Probability Theory and Mathematical Statistics

概率论与数理统计

大学数学编写委员会《概率论与数理统计》编写组

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

大学数学编写委员会
《概率论与数理统计》编写组

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书根据概率论与数理统计课程教学基本要求编写而成。全书分三部分：第一部分为概率论，包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机向量、随机变量的数字特征和极限定理5章；第二部分为数理统计，包括数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析4章；第三部分为数学实验，包括Excel统计函数简介和常见的概率论与数理统计模型2章。全书语言叙述简明易懂，从实际问题出发引入基本概念和基本定理，增加学生对概率统计基本思想的理解，使学生熟练掌握概率统计的常用方法。

本书可作为高等学校理工类、经管类等专业的概率论与数理统计教材，也可作为科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计／大学数学编写委员会《概率论与数理统计》编写组编. --北京：高等教育出版社，2012.8

ISBN 978-7-04-035838-4

Ⅰ.①概… Ⅱ.①大… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第178830号

策划编辑 李晓鹏　责任编辑 李晓鹏　封面设计 杨立新　版式设计 余 杨
插图绘制 黄建英　责任校对 刘春萍　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　址	北京市西城区德外大街4号	网　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　张	19.5	版　次	2012年8月第1版
字　数	350千字	印　次	2012年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　价	28.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 35838-00

大学数学编写委员会

主　编：尚有林
副主编：李保安　秦　青
编　委：丁孝全　王春伟　王锋叶　陈金兰
陈　鹏　杨万才　杨德五　李二强
李小申　徐翠霞　常志勇

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门学科。作为近代数学最活跃的分支之一，它不但拥有独特的概念和方法，形成了系统的理论，还在学科发展上向各领域渗透，发展出诸多边缘分支。目前概率论与数理统计的应用范围已遍及自然科学、社会科学、工程技术和工农业生产等领域，概率论与数理统计的一些基本概念和方法已成为人们的常识。由于其理论和应用的重要性，在我国目前的本科和研究生教学中，概率论与数理统计已与高等数学和线性代数一样成为重要的基础课程。

本书根据最新制定的概率论与数理统计课程教学基本要求编写，吸取了编者多年从事概率统计教学的经验，可作为大学理工类(非数学类专业)、经济管理类等专业的概率论与数理统计课程的教材。

本书力图从实际问题出发引入基本概念和基本定理，增强学生对概率论和数理统计基本思想、基本方法的理解，着力加强培养学生的应用能力。语言叙述尽量做到简明易懂，配置较丰富的例题和习题(附答案)，方便读者自学。

全书共分三部分：第一部分为概率论，包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机向量、随机变量的数字特征、极限定理等 5 章内容；第二部分为数理统计，介绍了数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等 4 章内容；第三部分为数学实验，因近年来计算机技术的迅速发展，使大量复杂的统计计算成为可能，这极大地拓展了概率统计的应用范围，为了培养学生利用计算机进行数据处理、解决实际问题的能力，本书介绍了 Excel 中常用的统计函数，还专门介绍了常见的概率论与数理统计模型，读者从中可领略到概率统计的应用价值。

本书第 1，11 章由李保安编写，第 2，3 章由丁孝全编写，第 4，5，6 章由王春伟编写，第 7，9 章由杨德五编写，第 8，10 章及附表由常志勇编写。李保安和杨德五任主编，完成了本书的审核与统稿工作。在编写过程中，编者得到了河南科

技大学数学与统计学院老师们的极大关心和支持，郑州大学、华北水利水电学院和郑州轻工业学院等兄弟院校的老师们也提出了许多宝贵意见，高等教育出版社的编辑们同样倾注了大量心血，在此一并表示诚挚的谢意！

由于编者的水平所限，虽经多次修改，书中一定还存在不足，恳请读者批评指正。

编 者

2011.11

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

1.1　随机试验与随机事件

1.1.1　确定性现象和随机现象

在自然界和人类社会中存在两类不同的现象. 一类称为确定性现象，它在一定条件下必然发生或必然不发生，例如太阳从东方升起、标准大气压下将水加热到 100 ℃必然会沸腾、边长为 a，b 的矩形的面积必为 ab 等. 这类现象的规律一旦被认识，事先就可正确预言. 过去我们所学的各门数学课程如数学分析、几何、代数、微分方程等基本上都是处理和研究这类确定性现象的.

