需要,我们应同济大学出版社之约,遵照教育部最新制定的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”(以下简称“教学基本要求”),编写了这套《高等数学》(经管类)教材.本教材分上、下两册,共9章内容,包括:函数、极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,向量代数与空间解析几何,多元函数微积分及其应用,无穷级数,常微分方程与差分方程简介等.

编写本教材的基本思路是:精简冗余内容,压缩叙述篇幅;降低教学难度,突出应用特色.为使教材具有科学性、知识性、可读性和实用性,我们注意采取了以下一些措施:

(1) 内容“少而精”,取材紧扣“教学基本要求”.与同类教材相比,我们删去了“函数”中与中学知识重复的内容;在“不定积分”一章中删去了“有理函数”及“三角函数有理式”的积分;在“极限”部分,除了用极限的精确定义推证出必需的基本极限公式外,一般对用精确定义证明极限的例题或习题均降低难度,不作教学要求.从而尽量降低难度,压缩篇幅.对于某些超出“教学基本要求”而属于教学中可讲可不讲的内容,即使编入,也均以*号标记或用小号字排版,以供不同专业的教师和学生选用或参考.

(2) 在着重讲清数学知识概念和有关理论方法的同时,适当淡化某些定理的证明或公式推导的严密性.例如,根据“教学基本要求”,我们对三个微分中值定理的严格证明均予以省略,只叙述定理的条件和结论,并借助几何图形较为直观地解释其几何意义.此外,对于某些较为繁复的计算或公式推导,能删去的就删去,不能删去的便略去其计算或推导的过程.

(3) 在对教材中各章、节内容的组织上,考虑到应具有科学性和可读性.除了书写的文字尽量通顺流畅外,还注意做到:由浅入深,循序渐进;重点突出,难点分散.例如,在讲重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 时,为分散此教学难点,采用了“分两步走”的方法.先在数列极限存在的单调有界准则基础上,用数据列表的方式,直观地说明数列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的极限存在,且定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.然后,在讲“两个重要极限”时,再就 $x \rightarrow +\infty$ 时,利用函数极限存在的夹逼准则,证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.最后,推广

到 $x \rightarrow -\infty$ 的情形,从而得到完整的极限公式: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. 此外,即使是安排每节中所选配的例题,也应遵循“由简单到复杂,由具体到抽象”的原则. 当引入某种新的数学概念时,尽量按照“实践—认识—实践”的认识规律,先由实际引例出发,抽象出数学概念,从而上升到理论阶段(包括有关性质和计算方法等),再回到实践中去应用. 为体现教材的科学性,我们特别注意防止前后内容的脱节,即使遇到个别地方需要提前用到后面的知识内容时,也都以适当的方式加以交代说明. 例如,在讲“两个重要极限”时,举例中常要用到利用复合函数连续性求极限的方法,因尚未介绍函数的连续性,故在前面介绍复合函数的极限法则时,顺便给出了一个定理,说明求复合函数极限可以交换极限与函数记号次序的条件,这样便可把复合函数的极限法则先使用起来,而到讲过复合函数的连续性后,再用函数的连续性把前面引入的定理加以叙述,从而做到前后内容互相呼应,融会贯通.

(4) 为使教材突出应用特色,且具有知识性和实用性,我们在微积分应用方面,主要侧重于在几何及经济分析中的一些简单应用. 例如,在定积分的几何应用中,只介绍“平面图形的面积”,“平行截面面积为已知的立体”及“绕坐标轴旋转的旋转体”的体积;在二重积分的应用中,也只介绍“立体的体积”,“曲面的面积”及“平面薄片的质心”等. 与同类教材相比,舍去了“平面曲线的弧长”及“平面薄片的转动惯量”等与经管类专业关系不太大的内容. 此外,突出在经济分析中的应用,希望成为本书的特色之一. 为此,我们参考了许多同类教材,除了编入一般常见的经济分析应用范例外,还特地邀请了同济大学数学系金融数学博士任学敏副教授,为我们提供了不少金融数学的应用实例. 例如,连续复利资金流量的现值,购买债券时确定债券首日购入的价格,股票市场中的“零增长模型”及“不变增长模型”的股价计算等. 另外,为使教材在应用方面更贴近生活,具有实用性,我们在“无穷级数”和“常微分方程与差分方程简介”中,特意选编了有关银行存款的本金计算,债券市场无风险利率,购房贷款及筹措教育经费存款等数学模型. 我们相信,这些应用方面的知识内容不仅有趣,而且有较好的参考价值.

