高等职业教育“十二五”规划教材

应用高等数学

主编　丁匡平

国防工业出版社
National Defense Industry Press

高等职业教育“十二五”规划教材

应用高等数学

主　编　丁匡平
参　编　金友良　朱益民　严小宝
　　　　杨　俐　郑　翔　蔡跃台

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

本书根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,经过编者对高职院校理工类专业对数学知识需求的调研,结合编者多年的教学实践和数学自身的特点编写而成,反映了当前高等职业教育培养高素质实用型人才的教学理念.

本书内容包括函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分,微分方程,多元函数微积分,无穷级数,线性代数基础,MATLAB 简介与数学实验.

本书可供高职院校理工类各专业学生使用,也可供相关人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学/丁匡平主编.—北京:国防工业出版社,2010.8

ISBN 978-7-118-07002-6

Ⅰ.①应... Ⅱ.①丁... Ⅲ.①高等数学 Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 157258 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京嘉恒彩色印刷有限责任公司

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 **印张** 17½ **字数** 355 千字

2010 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—4000 册 **定价** 29.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

前　　言

本书是按照新形势下高等职业教育高等数学教学改革的精神，通过编者对高职院校理工类专业对数学知识需求的调研，结合编者多年的教学实践和数学自身的特点编写而成的. 本书主要特色是：

(1) 保持了高等数学自身独特的魅力. 可以很好地培养学生的思维能力、计算能力、应用能力和创新能力，为学生学好其他课程打好基础.

(2) 体现了为专业服务的精神. 高等数学在高职教育整体教学体系中是一门文化基础课，也是一门基础“工具”课. 本书内容选取广泛，可供各专业根据本专业特点进行适当取舍.

(3) 突出实用性. 对教学内容进行了精选，淡化了理论性和系统性，对一些定理只给出解释或简单的几何说明，强化针对性和实用性，使学生能运用所学知识求解实际问题. 每章都配有案例.

(4) 与目前高职学生的实际数学水平相衔接. 注重基础知识、基本方法和基本技能训练；习题的深度和广度适中.

(5) 与现代教育技术相结合. 鉴于计算机的广泛应用以及数学软件的日臻完善，为了提高学生使用计算机解决数学问题的意识和能力，本书介绍了 MATLAB 软件的使用方法及数学实验.

本书由丁匡平担任主编. 参加本书编写的有丽水职业技术学院金友良（第一、二、三章）、丁匡平（第四、五、六章）、严小宝（第八章）、杨俐（第九章）、郑翔（第十章）、蔡跃台（附录）和衢州职业技术学院朱益民（第七章）.

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，恳请读者提出宝贵意见.

编　者

目　　录

第一章　函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象。极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，因此，掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键。连续是函数的一个重要性态。本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和基本方法，为今后的学习打下必要的基础。

第一节　函　　数

一、函数的概念

定义1　设 D 是一个非空实数集，如果有一个对应法则 f，对每一个 $x\in D$，都有唯一数值 y 与它对应，则将对应法则 f 称为定义在 D 上的一个函数，记为 $y=f(x)$，x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 为函数的定义域，记为 $D(f)$.

注意：

(1) $y=f(x)$ 中的对应法则 f 也可以用其他符号，如 $y=g(x)$，$\varphi(x)$，$\phi(x)$，$y(x)$ 等；

(2) 当 x 在 D 中取 x_0 时，y 总有一个且只有一个 y_0 与它对应，则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$（见图 1—1—1）；

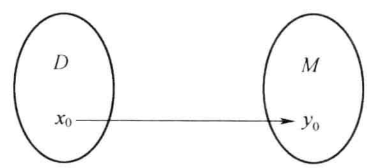

图 1—1—1

(3) 所有函数值的集合叫做函数的值域.

【例 1】　已知 $f(x)=x^2$，求 $f(2)$，$f(a)$，$f(x+1)$，$f\left(-\frac{1}{y}\right)$，$f[f(x)]$.

解：$f(2)=4$，$f(a)=a^2$，$f(x+1)=(x+1)^2$，$f\left(-\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{y^2}$，$f[f(x)]=[f(x)]^2=x^4$.