然而，自然和社会中还广泛存在着另一类**不确定性现象**或**随机现象**，在一定条件下它的结果是不确定的，即一次试验可能出现这种结果，也可能出现那种结果，呈现出一种偶然性；或者说在相同条件下重复进行试验，每次的结果会不尽相同. 例如掷一枚均匀硬币，落地时可能正面朝上，也可能反面朝上，事先无法准确预测；两只球队进行多场比赛，比赛的结果不会完全相同，即使了解两队交手的历史数据，也无法准确预测比赛结果.

与确定性现象相比，随机现象看似难以捉摸、无法把握，但人们通过长期的反复观察和实践发现，尽管对随机现象进行一次或少数几次观察的结果具有不确定性，但在相同条件下进行大量重复观察时，某种规律性将会呈现. 例如均匀的硬币抛掷多次，正面和反面出现的次数之比会接近 1∶1. 这种在大量重复观察中呈现出的规律性称为**统计规律性**，它是随机现象本身所固有的、不随人们意志而改变的客观属性. 正是这种规律性的存在，使得我们利用数学工具研究随机现象成为可能，概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的数学分支.

1.1.2　随机试验与样本空间

为了研究统计规律性，需对随机现象进行大量重复的观察或试验，我们称为**随机试验**，简称**试验**，用字母 E 表示. 随机试验有以下三个特点：

(1) 可在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，所有可能结果是明确可知的；

(3) 试验之前不能确定会出现哪一个结果.

基于特点(2)，可以引出样本空间的概念. 随机试验 E 可能出现的、不能再分的结果称为**样本点**，一般用 ω 表示. 样本点全体构成的集合称为**样本空间**，记为 $\Omega=\{\omega\}$. 认识随机试验首先要列出它的样本空间.

例 1 试验 E_1：将一枚硬币连掷两次，观察正反面出现的情况. 则样本空间 $\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}=\{$(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)$\}$.

例 2 试验 E_2：将一枚硬币连掷两次，观察正面出现的次数. 样本空间 $\Omega_2=\{0,1,2\}$.

例 3 试验 E_3：记录某大超市一天内进入的顾客人数. 由于人数可能很大，难以确定一个合适的上界，因此，取样本空间 $\Omega_3=\{0,1,2,3,4,\cdots\}$.

例 4 试验 E_4：某射手打靶，测量其弹落点与靶心的距离. 样本空间 $\Omega_4=\{\omega \mid \omega\geqslant 0\}$.

注意到例 1 和例 2 都是将一枚硬币连掷两次，但 Ω_1 和 Ω_2 截然不同，这说明试验目的决定试验所对应的样本空间. 从样本空间包含的样本点个数来区分，样本空间分为有限和无限两类，上面的 Ω_1 和 Ω_2 是有限样本空间，Ω_3 和 Ω_4 是无限样本空间. 无限样本空间又分两种情况：一种是包含无限但可列个样本点，如 Ω_3，这种空间的性质类似于有限样本空间；另一种是包含无限但不可列个样本点，如 Ω_4.

1.1.3 随机事件

在实际问题中，我们关心的往往并不仅是单个的样本点，而是具有某种特征的样本点构成的集合，称为**随机事件**，简称事件，用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 例如掷一枚骰子，人们关心是否“掷出偶数点”，这就是个随机事件，可能发生也可能不发生，涉及三个样本点即 2,4,6. 从集合的角度看，任一事件 A 是相应样本空间的一个子集.

例 5 掷两枚骰子，观察出现的点数. 若用 x 表示第一枚骰子出现的点数，y 表示第二枚骰子出现的点数，则试验的样本空间 $\Omega=\{(x,y)\mid x,y=1,2,3,4,5,6\}$；$\Omega$ 的某些子集构成以下事件：

$A_1=$“点数之和等于 2”$=\{(1,1)\}$；

$A_2=$“点数之和等于 5”$=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$；

$A_3=$“点数之和超过 9”$=\{(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\}$.

事件可以用集合表示，也可以用明白无误的语言描述. 如果一次试验的结果

是样本点 ω 出现，而 $\omega\in A$，就称事件 A 发生了. 事件 A 发生当且仅当 A 中某个样本点出现. 例 5 中两枚骰子若掷出(5,5)，则事件 A_3 发生，事件 A_1，A_2 没有发生.

1.1.4 必然事件与不可能事件

样本空间 Ω 有两个特殊的子集，一个是 Ω 本身，它包含了所有可能的样本点，所以每次试验必然发生，我们称之为**必然事件**；另一个是空集 $\varnothing$，它不包含任何样本点，因此每次试验都不发生，称为**不可能事件**. 必然事件和不可能事件事实上都是确定性的，在这里我们姑且把它们当作随机事件的极端情形.