(5) 按照“学练结合,学以致用”的原则,本教材在各节之后均配置了适量的习题作业,在每章之末也都选配了复习题,且为方便读者查阅参考,在习题和复习题之后,均附有答案或提示.

参加本教材编写的有蔡林福(第1,2,3章),董力强(第4,5章),郭景德(第6,7章),刘浩荣(第8,9章). 全书由刘浩荣、蔡林福统稿,最后由刘浩荣润笔定稿并选编了附录.

本教材由北京航空航天大学李心灿教授主审. 他虽年事已高,工作繁忙,但仍在百忙中详细审阅了全书,并提出了许多宝贵建议及具体的修改意见,我们深受感悟,谨此表示诚挚而衷心的感谢!

在本教材的编写过程中,我们主要参考了同济大学出版社出版的由刘浩荣、郭景

德编著的《高等数学》(理工类)上、下册及由赵利彬主编的《高等数学》(经管类)上、下册;高等教育出版社出版的,由同济大学数学系编写的《高等数学》(第6版)及由教育部高等教育司组编、北京航空航天大学李心灿教授主编的《高等数学》等教材.此外,本教材的编写和出版,除了得到金融数学博士任学敏副教授的大力支持外,还得到同济大学出版社曹建副总编辑的大力鼎助.在此,我们一并表示衷心的感谢!

本套教材条理清晰,论述确切;由浅入深,循序渐进;重点突出,难点分散;例题较多,典型性强;深广度恰当,便于教和学.它可作为普通高校(特别是“二本”及“三本”院校)或成人高校经管类本科或专升本学生的“高等数学”课程的教材,也可供从事经济管理或金融工作的人员,或参加国家自学考试的读者,作为自学用书或参考书.

由于我们水平有限,书中难免会有不当或错误之处,恳请广大读者和同行批评指正.

编 者

2012年4月于同济大学

目 录

前 言

第 1 章 函数、极限与连续	(1)
1.1 预备知识	(1)
1.1.1 实数与数轴	(1)
1.1.2 实数的绝对值	(1)
1.1.3 集合	(2)
1.1.4 区间和邻域	(3)
习题 1.1	(5)
1.2 函数	(5)
1.2.1 函数的概念	(5)
1.2.2 函数的一些特性	(9)
1.2.3 反函数与复合函数	(12)
1.2.4 基本初等函数与初等函数	(15)
1.2.5 建立函数关系式举例	(17)
习题 1.2	(18)
1.3 数列的极限	(21)
1.3.1 数列的概念及其性质	(21)
1.3.2 数列的极限	(23)
1.3.3 收敛数列的性质及数列极限存在的单调有界准则	(25)
习题 1.3	(26)
1.4 函数的极限	(27)
1.4.1 自变量趋向于无穷时函数的极限	(27)
1.4.2 自变量趋向于有限值时函数的极限	(29)
1.4.3 函数极限的性质定理	(32)
习题 1.4	(33)
1.5 极限的运算法则	(33)
1.5.1 极限的四则运算法则	(33)
1.5.2 极限的不等式定理	(37)
1.5.3 复合函数的极限	(37)