【例 2】　已知 $f(x+1)=x^2+x+1$，求 $f(x)$.

解法一：设 $t=x+1$，则 $x=t-1$.

因此
$$f(t)=(t-1)^2+(t-1)+1=t^2-t+1$$
所以
$$f(x)=x^2-x+1$$

解法二：由于 $f(x+1)=(x+1)^2-(x+1)+1$，

所以 $$f(x)=x^2-x+1$$

二、函数的两要素

函数的两要素是定义域和对应法则.

【例 3】 判断下列各对函数是否相同,并说明理由.

(1) $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$;

(2) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$;

(3) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$;

(4) $f(u)=3u-1$ 与 $g(t)=3t-1$;

(5) $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$.

解:(1) 不相同. 两函数定义域不同.

(2) 不相同. 两函数定义域不同.

(3) 不相同. 两函数对应法则不同.

(4) 相同. 两函数的两要素相同.

(5) 相同. 两函数的两要素相同.

微积分的主要研究对象是函数,确定函数的定义域是一件十分重要的事情.

当 $y=f(x)$ 用一个式子表示时,通常依据以下几个方面来确定函数的定义域:分式的分母不能为零;偶次方根的被开方式大于或等于零;对数中的真数要大于零;用已知的一些函数的定义域、物理意义、几何意义等来判断.

【例 4】 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ (2) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\log_2(x^2-3x+2)$

解:(1) 要使函数有意义,则

$$x^2-3x+2>0$$

即 $x>2$ 或 $x<1$,所以 $D(f)=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

(2) 要使函数有意义,则

$$\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1\\ x^2-3x+2>0\end{cases}$$

即 $\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4\\ x>2 \text{ 或 } x<1\end{cases}$,所以 $D(f)=[-3,1)\cup(2,4]$.

三、函数的表示法

函数的表示法有解析法、图像法、表格法. 解析法中有一种特殊的表示法——分段

函数表示法.

定义 2 对于其定义域 D 内自变量 x 的不同的值,不能用一个统一的数学式子表示,而要用两个或两个以上的式子表示的函数叫分段函数.

例如,(1) 符号函数:

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

(2) 狄利克雷函数:

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数} \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

【例 5】 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x>0 \\ 2, & x=0 \\ 3x, & x<0 \end{cases}$

(1) 求 $f(1)$、$f(-2)$的值 ;(2) 求 $D(f)$.

解:(1) $f(1)=2$, $f(-2)=-6$.

(2) $D(f)=(-\infty,+\infty)$.

【案例】 已知汽车刹车后轮胎磨擦的痕迹长 s(m)与车速 v(km/h)的平方成正比,当车速为 60km/h 时刹车,测得痕迹长为 6m,求痕迹长 s 与车速 v 的函数关系.

解:由题意可设 $s=kv^2$. 由于当 $v=60$km/h 时,$s=6$m,所以 $6=k\cdot 60^2$,$k=\frac{1}{600}$.
因此,痕迹长 s 与车速 v 的函数关系为

$$s = \frac{1}{600}v^2$$

四、函数的特性

1. 函数的奇偶性

定义 3 设 $f(x)$在对称区间上有定义,如果 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数;

如果 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数.

【例 6】 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y = x^4 - 2x^2$ (2) $y = x^3 + 1$ (3) $y = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$

解:(1) 因为 $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$

所以 $f(x)$为偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=-x^3+1\neq f(x)$

且 $f(-x)\neq -f(x)$,所以 $f(x)$为非奇非偶函数.

(3) 因为 $$f(-x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)=\log_a\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$
所以 $f(x)$为奇函数.

2. 函数的单调性

函数的单调性将在第三章中作详细介绍.

3. 函数的周期性

定义 4 设函数 $f(x)$在区间(a,b)内有定义,若存在非零常数 T,对任意 $x\in(a,b)$与 $x+T\in(a,b)$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$是以 T 为周期的周期函数,满足这个等式的最小正数 T 为函数 $f(x)$的最小正周期,简称周期.