例如掷一枚骰子，“出现点数不超过 6”是一个必然事件，“出现 7 点”是一个不可能事件.

另外，称只包含一个样本点的事件为**基本事件**，如例 5 的 A_1. 由若干基本事件复合而成的事件称为**复合事件**，如 A_2，A_3.

1.2 事件间关系及运算

在一个样本空间中可以定义不止一个事件，有必要研究事件之间的关系. 对事件间关系的研究有助于我们认识随机现象的本质，也将简化后文的概率计算，从简单事件的概率推算出较复杂事件的概率.

设试验 E 的样本空间为 Ω，A、B、A_k、B_k $(k=1,2,\cdots)$ 为 E 中事件.

1.2.1 事件的关系与运算

1. 包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，就称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$(图 1.2.1). $A\subset B$ 意味着属于 A 的样本点必属于 B.

如例 1 中有 $A\subset B$. 又如对任一事件 A，都有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

$A\subset B$ 的一个等价说法是，如果事件 B 不发生，则事件 A 必然不发生.

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

2. 事件的并

“事件 A 与 B 中至少有一个发生”——这一事件称为 A 与 B 的并事件，记作 $A\cup B$. 图 1.2.2 中阴影部分即为 $A\cup B$. 显然，$A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$.

类似地，$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并事件，表示“$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生”.

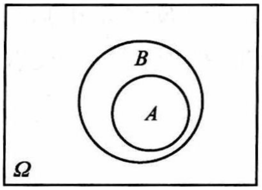

图 1.2.1

例 1 在一批灯泡中任取一只测试寿命，令 A=“灯泡寿命不超过 500 小时”$=\{t \mid 0\leqslant t\leqslant 500\}$，$B$=“灯泡寿命不超过 1 000 小时”$=\{t \mid 0\leqslant t\leqslant 1\,000\}$，则 $A\cup B=B=\{t \mid 0\leqslant t\leqslant 1\,000\}$.

3. 事件的交

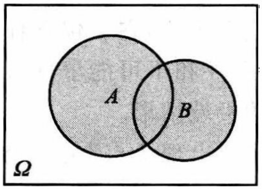

图 1.2.2

“事件 A 与事件 B 同时发生”——这一事件称为 A 与 B 的交事件，记作 $A\cap B$ 或 AB(图 1.2.3). $AB=\{\omega \mid \omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$.

类似地，$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$ 称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交事件，表示“$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”.

4. 事件的差

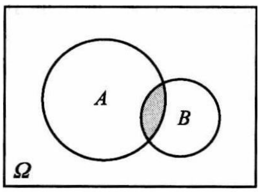

图 1.2.3

“事件 A 发生而事件 B 不发生”——这一事件称为 A 与 B 的差事件. 记作 $A-B$(图 1.2.4). $A-B=\{\omega \mid \omega\in A$ 但 $\omega\notin B\}$.

由图 1.2.4 不难发现 $A-B=A-AB$.

例 2 随机抽取一长方形工件检验其长度和宽度是否合格，令 A 表示“长度合格”，B 表示“宽度合格”，A_1 表示“只有长度合格”，A_2 表示“产品合格”，则 $A_1=A-B$，$A_2=AB$.

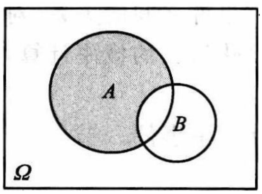

图 1.2.4

5. 互不相容

若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 互不相容或互斥(图 1.2.5). 此时，A 与 B 没有公共样本点. 例如掷骰子试验中，事件“出现偶数点”与“出现奇数点”是互不相容的.

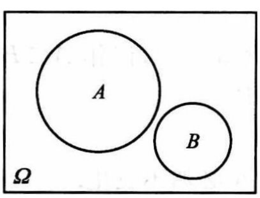

图 1.2.5

对于事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,3,\cdots,n)$，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **两两互不相容**.

6. 对立事件

对于事件 A，令 $\overline{A}=\Omega-A$，则称 $\overline{A}$ 为 A 的**对立事件**或**逆事件**，表示“A 不发生”，它是由所有不属于 A 的样本点所组成的事件(图 1.2.6). 显然，$\overline{A}$ 与 A 互为对立事件，即 $\overline{\overline{A}}=A$. 必然事件与不可能事件互为对立事件.