习题 1.5	(38)
1.6 极限存在的夹逼准则、两个重要极限	(39)
1.6.1 极限存在的夹逼准则	(39)
1.6.2 两个重要极限	(41)
习题 1.6	(46)
1.7 无穷小、无穷大及无穷小的比较	(46)
1.7.1 无穷小	(46)
1.7.2 无穷大	(47)
1.7.3 无穷小的比较	(48)
习题 1.7	(51)
1.8 函数的连续性与间断点	(52)
1.8.1 函数的连续性	(52)
1.8.2 左、右连续及连续的充要条件	(54)
1.8.3 函数的间断点及其分类	(55)
习题 1.8	(57)
1.9 连续函数的运算及初等函数的连续性	(58)
1.9.1 连续函数的四则运算	(58)
1.9.2 反函数与复合函数的连续性	(58)
1.9.3 初等函数的连续性	(59)
习题 1.9	(62)
1.10 闭区间上连续函数的性质	(62)
1.10.1 最大值和最小值定理	(62)
1.10.2 介值定理	(63)
习题 1.10	(65)
复习题(1)	(66)

第 2 章 导数与微分	(68)
2.1 导数概念	(68)
2.1.1 变化率问题举例	(68)
2.1.2 函数的导数	(70)
2.1.3 导数的几何意义	(74)
2.1.4 函数的可导性与连续性的关系	(75)
习题 2.1	(77)
2.2 函数的四则运算求导法则	(78)
2.2.1 函数的和、差求导法则	(78)
2.2.2 函数的积、商求导法则	(80)

习题 2.2	(83)
2.3 反函数的导数	(84)
2.3.1 反函数的求导法则	(84)
2.3.2 指数函数的导数	(85)
2.3.3 反三角函数的导数	(85)
习题 2.3	(87)
2.4 复合函数的求导法则	(87)
2.4.1 复合函数的求导法则	(87)
2.4.2 基本求导公式与求导法则	(90)
习题 2.4	(92)
2.5 高阶导数	(93)
习题 2.5	(95)
2.6 隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数	(96)
2.6.1 隐函数的导数	(96)
2.6.2 对数求导法	(98)
2.6.3 由参数方程所确定的函数的导数	(99)
* 2.6.4 相关变化率	(101)
习题 2.6	(102)
2.7 函数的微分	(103)
2.7.1 微分的定义	(103)
2.7.2 函数可微与可导之间的关系	(104)
2.7.3 微分的几何意义	(106)
2.7.4 函数的微分公式与微分法则	(106)
2.7.5 复合函数的微分法则与一阶微分形式不变性	(108)
* 2.7.6 微分在近似计算中的应用	(109)
习题 2.7	(111)
复习题(2)	(112)
第3章 中值定理与导数的应用	(115)
3.1 中值定理	(115)
3.1.1 罗尔定理	(115)
3.1.2 拉格朗日中值定理	(116)
3.1.3 柯西中值定理	(118)
习题 3.1	(119)
3.2 洛必达法则	(119)
3.2.1 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的洛必达法则	(120)

3.2.2 其他未定式的计算	(122)
习题 3.2	(124)
3.3 函数单调性的判别法	(124)
习题 3.3	(127)
3.4 函数的极值及其求法	(128)
习题 3.4	(133)
3.5 最大值、最小值问题	(133)
3.5.1 在闭区间上连续的函数的最大值和最小值	(133)
3.5.2 实际问题中的最大值和最小值	(134)
习题 3.5	(136)
3.6 曲线的凹凸性与拐点	(137)
3.6.1 曲线的凹凸性	(137)
3.6.2 曲线的拐点	(138)
习题 3.6	(140)
3.7 函数图形的描绘	(140)
3.7.1 曲线的水平渐近线与铅直渐近线	(140)
3.7.2 函数图形的描绘	(141)
习题 3.7	(144)
3.8 导数在经济分析中的应用	(145)
3.8.1 边际分析	(145)
3.8.2 弹性分析	(147)
3.8.3 函数极值在经济管理中的应用	(154)
习题 3.8	(156)
复习题(3)	(157)
第 4 章 不定积分	(160)
4.1 不定积分的概念与性质	(160)
4.1.1 原函数与不定积分的概念	(160)
4.1.2 不定积分的性质	(162)
4.1.3 基本积分公式表	(163)
习题 4.1	(165)
4.2 换元积分法	(166)
4.2.1 第一类换元积分法	(167)
4.2.2 第二类换元积分法	(173)
习题 4.2	(176)
4.3 分部积分法	(178)