例如,$y=\sin x$ 的周期为 2π, $y=\tan x$ 的周期为 π ,$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的周期为$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

4. 函数的有界性

定义 5 设函数 $f(x)$在区间(a,b)内有定义,若存在一个正数 M,对任意 $x\in(a,b)$,都有$|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在区间(a,b)内有界.

例如,$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上,都有$|f(x)|\leqslant 1$,所以 $y=\sin x$ 有界.

又如,$y=\frac{1}{x}$在$(0,2)$上无界,因为找不到这样的正数 M,使得$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$ 恒成立.

五、反函数

定义 6 设 $f(x)$的定义域为 D,值域为 M,若对于任意 $y\in M$,都可由方程$f(x)=y$ 唯一确定一个 $x\in D$ 与之对应,则 x 就是定义在M 上 y 的函数,称此函数为 $f(x)$的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$.

由于人们的习惯,自变量通常用 x 表示,因变量用 y 表示,于是 $f(x)$的反函数表示为 $y=f^{-1}(x)$. 互为反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

【例 7】 求 $y=5x-1$ 的反函数.

解:由于 $y=5x-1$,因此 $x=\frac{y+1}{5}$,所以 $y=5x-1$ 的反函数为 $y=\frac{x+1}{5}$.

六、初等函数

1. 基本初等函数

1) 常数函数 $y=c$

定义域:$(-\infty,+\infty)$;

值域:$\{c\}$;

特性:偶函数.

2) 幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为任何实数)

定义域、值域、特性与 α 有关.

3) 指数函数 $y=a^{x}$($a>0$ 且 $a\neq 1$)

定义域:$(-\infty,+\infty)$;

值域:$(0,+\infty)$;

特性:当 $a>1$ 时,单调增加,且必过点$(0,1)$;当 $0<a<1$ 时,单调减少,且必过点$(0,1)$.

4) 对数函数 $y=\log_{a}x$($a>0$ 且 $a\neq 1$)

定义域:$(0,+\infty)$;

值域:$(-\infty,+\infty)$;

特性:当 $a>1$ 时,单调增加,且必过点$(1,0)$;当 $0<a<1$ 时,单调减少,且必过点$(1,0)$.

5) 三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$.

(1) $y=\sin x$.

定义域:$(-\infty,+\infty)$;

值域:$[-1,1]$;

特性:奇函数,有界,周期为 2π,在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加,在$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$内单调减少($k\in Z$).

(2) $y=\cos x$.

定义域:$(-\infty,+\infty)$;

值域:$[-1,1]$;

特性:偶函数,有界,周期为 2π,在$(2k\pi,2k\pi+\pi)$内单调减少,在$(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$内单调增加($k\in Z$).

(3) $y=\tan x$.

定义域:$\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$;

值域:$(-\infty,+\infty)$;

特性:奇函数,无界,周期为 π,在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加($k\in Z$).

(4) $y=\cot x$.

定义域:$\{x\,|\,x\neq k\pi,k\in Z\}$;

值域:$(-\infty,+\infty)$;

特性:奇函数,无界,周期 π,在$(k\pi,k\pi+\pi)$内单调减少($k\in Z$).

(5) $y=\sec x$.

由 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$可得相关性质.

(6) $y=\csc x$.

由 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$可得相关性质.

6) 反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$

(1) $y=\arcsin x$.

定义域:$[-1,1]$;

值域:$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$;

特性:奇函数,有界,在$[-1,1]$内单调增加.

(2) $y=\arccos x$.

定义域:$[-1,1]$;

值域:$[0,\pi]$;

特性:有界,在$[-1,1]$内单调减少.

(3) $y=\arctan x$.

定义域:$(-\infty,+\infty)$;

值域:$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$;

特性:奇函数,有界,单调增加.

(4) $y=\operatorname{arccot} x$.

定义域:$(-\infty,+\infty)$;

值域:$(0,\pi)$;

特性:有界,单调减少.