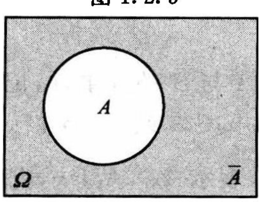

图 1.2.6

对任一事件 A，有 $A\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=\Omega$. 借助对立事件的符号，$A-B$ 可记为 $A\overline{B}$.

需注意的是,事件与其对立事件一定是互不相容事件,但反过来不一定对.

1.2.2 事件的运算规律

在进行事件的运算时,关于运算顺序做如下约定:先进行逆的运算,再进行交的运算,最后才进行并或差的运算.进一步地,可以验证一般事件的运算满足如下运算律:

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A$,$AB=BA$.

(2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(AB)C=A(BC)$.

(3) 分配律:$(A\cup B)C=AC\cup AB$,$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

(4) 德摩根律:$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$,$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$.

这些运算律可以推广到任意多个事件上去,利用运算律及事件间的相互关系,一个较复杂的事件能够表示成相对简单的形式,方便后面的概率计算.

例 3 设 A,B,C 是某试验中的 3 个事件,则

(1) 事件"A 与 B 发生,C 不发生"可表示为 $AB\bar{C}$ 或 $AB-C$.

(2) 事件"A,B,C 中至少有两个发生"可表示为 $AB\cup BC\cup AC$.

(3) 事件"A,B,C 中恰好两个发生"可表示为 $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$.

(4) 事件"A,B,C 中不多于一个发生"可表示为 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或$\overline{AB\cup BC\cup AC}$.

1.3 随机事件的概率

1.3.1 概率

对于随机现象,若只考虑它可能出现什么结果,意义不大,更有价值的是指出各种结果即各种随机事件发生的可能性大小,为此引入定义:

定义 1 随机事件 A 发生可能性大小的度量(数值)称为 A 的概率,记为$P(A)$.

对一个随机事件来说,它发生的可能性大小是由它自身决定的,是一个客观存在的量,不依人的主观意志为转移.例如,掷一枚骰子,出现偶数点的可能性一般大于恰好出现 6 点的可能性;购买福利彩票,获得头等奖的可能性远远小于获得尾奖的可能性.

那么,如何"测量"这个可能性的大小?在概率论的发展历史上,人们针对不同的问题,从不同角度给出了概率的定义和计算概率的各种方法.

1.3.2 概率的统计定义

我们先从“频率”讲起. 设试验 E 的样本空间为 Ω, A 是一个随机事件, 在相同条件下重复进行 N 次试验, 若事件 A 发生了 k 次, 则称比值

$$f_N(A)=\frac{k}{N}$$

为事件 A 发生的频率. 可以证明, 频率有以下三个性质:

(1) 非负性: $0\leqslant f_N(A)\leqslant 1$;

(2) 规范性: $f_N(\Omega)=1$;

(3) 有限可加性: 若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是两两互不相容的事件, 则

$$f_N\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}f_N(A_i).$$

对于随机事件 A, 我们的目的是确定其概率, 但从试验中只能看到 A 发生或不发生, 发生的“可能性”却是无法观测的. 然而根据实际经验, 容易发现概率和频率之间有天然的联系: 若 $P(A)$ 较大, 即 A 在一次试验中发生的可能性较大, 则进行重复试验, A 出现的次数应该较多, 即 A 发生的频率较大; 反之, 若 $P(A)$ 较小, A 发生的频率也应该较小. 因此, 一个自然的想法是从频率猜测概率, 或者说, 用频率作为概率的估计值. 但是, 对同一个事件 A, 当试验的重复次数 N 不一样时, 得到的 $f_N(A)$ 往往不同, 用哪个值作为 $P(A)$ 的估计?

例 1 掷硬币试验.

历史上有不少人做过掷硬币试验, 结果见表 1.3.1.

表 1.3.1 历史上掷硬币试验的若干结果

试验者	掷硬币次数 N	正面朝上次数 k	频率 $\frac{k}{N}$
德摩根(De Morgan)	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
卡尔・皮尔逊(k. Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
卡尔・皮尔逊(k. Pearson)	24 000	12 012	0.500 5
罗曼诺夫斯基(Romanovskiĭi)	80 640	39 699	0.492 3

从表 1.3.1 可以看到, 各人试验中“正面朝上”事件发生的频率不完全相同, 有一定波动性; 但是, 当试验的次数逐渐增多时, 频率又具有稳定性: 越来越靠近 0.5, 且在这个常数附近摆动.