习题 4.3	(183)
复习题(4)	(184)
第 5 章 定积分及其应用	(187)
5.1 定积分的概念与性质	(187)
5.1.1 定积分问题举例	(187)
5.1.2 定积分的定义	(189)
5.1.3 定积分的几何意义	(190)
5.1.4 定积分的性质	(191)
习题 5.1	(194)
5.2 微积分基本公式	(194)
5.2.1 变上限的定积分所确定的函数及其导数	(194)
5.2.2 牛顿-莱布尼茨公式	(196)
习题 5.2	(199)
5.3 定积分的换元积分法与分部积分法	(200)
5.3.1 定积分的换元法	(200)
5.3.2 定积分的分部积分法	(203)
习题 5.3	(205)
5.4 定积分的应用	(206)
5.4.1 定积分在几何中的应用	(206)
5.4.2 定积分在经济分析中的应用举例	(214)
习题 5.4	(219)
5.5 广义积分与 Γ -函数简介	(221)
5.5.1 无穷限的广义积分	(221)
5.5.2 无界函数的广义积分	(223)
5.5.3 Γ -函数简介	(225)
习题 5.5	(226)
复习题(5)	(227)
附录	(231)
附录 A 简单积分表	(231)
附录 B 初等数学常用公式	(236)
附录 C 极坐标简介	(239)
附录 D 某些常用的曲线方程及其图形	(240)

第1章 函数、极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象, 极限理论在本课程中占有重要的位置, 它是建立“导数”、“微分”、“积分”等重要概念的必不可少的工具. 在经济管理学中, 常用的“边际分析”、“弹性分析”等都是以这些概念作为理论基础的.

本章首先讨论函数, 然后重点介绍极限概念及其计算, 并讨论函数的连续性.

1.1 预备知识

1.1.1 实数与数轴

实数是有理数与无理数的统称. 形如 $\frac{p}{q}$ (p, q 是整数, 且 $q \neq 0$) 的数称为有理数.

不能用 $\frac{p}{q}$ (p, q 是整数, 且 $q \neq 0$) 形式表示的数称为无理数, 它是无限不循环小数. 如 $\sqrt{2}$ 、 π 、 e 等.

实数的主要性质有

- (1) 无最小数、也无最大数;
- (2) 实数经加、减、乘、除(除数不为零)四则运算后仍为实数;
- (3) 任意两个实数可以比较大小;
- (4) 连续性, 即实数间无空隙.

规定了原点、正方向及单位长度的直线称为**实数轴**(简称**数轴**)(图 1-1). 有了数轴, 可使抽象的实数与直观的

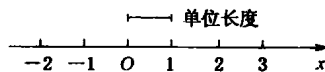


图 1-1

的数轴上的点建立起一对一的关系: 任一实数都可用数轴上的一个点表示; 反之, 数轴上的每个点都代表一个实数. 如数零就用数轴上的原点表示. 今后为讨论方便, 常把实数与数轴上与其对应的点不加区别. 如称数 a 为点 a ; 反之, 亦称点 a 为数 a .

1.1.2 实数的绝对值

一个实数 a 的绝对值记为 $|a|$. 它定义为

$$|a| = \begin{cases} -a, & \text{当 } a < 0 \text{ 时,} \\ a, & \text{当 } a \geq 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

$|a|$ 的几何意义是: $|a|$ 表示数轴上的点 a 到原点 O 的距离.