2. 复合函数

定义 7 设 $y=f(u)$,$u\in U$,$u=\varphi(x)$,$x\in X$,值域为 M,如果 $M\subseteq U$ 或 $M\cap U\neq\phi$,对$\{x\mid x\in X$ 且 $\varphi(x)\in U\}$中任意一个 x 通过 u 有唯一的 y 与之对应,从而得到一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数,这个函数就叫由函数 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数。记作:$y=f[\varphi(x)]$,其中 u 为中间变量.

【例 8】 求下列函数的复合函数.

(1) $y=u^2$,$u=\sin x$　　(2) $y=\sin u$,$u=\cos v$,$v=x+1$

解:(1) $y=\sin^2 x$;(2) $y=\sin[\cos(x+1)]$.

注意:并不是所有函数都可以复合. 例如,$y=\sqrt{u}$,$u=-1-x^2$ 就无法复合.

【例 9】 指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\sin(\lg x)$　　(2) $y=\sqrt{2x-3}$

(3) $y=\ln\cos x^2$　　(4) $y=2^{\sin^2 x}$

解：(1) $y=\sin(\lg x)$由 $y=\sin u, u=\lg x$ 复合而成.

(2) $y=\sqrt{2x-3}$由 $y=\sqrt{u}, u=2x-3$ 复合而成.

(3) $y=\ln\cos x^2$ 由 $y=\ln u, u=\cos v, v=x^2$ 复合而成.

(4) $y=2^{\sin^2 x}$由 $y=2^u, u=v^2, v=\sin x$ 复合而成.

3. 初等函数

定义 8 由基本初等函数通过有限次的四则运算和有限次复合而成，且能用一个数学式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\lg(1+\sin x)$，$y=x^2\cos x-e^{\sin x}$，$y=\dfrac{x^3}{\sin x}-\arccos x^2$ 等.

七、邻域

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，开区间$(a-\delta, a+\delta)$称为点 a 的 δ 邻域，记作$U(a,\delta)$，

即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{a \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

点 a 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径。

在不需关注邻域的半径时，邻域 $U(a,\delta)$也简记为 $U(a)$.

在点 a 的 δ 邻域中去掉点 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，或简记为 $\mathring{U}(a)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

其中 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$.

例如，$\{x \mid |x-1|<0.5\}$表示以点 $a=1$ 为中心，以 0.5 为半径的邻域，也就是开区间$(0.5,1.5)$，即

$$U(1,0.5)=\{x \mid |x-1|<0.5\}=(0.5,1.5)$$

而$\{x \mid 0<|x-1|<0.5\}$表示以点 $a=1$ 为中心，以 0.5 为半径的去心邻域，也就是$(0.5,1)\cup(1,1.5)$，即

$$\mathring{U}(1,0.5)=\{x \mid 0<|x-1|<0.5\}=(0.5,1)\cup(1,1.5)$$

思 考 题

1. 确定一个函数需要哪几个基本要素？
2. 函数 $y=\cos x$ 是否有界？应如何分解一个复合函数？

练 习 题

1. 求函数 $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$的定义域.

2. 分析函数 $y=\sqrt[3]{\operatorname{arctancos}e^{2x}}$ 的复合结构.

第二节　极　限

一、数列的极限

定义 1　对于数列$\{x_n\}$,如 n 无限增大时,x_n 无限趋近于某个确定的常数 a,则称 a 为数列$\{x_n\}$的极限,或者称数列$\{x_n\}$收敛于 a,记作:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$.

观察下列数列的变化趋势,写出它们的极限.

① $\left\{x_n=\dfrac{n+1}{n}\right\}$,当 $n\to\infty$时,$x_n\to 1$.

② $\left\{x_n=2-\dfrac{1}{n^2}\right\}$,当 $n\to\infty$时,$x_n\to 2$.

③ $\{x_n=C\}$,当 $n\to\infty$时,$x_n\to C$.

④ $\left\{x_n=\dfrac{3n+4}{n+1}\right\}$,当 $n\to\infty$时,$x_n\to 3$.

注意:　并不是任何数列都有极限. 例如,$\{x_n=(-1)^n\}$,当 $n\to\infty$时,x_n 不会无限趋近于某一个确定常数,所以此数列没有极限.