例 1 展现出的频率的稳定性并不是一个特例, 人们通过长期实践发现, 随着

试验次数 N 的增加，一个随机事件 A 发生的频率 $f_N(A)$ 将稳定在某个常数附近，表现出稳定性，我们称之为**随机事件的统计规律性**.

例 2 男婴出生频率.

法国著名数学家拉普拉斯(Laplace，1749—1827)在他的时代里曾对男婴的出生率进行过深入研究，他分析了伦敦、彼得堡、柏林和全法国的人口资料后，发现男婴出生频率总在$\frac{22}{43}$这个数值左右波动.

例 3 英语字母出现的频率.

在英语中某些字母出现的频率远远高于另外一些字母，有人对各类典型的英语书刊中字母出现的频率进行统计，发现各个字母被使用的频率相当稳定，表 1.3.2 就是英文字母出现频率的一份统计表.

表 1.3.2 英文字母的使用频率

字母	使用频率	字母	使用频率	字母	使用频率
E	0.126 8	L	0.039 4	P	0.018 6
T	0.097 8	D	0.038 9	B	0.015 6
A	0.078 8	U	0.028 0	V	0.010 2
O	0.077 6	C	0.026 8	K	0.006 0
I	0.070 7	F	0.025 6	X	0.001 6
N	0.070 6	M	0.024 4	J	0.001 0
S	0.063 4	W	0.021 4	Q	0.000 9
R	0.059 4	Y	0.020 2	Z	0.000 6
H	0.057 3	G	0.018 7		

总之，频率的稳定性是随机事件本身固有的客观属性，只要试验是在相同条件下进行，频率所接近和稳定到的这个值就是一个与 N 无关的常数. 对任一事件，都有这样一个客观存在的常数与之对应，因此，可用频率的稳定值描述概率，定义概率为频率的稳定值，这就是**概率的统计定义**.

定义 2 在相同条件下，重复做 N 次试验，设事件 A 在 N 次试验中发生了 n 次，如果当 N 增大时，A 发生的频率$\frac{n}{N}$稳定地在某一常数 p 附近摆动，就称此常数 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)=p$.

根据这个定义，例 1 中“正面朝上”事件的概率为 0.5，说明掷一次均匀硬币出现正面或反面的可能性相等，足球比赛时裁判正是用掷硬币的方法让双方队

长选择场地，以示机会均等.

显然，按概率的统计定义求概率需要进行大量的重复试验，以寻找频率的稳定值，这在实际中很难做到. 注意到试验次数 N 较大时，频率 $f_N(A)$ 就会很接近 $P(A)$，因此实际中常直接拿频率作为概率的近似值. 例如足球比赛中罚点球的命中率是多少？曾有人对 1930—1988 年间世界各地 53 274 场重大足球比赛做了统计，在判罚的 15 382 个点球中，有 11 172 个射中，频率为 11 172/15 382=0.726，这就是罚点球命中概率的估计值.

1.3.3 古典概型

按照概率的统计定义，可通过大量重复试验求事件的概率，如著名的蒙特卡罗(Monte-Carlo)方法，就是用计算机来模拟随机试验. 不过在有些情况下，不必试验，只需根据研究对象具有的某种“对称性”以及人们关于“对称性”的实际经验，就能直接计算概率.

例 4 将一枚均匀硬币掷两次，求出现一正一反的概率.

解 此例的样本空间为 $\Omega=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)$\}$，含有 4 个样本点，由于硬币是均匀的(即是开头所说的“对称性”)，所以四个样本点发生的可能性相等；由于事件“一个正面一个反面”含有 2 个样本点，故所求概率应为 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

如同例 4 的随机试验有以下两个特征：

(1) 试验的样本空间只有有限个样本点；

(2) 每个样本点发生的可能性相等(称为等可能性).

具有上述特征的随机试验是概率论发展初期的主要研究对象，因此被称为**古典概型**. 在古典概型中，随机事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{A\text{ 中包含的样本点个数}}{\Omega\text{ 中的样本点个数}}. \tag{1.3.1}$$

法国数学家拉普拉斯 1812 年提出上式作为概率的一般定义，但这个定义只适用于古典概型，故称为**古典概率**或**概率的古典定义**.

例 5 将 10 本不同的书按任意次序放到书架上，求其中指定 3 本放在一起的概率.

解 10 本书共有 10! 种不同放法，由于书是按“任意次序”放至书架，因此各种放法出现的可能性相同，该试验为古典概型，样本空间包含的样本点个数为 10!. 令 A 表示“指定的 3 本书放在一起”，共有 $8!\times3!$ 种放法，即 A 包含的样本点个数为 $8!\times3!$，因此