绝对值及其运算有下列性质:

$$(1) |a| = \sqrt{a^2}; \quad (2) |a| \geq 0 \quad (\text{等号仅当 } a = 0 \text{ 时成立});$$

$$(3) |-a| = |a|; \quad (4) -|a| \leq a \leq |a|;$$

$$(5) \text{若 } k > 0, |a| < k \text{ 等价于 } -k < a < k,$$

$$b < |b| < k \text{ 等价于 } b < -k \text{ 或 } b > k;$$

$$(6) |a+b| \leq |a| + |b|; \quad (7) ||a| - |b|| \leq |a-b|;$$

$$(8) |ab| = |a| |b|; \quad (9) \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

1.1.3 集合

具有某种属性的对象(或事物)的全体,称为**集合**(简称**集**). 集合一般用大写字母 $A, B, C, N, \dots$ 表示. 组成集合的每个单一的对象称做集合的**元素**. 元素一般用小写字母 a, b, c, e 等表示. 给出一个集合 M , 若 a 是 M 的元素, 记作 $a \in M$, 读成 a 属于 M ; 若 a 不是集合 M 的元素, 则记作 $a \notin M$ (或 $a \notin M$), 读成 a 不属于 M .

集合的表示法通常有列举法、描述法和图示法三种. 我们只介绍前两种表示法. **列举法**是把集合中的元素不重复、不遗漏、不计次序地列举出来, 写在花括号“ $\{\}$ ”内. 如方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解的集合是 $\{-1, 1\}$; 全体自然数集可表示为 $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. **描述法**就是在花括号内, 左边写出集合的一个代表元素, 右边写出集合的元素所具有的共性. 中间用竖线“ $|$ ”分开. 如 $x^2 - 1 = 0$ 的解集可写成 $\{x | x^2 - 1 = 0\}$.

若集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素, 即若 $e \in A$, 必有 $e \in B$, 则称 A 是 B 的**子集**, 记作

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A,$$

读作 A 包含于 B 或 B 包含 A .

若集合 A 是集合 B 的子集, 而 B 又是 A 的子集, 即

$$A \subset B \quad \text{且} \quad B \subset A,$$

则称集合 A 与集合 B 相等, 记为 $A=B$.

例如, $A = \{x | x \text{ 为大于 } 2 \text{ 小于 } 5 \text{ 的整数}\},$

$$B = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\},$$

则 $A = B.$

不含任何元素的集合称为**空集**, 记作 $\emptyset$. 注意, 因为 0 是一个元素. 所以集合 $\{0\}$ 不是空集, 即 $\{0\} \neq \emptyset$. 显然, 集合 $\{x | x < 1 \text{ 且 } x > 2\}$ 及 $\{x | x^2 + 1 = 0, x \text{ 为实数}\}$, 都是空集 $\emptyset$.

有关子集的性质如下:

- (1) $A \subset A$, 意即集合 A 是自己的子集;
- (2) 对任意集合 A , 有 $\emptyset \subset A$, 即空集是任何集合的子集;
- (3) 若 $A \subset B, B \subset C$, 则 $A \subset C$.

设集合 A 是集合 U 的子集, 属于 U 而不属于 A 的所有元素构成的集合, 称为 A 在 U 内的余集(或称补集), 记作 $\bar{A}_U$, 即

$$\bar{A}_U = \{b \mid b \in U \text{ 且 } b \notin A, A \subset U\}.$$

关于集合, 有如下的运算:

(1) 设有集合 A 及 B , 由 A 与 B 的一切元素构成的集合, 称为 A 与 B 的并集(或称和集), 记为 $A \cup B$. 即

$$A \cup B = \{e \mid e \in A \text{ 或 } e \in B\}.$$

(2) 集合 A 与集合 B 的所有公共元素构成的集合, 称为 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$. 即

$$A \cap B = \{e \mid e \in A \text{ 且 } e \in B\}.$$

例 1 设 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \mid x > 0\}$. 求 $A \cup B$ 及 $A \cap B$.

解 $A \cup B = \{x \mid x \geq -2\}$, $A \cap B = \{x \mid 0 < x \leq 3\}$.

显然, 集合 A 与 A 在 U 内的余集 $\bar{A}_U$ 的交集不含有任何元素, 所以 $A \cap \bar{A}_U = \emptyset$.