【案例】　某工厂对一生产设备的投资额是 1 万元,每年的折旧费为该设备账面价格(即以前各年折旧费用扣除后余下的价格)的$\dfrac{1}{10}$,那么这一设备的账面价格(单位:万元)第一年为 1,第二年为$\dfrac{9}{10}$,第三年为$\left(\dfrac{9}{10}\right)^2$,第四年为$\left(\dfrac{9}{10}\right)^3$,……,第 n 年为$\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-1}$,从它的变化趋势可以看出,随着年数 n 的无限增大,账面价格无限接近于 0,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-1}=0$.

一般地,$\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}=0(|q|<1)$.

二、函数的极限

1. 自变量趋向无穷大时函数的极限

1) $x\to\infty$时函数极限概念及记号

定义 2　设函数 $f(x)$在$|x|>b$ 时有定义,当 $x\to\infty$,即 x 的绝对值无限增大时,若 $f(x)$会无限地趋近于某一确定常数 a,则称 a 为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限. 记作:$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ 或当 $x\to\infty$时,$f(x)\to a$.

例如,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x^2})=1$.

2）$x \to +\infty$时函数极限概念及记号

定义 3 设函数 $f(x)$在 $x>b(b>0)$时有定义，当 $x\to+\infty$，即 x 取正值无限增大时，若 $f(x)$无限地趋近于某一确定常数 a，则称 a 为函数 $f(x)$当 $x\to+\infty$时的极限. 记作：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ 或当 $x\to+\infty$时，$f(x)\to a$.

例如，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$

3）$x\to-\infty$时函数极限概念及记号

定义 4 设函数 $f(x)$在 $x<-b(b>0)$时有定义，当 $x\to-\infty$，即 x 取负值而绝对值无限增大时，若 $f(x)$会无限地趋近于某一确定常数 a，则称 a 为函数 $f(x)$当 $x\to-\infty$时的极限. 记作：$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$ 或当 $x\to-\infty$时，$f(x)\to a$.

例如，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$.

4）以上三者的关系

定理 1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$

【例 1】 讨论当 $x\to\infty$时 $y=\arctan x$ 的极限.

解：因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

2. 自变量 $x\to x_0$ 时函数的极限

【引例 1】 讨论当 $x\to2$ 时函数 $f(x)=x+2$ 的变化趋势.

解：当 $x\to2$ 时，$f(x)=x+2\to4$.

【引例 2】 讨论当 $x\to1$ 时函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的变化趋势.

解：当 $x\to1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1\to2$.

定义 5 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域（点 x_0 本身可以除外）内有定义，当 $x\to x_0$，即 x 无限趋近于 x_0 时，若 $f(x)$会无限地趋近于某一确定常数 a，则称 a 为函数 $f(x)$在 x_0 处的极限. 记作：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 或当 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to a$.

【例 2】 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\cos x$.

解：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$，$\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$.

【例 3】 求 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-1}{3x+1}$.

解：$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-1}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}(3x-1)=-2$.

3. 单侧极限

1）右极限的概念及记号

定义 6 当 $x\to x_0^+$，即 x 从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0 时，若 $f(x)$ 会无限地趋近于某一确定常数 a，则称 a 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限. 记作：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=a$.

例如，$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$.

2）左极限的概念及记号

定义 7 当 $x\to x_0^-$，即 x 从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0 时，若 $f(x)$ 会无限地趋近于某一确定常数 a，则称 a 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限. 记作：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$.

例如，$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$.

3）$f(x)$ 在 x_0 处的极限存在的充要条件

定理 2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$.

【例 4】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\geqslant 1\\ x+1, & x<1\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$.

【例 5】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{-x}=-1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ 不存在.

思考题

1. 设 C 为常数，$\lim\limits_{x\to x_0}C$ 存在吗？

2. 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的极限不存在，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处的极限也不存在吗？

练习题

1. 画图说明，当 $x\to 0$ 时，下列函数的极限是否存在？

(1) $y=x$ (2) $y=\sin x$ (3) $y=\dfrac{1}{x}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ x+1, & x<0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.