本书今后用到的集合是实数集, 全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$. 全体自然数构成的集合记作 $\mathbf{N}$. 还有要用到的是元素为点(直线、平面、空间上的点)的集合, 称为点集. 如集合 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = R^2\}$ 表示 xOy 平面上圆心在原点、半径为 $R(R > 0)$ 的圆周上点的全体, 它是平面上的一种点集.

1.1.4 区间和邻域

1. 区间

区间是一类常用的集合. 设 a 和 b 都是实数, 且 $a < b$, 则称实数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为开区间. 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

类似地, 闭区间和半开闭区间的定义和记号如下:

闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$,

半开闭区间 $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ 或 $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$.

以上这些区间都称为有限区间, a 和 b 称为区间的端点, 数 $b - a$ 称为区间的长度. 在数轴上, 这些区间都可以用长度为有限的线段来表示, 如图 1-2 所示(图中, 实心点表示区间包括该端点, 空心点表示区间不包括该端点).

还有一类区间称为无限区间, 它们的定义和记号如下所列:

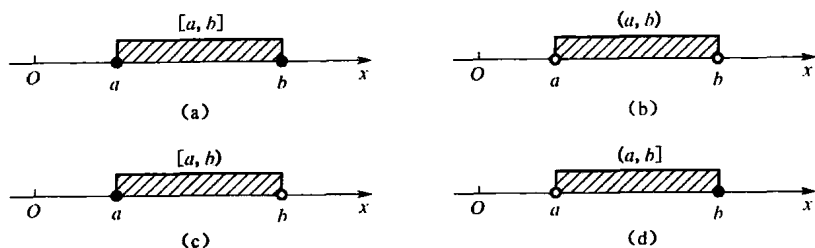


图 1-2

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}, (a, +\infty) = \{x \mid x > a\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}, (-\infty, b) = \{x \mid x < b\}.$$

其中,记号 $+\infty$ 读作“正无穷大”;记号 $-\infty$ 读作“负无穷大”.注意,记号“ $+\infty$ ”与“ $-\infty$ ”都不是数!

无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 在数轴上对应于整个数轴,而其他无限区间在数轴上对应于长度为无限、且只可向一端无限延伸的直线.例如, $[a, +\infty)$ 和 $(-\infty, b)$ 在数轴上的几何表示如图 1-3 所示.

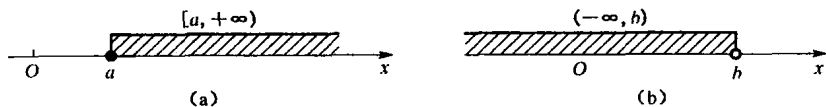


图 1-3

今后在不需要区分上述各种情况时,就用“区间 I ”代表各种类型的区间.

2. 邻域

从绝对值的性质(5)可以看到,满足不等式 $|x| < k$ (k 是实数, $k > 0$) 的一切实数 x 所构成的集合是开区间

$$(-k, k) = \{x \mid -k < x < k\}.$$

在数轴上,该区间关于原点 O 对称,所以我们又称它为**对称区间**.原点 O 称为**区间的中心**,正数 k 称为**区间的半径**.

类似于上面的讨论可知,设 $\delta > 0$,则集合 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 是一个以 a 为中心、以 δ 为半径的开区间: $(a - \delta, a + \delta)$,此区间又称为点 a 的 **δ -邻域**(图 1-4(a)),记作 $U(a, \delta)$.

如果把邻域的中心 a 除去,即集合

$$\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$

称为点 a 的**去心 δ -邻域**(图 1-4(b)),记作 $U(\hat{a}, \delta)$ 或 $\dot{U}(a, \delta)$.注意,这里的 $0 < |x - a|$ 表明了 $x \neq a$.

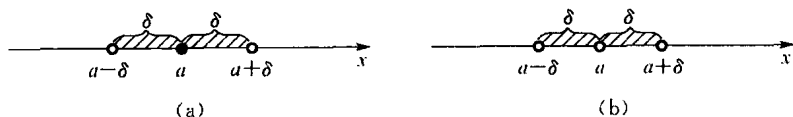


图 1-4

例 2 用区间表示集合 $S = \{x \mid a^2 < x^2 < b^2 \text{ 且 } x \neq 0, |a| < |b|\}$.

解 由 $|x| = \sqrt{x^2}$, $a^2 < x^2 < b^2$, 可得 $|a| < |x| < |b|$. 因 $x \neq 0$, 故当 $x > 0$ 时, 有 $|a| < x < |b|$, 即 $x \in (|a|, |b|)$; 而当 $x < 0$ 时, 有 $|a| < -x < |b|$, 即 $-|b| < x < -|a|$, 即 $x \in (-|b|, -|a|)$. 于是, 集合 $S = (-|b|, -|a|) \cup (|a|, |b|)$.

习题 1.1

1. 用花括号记法表示下列集合.
(1) 所有奇数的集合; (2) 平面上满足不等式 $4 \leq x^2 + y^2 \leq 8$ 的点集.
2. 设 $A = \{x \mid 1 < x < 2\}$, $B = \{x \mid -8 < x < 1.5\}$, 求 $A \cup B$, $A \cap B$.
3. 解含有绝对值符号的不等式 $|2x-3| \leq 5$.
4. 分别用邻域及集合的记号, 表示点 3 的 δ -邻域及去心的 δ -邻域 ($\delta = \frac{1}{3}$).
5. 用区间表示集合 $T = \{x \mid x^2 - (a+b)x + ab < 0\}$, 其中 $a \leq b$.

答 案

1. (1) $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$; (2) $\{(x, y) \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 8\}$.
2. $A \cup B = \{x \mid -8 < x < 2\}$; $A \cap B = \{x \mid 1 < x < 1.5\}$.
3. $-1 \leq x \leq 4$.
4. $U(3, \frac{1}{3}) = \{x \mid |x-3| < \frac{1}{3}\}$; $U(\hat{3}, \frac{1}{3}) = \{x \mid 0 < |x-3| < \frac{1}{3}\}$.
5. 当 $a < b$ 时, $T = (a, b)$; 当 $a = b$ 时, $T = \emptyset$.

1.2 函 数

1.2.1 函数的概念

发生在自然界或者社会经济方面的许多现象, 它们是不不断变化的, 而且有很多还是相互关联的. 在观察事物的过程中, 如近来央行的多次加息, 使银行的存贷款数量、客户的数量产生不断的变化. 这些变化的量称为变量. 也有一些不发生变化(相对而言), 如银行的存贷款利率在调整后的一段时期内不变. 这种相对不变的量称为常量.

仅仅观察到一些变量的变化还不能深入揭示事物的本质. 为此, 研究两个变量之间的一种依赖关系就显得十分重要.

例 1 某商品共有 1 000 件, 以单价 30 元销售. 设 x 为销售量, R 为对应的总收入. 当 x 在 $\{0, 1, 2, \dots, 1000\}$ 中任取一个值时, 按照单价 30 元的规定, 即总收入 $R = 30x$, 便有唯一确定的值与它相对应.

例 2 公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

指出了当物体自由降落过程中距离 s 与时间 t 的一种相互依赖关系. 假定物体着地的时刻为 T , 当 t 取 $[0, T]$ 中的某一数值时, 通过上式, s 便有唯一确定的值与它相对应.

例 3 由中学几何知识, 半径为 R 的内接正 n 边形的周长 L_n 的计算公式是

$$L_n = 2nR \sin \frac{\pi}{n} \quad (n \geq 3, n \text{ 为自然数}).$$

若边数 n 是变化的, 根据该公式, L_n 也按依赖关系在变化. 当边数 n 在数集 $\{n \mid n \geq 3, n \text{ 是自然数}\}$ 中取定某数值时, 通过上式, L_n 便有唯一确定的值与它相对应.

以上三个例子来自不同的问题, 抽象到数学上, 它们有相同的一些特征: 它们都分别说明了两个变量间有某种相互依赖的关系, 这种关系给出了某种对应法则; 并且, 两变量中, 当一个变量在一定范围内取定某一数值时, 按照这种法则, 另一变量必有唯一确定的数值与之对应. 下面给出函数的概念.

定义 1 设 D 是某一实数集, 若当变量 x 在 D 中每取一个数值时, 另一变量 y 按照一定法则 f 总有唯一确定的数值与它对应,^① 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x).$$

此时, 称 x 为自变量, 称 y 为函数 (或因变量), 实数集 D 称为函数的定义域. 这里, 对应法则 f 是对圆括弧中的 x 的一种约定 (包括各种运算等). 例如, $y = x^2 + 1$. 对应法则为自变量 x 自乘二次再加 1. 又如, $y = \lg x$ 对应法则是自变量 x 取以 10 为底的对数.

由函数的定义知, 当自变量 x 取定数值 $x = x_0 \in D$ 时, 函数 y 有唯一确定的数值与之对应, 则称该数值为函数 $y = f(x)$ 有 x_0 处的函数值, 记作

$$f(x_0) \quad \text{或} \quad y|_{x=x_0}.$$

此时, 亦称函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义, 这样, 函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 的含意是, 使 $y = f(x)$ 处处有定义的那些自变量 x 的实数值全体. 若区间 I 是定义域 D 的子集. 则

^① 这里定义的函数又称为单值函数. 如果对于定义域中的某个数值 x , 变量 y 按照一定的法则有两个或两个以上的数值与它对应, 则称这样的函数为多值函数. 本书中主要讨论单值函数.

$y = f(x)$ 在区间 I 有定义, 并称 I 为 $y = f(x)$ 的定义区间. 当自变量 x 遍取定义域 D 内的各个数值时, 相应的函数值全体构成的数集

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的值域, 并把在 xOy 平面上的点集

$$S = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的图像.

在实际问题中, 函数的定义域是由问题的实际意义确定的. 如例 1 的销售问题中, 销售量 x 只能取数集 $\{0, 1, 2, \dots, 1000\}$ 中的数, 所以, 这个数集就是函数 $R = 30x$ 的定义域; 例 2 中的时间 $t \geq 0$, 且 t 也不能大于落地时间 T , 该函数的定义域为 $[0, T]$; 例 3 中自变量 n 是正多边形的边数, 所以 $n \geq 3$, 函数 L_n 的定义域为

$$D = \{n \mid n \geq 3, n \text{ 为自然数}\}.$$

撇开问题的实际意义, 如果函数是由数学式子表示的, 那么, 函数的定义域规定为: 使该数学式子有意义的 (例如, 分式的分母不能为零; 开偶次方根时, 被开方数要不小于零; 对数的真数要大于零; 反正弦函数 $\arcsin x$ 与反余弦函数 $\arccos x$, 都必须 $|x| \leq 1$; 等等) 那些自变量值的全体所构成的实数集.

例 4 求函数的定义域 (用集合或区间表示).

$$(1) y = \sqrt{2x-1} + \frac{1}{3x-2}; \quad (2) y = \lg(x+1) + \arcsin \frac{x-1}{3}.$$

解 (1) 要使函数 y 有定义, x 必须使得右边的两个算式都有意义, 故 x 应满足不等式组

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ 3x-2 \neq 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x \neq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

于是, 所求函数的定义域可用集合或区间分别表示为

$$D = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{2} \text{ 且 } x \neq \frac{2}{3}\right\} \quad \text{或} \quad D = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right).$$

(2) 因为要使函数 y 有定义, 必须使得 $\lg(x+1)$ 与 $\arcsin \frac{x-1}{3}$ 都有意义, 所以, x 必须满足不等式组

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ \left|\frac{x-1}{3}\right| \leq 1, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x > -1, \\ -1 \leq \frac{x-1}{3} \leq 1. \end{cases}$$